普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

最优控制理论简明教程

雍炯敏　楼红卫

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

最优控制理论简明教程

雍炯敏　楼红卫

高等教育出版社

内容提要

本书是信息与计算科学专业系列教材之一，以较简短的篇幅介绍了常微分方程系统最优控制理论的三个里程碑工作——Pontryagin 最大值原理、Bellman 动态规划方法和 Kalman 线性二次最优控制理论；同时也讨论了线性系统的时间最优控制问题和最优控制的存在性理论。

本书可以作为信息与计算科学专业和数学与应用数学专业本科高年级和研究生的专业课或选修课的教学用书，对希望了解最优控制理论的工程技术人员和有关方向研究人员也有一定的参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

最优控制理论简明教程／雍炯敏，楼红卫．—北京：高等教育出版社，2006．11

ISBN 7－04－019953－X

Ⅰ．最…　Ⅱ．①雍…②楼…　Ⅲ．最佳控制－数学理论－高等学校－教材　Ⅳ．O232

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 108667 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2006 年 11 月第 1 版
印　　张	12	**印　　次**	2006 年 11 月第 1 次印刷
字　　数	210 000	**定　　价**	15.50 元

物料号　19953－00

信息与计算科学专业系列教材编委会

总　　序

根据教育部1998年颁布的普通高等学校专业目录,“信息与计算科学”专业被列为数学类下的一个新专业(它覆盖原有的计算数学及其应用软件、信息科学与运筹控制等专业)。这一新专业的设置很好地适应了新世纪以信息技术为核心的全球经济发展格局下的数学人才培养与专业发展的需要。然而,作为一个新专业,对其专业内涵、专业规范、教学内容与课程体系等有一个自然的认识与探索过程。教育部数学与统计学教学指导委员会数学类专业教学指导分委员会(下称教指委)经过过去两年艰苦细致的工作,对这些问题现在已有了比较明确的指导意见,发表了《关于信息与计算科学专业办学现状与专业建设相关问题的调查报告》及《信息与计算科学专业教学规范》(讨论稿)(见《大学数学》第19卷1期(2003))。为此,全国高等学校教学研究中心在承担全国教育科学“十五”国家级规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上,根据教指委所颁布的新的教学规范,组织国内各高校的专家教授,进行其子项目课题“21世纪中国高等学校信息与计算科学专业教学内容与课程体系的创新与实践”的研究与探索。为推动本专业的教材建设,该项目课题小组与高等教育出版社联合成立了“信息与计算科学专业系列教材编委会”,邀请有多年教学和科研经验的教师编写系列教材,由高等教育出版社独家出版,并冠以教育科学“十五”国家规划课题研究成果。

按照新的《信息与计算科学专业教学规范》(讨论稿),信息与计算科学专业是以信息技术和计算技术的数学基础为研究对象的理科类专业。其目标是培养学生具有良好的数学基础和数学思维能力,掌握信息与计算科学基础理论、方法与技能,受到科学研究的训练,能解决信息技术和科学与工程计算中的实际问题的高级专门人才。毕业生能在科技、教育、信息产业、经济与金融等部门从事研究、教学、应用开发和管理工作,能继续攻读研究生学位。根据这一专业目标定位和落实“强基础、宽口径、重实际、有侧重、创特色”的办学指导思想,我们认为,本专业在数学基础、计算机基础、专业基础方面应该得到加强,各学校在这三个基础方面可大体一致,但专业课(含选修课)允许各校自主选择、体现各自特点。考虑到已有大量比较成熟的数学基础与计算机基础课程教材,本次教材编写主要侧重于专业基础课与专业课(含选修课)方面。

信息与计算科学,就其范畴与研究内容而言,是数学、计算机科学和信息工

程等学科的交叉,已远远超出数学学科的范畴。但作为数学学科下的一个理科专业,信息与计算科学专业则主要研究信息技术的核心基础与运用现代计算工具高效求解科学与工程问题的数学理论与方法(或更简明地说,研究定向于信息技术与计算技术的数学基础),这一专业定位明显地与计算机科学与信息工程专业构成区别。基于这一定位,信息与计算科学专业可包括信息科学与科学计算(计算数学)两个大的方向。科学计算方向在我国已有长期的办学经验,通常被划分为偏微分方程数值解、最优化理论与方法、数值逼近与数值代数、计算基础等学科子方向。然而,对于信息科学,它到底应该怎样划分学科子方向? 应该怎样设置专业与专业基础课? 所有这些都仍是正在探索的问题。

