GAILVLUN SIWEILUN

张德然 著

概率论思维论

中国科学技术大学出版社

GAILVLUN SIWEILUN

概率论思维论

概率论思维论

张德然　著

中国科学技术大学出版社
2005·合肥

内容简介

本书以挖掘能力为主线，将概率论的内容和思维科学相融通，从理论和实践的有机结合上，较系统地阐述了概率论思维的特征、结构与基本形式，常用方法及思维策略等。通过典型问题的剖析及解决，让读者充分领略到概率论问题解决的方法与技巧。对于优化思维、发展智力、提高素质无疑会产生较大的作用。

本书可供高等院校本科以上的学生在学习概率论时同步使用，同时对于从事概率论与思维科学研究的科学工作者、高等院校的数学与课程教学论的教师也是一本有价值的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论思维论/张德然著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2004.5
ISBN 7-312-01684-7

Ⅰ. 概… Ⅱ. 张… Ⅲ. 概率论-应用-思维科学 Ⅳ. B80

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 028276 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号,邮编:230026)
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本:787×960/16　印张:11　字数:270 千
2004 年 5 月第 1 版　2005 年 9 月第 2 次印刷
印数:2001—3500 册
ISBN 7-312-01684-7/O·287　定价:20.00 元

序 言

概率论是从数量上研究随机现象统计规律的一门科学，它以特有的思维方式吸引着众多的学者和研究者。最大限度地启迪思维，发展智力，培养能力，提高素质已成为当今传播和发展概率论理论及方法的重要宗旨。中国的大学者朱熹说："读书无疑者，须教有疑，小疑则小进，大疑则大进。"前苏联教育家苏霍姆林斯基也说："一个人到学校上学不仅为了取得一份知识的行囊，而主要是得到多方面的学习能力，学会思考。"思维是知识转化为能力的桥梁，也是更上一层楼的云梯。思维切入适时，启动迅速，转换就能敏捷，推理就会简捷，解决问题的效率就高。一位著名哲学家说过："真正教育的旨趣，在于即使是学生把教给他的所有知识都忘了，但还能使他获得受用终生的东西，那种教育才是最高最好的教育。"对于概率论来说，"终生受用的东西"理当指概率论思想及思维方法，它也是概率论发展的核心及动力。

正是看到这点，作者以概率论实际问题为背景，从理论与实践的结合上，将概率论与思维理论有机融合，把冰冷的美丽变成火热的思考，给人们展示了一幅既有结果又有过程，既要途径又要技巧的绚丽画卷，让人耳目一新，细品则可受益。因为谁都知道这个哲理：只有理解的东西才能更深刻地感觉它，从而才能正确地运用它。

从思维科学的角度去研究概率论，将概率论的内容和思维科学相融通，这是一种新的尝试，作者在此方面大胆地进行实践，不仅反映了他敢于创新的精神，也展示了他较强的业务功底。但任何事物的成长都有一个过程，何况是一门科学呢？建议大家读一读，我相信，他一定会给你带来一些启迪，当然也可能让你发现不足，这并不奇怪，只有二者共存，概率论这门科学才有强大的生存空间和发展动力。只有辩证地对待这二者，才能永握探索随机世界的金钥匙！

这是一种可贵的尝试，这是一个迟到的惊喜！

茆诗松

2004.3.8

前　言

像一切科学一样,概率论也是一门由特定的思想方法组成的学问。在学习这门学科时不少人常常犯惑,缺乏思路,难以下手,有时想好了也表达不清楚,甚至做完题目也不敢说确实做对了,这些都反映了他们尚不习惯概率论独有的思维模式和方法。

现代心理学认为,人的发展包括认知和非认知两方面的协同发展,两种发展又有其发展内核,其中认知的内核是思维,非认知的内核是情感体验。可见,要学好一门科学,掌握思维规律,外加实践体验,二者缺一不可。仅看别人做示范,讲典例,是很难达到“油自钱孔入而钱不湿”那种炉火纯青地步的。作为研究随机现象数量规律的概率论更是如此。

有人曾做了一个实验,将一只跳蚤放进杯中,起初跳蚤能一下子就从杯中跳出来。给杯子盖上透明盖,它仍然会往上跳,但碰了几次盖后,碰疼了,慢慢就不跳那么高了。这时再将盖拿出,却发现那只跳蚤已经永远不能跳出杯子了。因为它将目标定到了不及盖的高度。学习概率论不能仅仅靠掌握了几种方法,而必须根植于思维的肥沃土壤之中,只有这样,才能以概率论的知识为载体,以思维模式及辩证策略为主线,以发展智力培养能力为宗旨,使人不是杯中的跳蚤,而是能冲出有限空间的勇士。针对一个概率问题,才能通过观察→联想→分析→比较→综合→抽象概括→具体化,使之迎刃而解,成为随机世界探秘的能手。基于此,笔者打破知识点+典型例题+自测练习的著书模式,从思维科学与概率论学科的有机结合上,力图尽可能地系统、完整地向读者展示概率论的思维特色。达到看有兴趣,读有启发,不同层次的读者在各自的层面上都能达到应有的提高,从能解决一些问题向能解决更多的问题升华。这是一种新的尝试,由于笔者才学浅薄,这种尝试未必能成功,但我坚信失败同样也会给人以启迪。几分成功,几分遗憾,让实践来验证,让读者作评价,让同行专家来指正吧!

十分感谢茆诗松教授