任何技术都可以认为是延伸与扩展人的某种功能的方式与方法,所以信息技术可以认为是扩展人的信息器官功能的技术。人的信息器官主要包括感觉器官、传导器官(传导神经网络)、思维器官和效应器官四大类型,其功能则主要是信息获取、信息传输、信息处理和信息应用(控制),因而感测技术、通信技术、智能技术与控制技术通常被认为是最基本的信息技术(常称之为信息技术的四基元),其他信息技术可认为是这四种基本技术的高阶逻辑综合或分解衍生。所以可以把信息科学理解为是"有关信息获取、信息传输、信息处理与信息控制基础的科学"。从这个意义上,我们认为:信息处理(包括图像处理、信号分析等)、信息编码与信息安全、计算智能(人工智能、模式识别等)、自动控制等可构成信息科学的主要学科子方向。这一认识也是教指委设置信息与计算科学专业信息科学方向课程的基本依据。

本系列教材正是基于以上认识,为落实新的《信息与计算科学专业教学规范》(讨论稿)而组织编写的。我们相信,该系列教材的出版对缓解本专业教材的紧缺局面,对推动信息与计算科学专业的快速与健康发展会大有裨益。

从长远的角度看,为适应不同类型院校和不同层次要求的课程需求,本系列教材编委会还将不断组织教材的修订和编写新的教材,从而使本专业的教学用书做到逐步充实、完善和多样化。我们诚恳地希望使用本系列教材的教师、同学们及广大读者对书中存在的问题及时指正并提出修改意见和建议。

信息与计算科学专业系列教材编委会

2003年8月31日

前　言

认识和改造自然是人类进化发展中两类最基本的活动。从发现昼夜交替和四季更迭的规律，到发现大地是个既有自转又有绕太阳公转的“大球”，直至发现分子、原子、基本粒子……这些都是人类认识自然的结果。另一方面，为了改善生活环境，人类也创造了许多自然界本不存在的东西：衣服、房屋、家具、劳动工具、交通工具、通信工具、电视、计算机……所有这些都是人们努力改善生活环境的结果。而“多快好省”地实现这些目标更是人们期待的。

按照数学的观点，广义地讲，认识世界是数学建模问题，改造世界是控制问题，而“多快好省”地改造世界则是最优控制问题。因此，控制问题和最优控制问题几乎是无处不在的。从狭义的观点讲，在一个控制问题中，有一个受控对象和一个（或多个）控制作用。如果施以不同的控制作用值，受控对象就会有不同的反应。通过适当改变控制作用，人们能够在一定程度上使受控对象朝所希望的方向变化。例如，要通过起重机将若干重物吊至某个平台就是一个典型的控制问题。这里，受控对象是起重机的吊臂，而控制作用则是驾驶员通过操纵杆施加于吊臂的起吊力。显然，将所有重物运到给定平台的方式有许多种（一件一件地吊，两件两件地吊，按什么样的速度起吊，等等）。它们所花的总时间和总油耗是不同的。而当人们希望选择某种意义下最优的方式（比如希望时间最短，或者希望油料最省）完成任务时，最优控制问题就产生了。我们还需要注意到，由于起吊力的大小是有限的，因此控制作用是有约束的。此外，吊臂的长度是有限的，因此，能够将重物起吊到的高度也是有限制的。这表明，（最优）控制问题中会存在各种各样的约束条件。

通常，在用数学方式描述的最优控制问题中，受控对象往往是一个动态方程，可以是（离散时间的）差分方程、常微分方程或者是积分方程，也可以是随机微分方程或偏微分方程，甚至可以是上述一些方程的耦合组。受控动态方程常称作控制系统或状态方程，而它的解常称作系统的状态。控制作用全体常常是某个函数集合。另外还有一个评价控制作用好坏的性能指标。控制的目的是最小化或最大化这个性能指标。此外，还可能存在若干状态和控制的约束条件。所有这些加在一起便形成了一个最优控制问题的数学描述。当状态方程是常微分方程时，状态空间是有限维的，当状态方程是随机微分方程或偏微分方程时，状态空间是无限维的。

关于常微分方程系统的最优控制理论是本科高年级有关专业和研究生运筹学与控制论专业的一门重要课程。复旦大学数学科学学院开设这门课程已有二十余年的历史。自从Pontryagin等人20世纪60年代初出版名著《最佳过程的数学理论》后，出现了许多经典的最优控制理论专著或教材。随着控制理论研究的发展，若干经典著作或教材目前已略微显得过时了，而一些近年出版的有关专著或教材又都比较艰深，不太适合初学者。因此，提供一本能够反映最优控制理论发展的适合初学者的有限维最优控制理论简明教程成为一个比较迫切的任务。

本书的目的就是为本科高年级学生和研究生提供一本简明的最优控制教程。我们希望通过不长的篇幅，简明扼要地叙述最优控制的基本理论。主要内容包括：最优控制问题的一般提法，线性系统的时间最优控制，一般非线性系统的最优控制存在性理论，Pontryagin最大值原理，Bellman的动态规划方法及Kalman的线性二次最优控制理论。每章末尾还配了一定的习题以供读者通过练习加深对章节中内容的理解。此外，为了使读者进一步了解最优控制理论的有关历史和最新进展，我们还加了一些注记。我们期望通过该课程的学习，读者能够初步掌握最优控制理论的基本思想和数学技巧，能够对其将来的学习、研究和从事的工作有所帮助或启迪。

教材的初稿得到了汪更生教授、陈启宏教授和张旭教授的仔细审阅，并提出了不少宝贵意见；在教材的试用中，复旦大学数学科学学院的师生也对教材的改进提出了许多有益的建议。在此我们谨对他们致以衷心的感谢。

限于作者狭窄的知识面以及对最优控制理论肤浅的理解，在本书中必有许多表达不够确切，或者叙述不够严谨之处，敬请读者不吝赐教。

雍炯敏　楼红卫

2006年3月

符号汇编

常用记号

$\mathbf{R}^n$	n 维 Euclid 空间
x	$\mathbf{R}^n$ 中的点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，它常常被看做一个列向量
$x\cdot y$	$\mathbf{R}^n$ 中的数量积 $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，也常常用$\langle x,y\rangle$表示
$\vert x\vert$	$x\in\mathbf{R}^n$ 的长度$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$
$B_r(x)$	半径为 r 中心在 $x\in\mathbf{R}^n$ 的开球
I_n	n 阶单位矩阵，在不引起混淆时，通常省略下标 n
A^{T}	矩阵 A 的转置
$\operatorname{rank} A$	矩阵 A 的秩
$\varnothing$	空集
Ω	$\mathbf{R}^n$ 中的区域(通常是有界且边界足够光滑的)
$\partial\Omega$	Ω 的边界
$\overline{\Omega}$	Ω 的闭包 $\Omega\cup\partial\Omega$
E^c	$\mathbf{R}^n$ 中集合 E 的补集 $\mathbf{R}^n\setminus E$
$\operatorname{co} E$	集合 E 的凸包
$\overline{\operatorname{co}}\, E$	集合 E 的凸闭包
$\vert E\vert$	$\mathbf{R}^n$ 中 Lebesgue 可测集 E 的 Lebesgue 测度
X^*	当 X 是一个算子时表示它的伴随算子；当 X 是 Banach 空间时表示它的对偶空间
∇f	函数 f(关于变量 x)的梯度$(f_{x_1},f_{x_2},\cdots,f_{x_n})$，也记作 Df
∂f	凸函数 f 的次微分
$\mathrm{d}x$	$\mathbf{R}^n$ 中的 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$
p'	实数 $p\in[1,+\infty]$的对偶数 $p/(p-1)$，当 $p=1,+\infty$ 时取值分别约定为 $+\infty$，1
$a\wedge b$	表示 $\min(a,b)$
$a\vee b$	表示 $\max(a,b)$

δ_{ik}	Kronecker 符号 $$\delta_{ik}=\begin{cases}1, i=k,\\0, i\neq k\end{cases}$$
$f(\cdot)$	指函数 f 本身
$f(x)$	指函数 f 在点 x 的取值
f'	$\mathbf{R}^1$ 中函数 f 的导数 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$(虽与上面对偶数的记号有冲突,但可根据上下文确定)
f^+	函数 f 的正部 $(\lvert f\rvert+f)/2$
f^-	函数 f 的负部 $(\lvert f\rvert-f)/2$
χ_E	集合 E 的特征函数,该函数在 E 上取值 1,在其他点取值 0
I_E	集合 E 的示性函数,该函数在 E 上取值 0,在其他点取值 $+\infty$
inf(sup)	函数的下确界(上确界)
essinf(esssup)	函数的本性下确界(本性上确界)
C	表示只依赖于一些给定参数的绝对常数(常常是正的),在不同的式子中,它的取值可以是不同的
$\exists$	存在
$\forall$	(对于)所有
a. e.	几乎处处
$\subset\subset$	集合的紧包含关系,$\Omega_0\subset\subset E$ 当且仅当 $\overline{\Omega}_0\subseteq E$
$\stackrel{\mathrm{d}}{=\!=}$	表示定义,例如 $f(x)\stackrel{\mathrm{d}}{=\!=}2x+1$ 表示将 $f(x)$ 定义为 $2x+1$

函数空间

$C(\Omega)$(或 $C(\overline{\Omega})$)	Ω(或 $\overline{\Omega}$)中连续函数全体
$C^k(\Omega)(C^{k,\alpha}(\Omega))$	Ω 中 k 次连续可微的函数类(它们的 k 阶微商满足指数为 α 的 Hölder 条件),$C^{0,\alpha}(\Omega)$ 简记为 $C^\alpha(\Omega)$
$C^k(\overline{\Omega})(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}))$	Ω 中的函数类,其中每个元 f 都可以将定义域延拓到 $\overline{\Omega}$ 的某个邻域 $\mathcal{O}$,使得 f 属于 $C^k(\mathcal{O})(C^{k,\alpha}(\mathcal{O}))$,$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ 简记为 $C^\alpha(\overline{\Omega})$
$L^p(E)$	Ω 中 $p(1\leqslant p<+\infty)$ 次 Lebesgue 可积函数全体,它的元素 f 赋予范数 $$\lVert f\rVert_{L^p(E)}=\left(\int_E\lvert f\rvert^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}<+\infty$$
$L^\infty(E)$	本性有界的 Lebesgue 可测函数全体,它的元素 f 赋予范数

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \inf\{M \mid |f| \leqslant M, \text{a. e. } E\}$$

$L^p_{loc}(E)$ E 中的函数集(E 是一个区域加上一些可能的边界点),它的元素 f 满足 $f \in L^p(E_0)$, $\forall E_0 \subset\subset E$,此时 $L^p_{loc}(E)$ 本质上与 E 的边界点属于或不属于 E 是有关的

目　录

第5章 最大值原理 99

第6章 动态规划方法 121

第7章 线性系统的二次最优控制问题 151

第 I 章 引言

§1 函数极值、变分问题及最优控制

最优控制问题可以看成是函数极值问题和变分问题的拓展．在很多方面，最优控制问题仍保留着函数极值和变分问题的基本特性．处理最优控制问题的思想和方法也往往可以从处理函数极值问题的理论和经典变分学中找到．因此，有必要首先把函数极值问题、变分问题和最优控制问题放在一起做一个回顾．

函数极值

例 1.1 设 $G\subseteq\mathbf{R}$，$J:G\to\mathbf{R}$ 是一个 C^1 函数．我们的问题是要寻找 $J(\cdot)$ 在 G 上的最小值．这立刻涉及两个基本问题：(i) $J(\cdot)$ 是否在 G 上有最小值？(ii) 如果 $J(\cdot)$ 在 G 上存在最小值，我们如何刻画最小值点？

首先我们来看(i)．如果 G 是紧集(即有界闭集)，则众所周知 $J(\cdot)$ 在 G 上一定取到最小值．但是，如果 G 不是紧集，情况就会复杂一些．此时，为保证最小值的存在，我们就需要更多的假设．譬如当 $G=\mathbf{R}$ 时，如果

$$\lim_{|x|\to\infty} J(x) = +\infty, \tag{1.1}$$

则 $J(\cdot)$ 在 G 上有最小值．我们称(1.1)为 $J(\cdot)$ 的**强制性条件**．现在，再来看(ii)．假如已经知道 $J(\cdot)$ 有一个最小值点 $\bar{x}\in G$，我们希望把它刻画出来．由最小性，我们有

$$J(x)\geqslant J(\bar{x}),\ \forall\, x\in G. \tag{1.2}$$

如果 $G=(a,b)$，则对于任何充分小的 $\delta>0$，总有 $\bar{x}\pm\delta\in G$，从而，由(1.2)可得

$$0\leqslant\frac{1}{\delta}[J(\bar{x}\pm\delta)-J(\bar{x})]\to\pm J'(\bar{x}).$$

这样，就得到所谓的**一阶必要条件**：

$$J'(\bar{x})=0. \tag{1.3}$$

如果(1.3)有惟一解 $\bar{x}$，而且我们知道 $J(\cdot)$ 在 (a,b) 内一定存在最小值，那么 $\bar{x}$ 就一定是最小值点．

当我们并不知道 $J(\cdot)$ 是否存在最小值时,如果 $J(\cdot)$ 是 C^2 函数,且(1.3)成立,则由 Taylor 展式,在 $\bar{x}$ 附近,

$$J(x)-J(\bar{x})=\frac{1}{2}J''(\bar{x})(x-\bar{x})^2+o(|x-\bar{x}|^2).$$

从而,如果

$$J''(\bar{x})>0, \tag{1.4}$$

则我们可以断言 $\bar{x}$ 是一个局部最小值点(极小值点). 于是条件(1.3)和(1.4)就构成 $\bar{x}$ 为极小值点的一个充分条件. 另一方面,可以看到 $J''(\bar{x})\geqslant 0$ 是 $\bar{x}$ 为最(极)小值点的一个二阶必要条件.

如果 G 是一个较为一般的集合,情况就会相当复杂. 这时,即使(1.2)成立,(1.3)也可能不成立. 请看下例和习题 1.

例 1.2 设 $J,F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是两个 C^1 函数,

$$F^{-1}(0)\overset{\mathrm{d}}{=\!=}\{x\in\mathbf{R}^n\mid F(x)=0\}\neq\varnothing.$$

我们希望在 $F^{-1}(0)$ 上最小化 $J(\cdot)$,即

$$\text{在条件 } F(x)=0 \text{ 下最小化 } J(x). \tag{1.5}$$

假设 $J(\cdot)$ 满足强制性条件(1.1)(其中 $G=\mathbf{R}$ 用 $G=\mathbf{R}^n$ 代替). 此时,可以证明存在 $\bar{x}\in F^{-1}(0)$ 使得

$$J(\bar{x})=\inf_{x\in F^{-1}(0)}J(x).$$

进一步,如果 $F_x(\bar{x})\neq 0$,则 $\bar{x}$ 满足如下的必要条件:存在 $\lambda\in\mathbf{R}$(λ 称为 **Lagrange 乘子**)满足

$$\begin{cases}J_x(\bar{x})+\lambda F_x(\bar{x})=0,\\ F(\bar{x})=0.\end{cases} \tag{1.6}$$

这样,一旦 $\lambda\neq 0$,我们就有 $J_x(\bar{x})\neq 0$,此时,(1.3)不成立.

下面,我们给出(1.6)的一个证明思路. 由于 $F_x(\bar{x})\neq 0$,它就给出了曲面 $F(x)=0$(即 $F^{-1}(0)$)的一个法向量. 这样,对任何 $v\perp F_x(\bar{x})$,存在 C^1 曲线 $\varphi:[-\varepsilon,\varepsilon]\to F^{-1}(0)$ 使得 $\varphi(0)=\bar{x}$,且 $\dot{\varphi}(0)=v$. 于是,由 $\bar{x}$ 的极小性以及 $\varphi(t)\in F^{-1}(0)$,我们有

$$0\leqslant\frac{1}{\delta}[J(\varphi(\pm\delta))-J(\bar{x})]\to\pm\langle J_x(\bar{x}),v\rangle.$$

因此,对任何 $v\perp F_x(\bar{x})$,都有 $J_x(\bar{x})\perp v$. 由此可得

$$J_x(\bar{x})\in(\{F_x(\bar{x})\}^{\perp})^{\perp}=\mathrm{span}\{F_x(\bar{x})\}, \tag{1.7}$$

其中 $\{A\}^{\perp}$ 和 $\mathrm{span}\{A\}$ 分别表示 A 的**正交补**和由 A 张成的线性空间. 最后,由(1.7)立即得到结论(1.6).

上面的证明是基于几何的思想得到的. 读者可以从一般的数学分析教材中

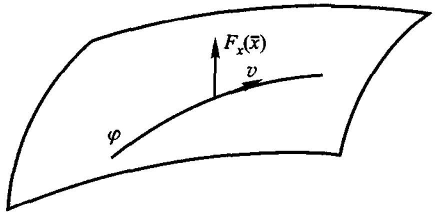

图 1.1

找到基于隐函数存在定理的一个证明.

变分问题

例 1.3 设 $a,b\in\mathbf{R}^2, a\neq b$,则众所周知:

$$\text{连接 } a \text{ 和 } b \text{ 的最短的(光滑)曲线是直线.} \tag{1.8}$$

人们可以从几何的角度证明(1.8).以下,我们从分析的角度来证明结论.

该问题尽管非常简单,但还是包含了许多原始的思想.不失一般性,我们可设 $a=(0,0), b=(1,0)$. 记

$$Y=\{y(\cdot)\in C^1[0,1]\mid y(0)=y(1)=0\},$$

则对任何 $y(\cdot)\in Y$,曲线 $x\mapsto(x,y(x)), x\in[0,1]$的长度为

$$J(y(\cdot))\xlongequal{\mathrm{d}}\int_0^1\sqrt{1+\dot{y}(x)^2}\mathrm{d}x.$$

我们有如下问题

问题(L) 寻找 $\bar{y}(\cdot)\in Y$,使得

$$J(\bar{y}(\cdot))=\inf_{y(\cdot)\in Y}J(y(\cdot)).$$

现在,我们来证明(1.8).令 $\bar{y}(x)\equiv 0$,则 $\bar{y}(\cdot)\in Y$,且对任何 $y(\cdot)\in Y$,有 $\dot{y}(x)^2\geqslant 0$,从而

$$J(\bar{y}(\cdot))=1\leqslant\int_0^1\sqrt{1+\dot{y}(x)^2}\mathrm{d}x=J(y(\cdot)). \tag{1.9}$$

因此,$\bar{y}(\cdot)$ 是问题(L)的一个解,它是直线段.另一方面,易见如果 $y(x)\not\equiv 0$,则在$[0,1]$的某个子区间上,$\dot{y}(x)^2>0$,此时,(1.9)中严格不等式成立.这表明最小值点是惟一的.

例 1.4 (捷线问题)考虑一个铅直平面,在其上建立直角坐标系,纵轴 y 轴指向下方.给定两点$(0,0)$及(a,b)使得 $a>0,b>0$. 令 $y(\cdot)$ 为连接这两个点的一条 C^1 曲线,即 $y(0)=0, y(a)=b$. 一个粒子受重力作用以初速度 0 沿曲线 $y(\cdot)$ 从$(0,0)$点滑向(a,b).我们关心的问题是如何选择 $y(\cdot)$ 使得该粒子从$(0,0)$滑到(a,b)的时间最短.

假设粒子具有质量 m. 用 $s(t)$ 表示该粒子从点 $(0,0)$ 出发后在时间段 $[0,t]$ 内(沿着曲线)走过的路程. 于是 $\dot{s}=v$ 就是粒子的线速度. 由能量守恒定律,我们有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy,$$

其中 y 是粒子离开初始位置的垂直位移. 这样, $v=\sqrt{2gy}$, 从而,

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2gy}}.$$

因此,粒子移动到 (a,b) 所需的时间为

$$t = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\mathrm{d}x \overset{\mathrm{d}}{=\!=} J(y(\cdot)).$$

于是,原始问题就化为在条件 $y(0)=0$ 和 $y(a)=b$ 下,最小化泛函 $J(y(\cdot))$ 的变分问题.

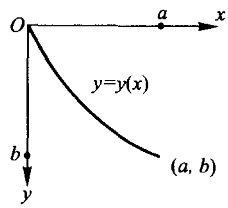

图 1.2

最优控制问题

例 1.5 考虑一部电梯. 假设电梯的总质量为 m, 离地距离为 y. 令 $F(t)$ 为时刻 t 时引擎给予电梯的力. 由 Newton 第二定律,我们有

$$m\ddot{y}(t) = F(t).$$

自然地,我们需要假定电梯引擎的功率是有限的:对于某个 $F_0>0$,

$$|F(t)| \leqslant F_0 \tag{1.10}$$

假设电梯的初始状态是静止在地面 $(y=0)$, 即

$$y(0)=0, \qquad \dot{y}(0)=0.$$

我们希望移动电梯使之在时刻 $t=T$ 停在高度 $y=h$. 这可以表示为

$$y(T)=h, \qquad \dot{y}(T)=0.$$

这里, $t=T$ 是一个未知的时刻. 我们的目的是在最短的时间内到达高度 h. 注意到在没有引擎功率约束的情况下(即当 $F_0=+\infty$ 时), $T>0$ 能够任意地小. 自然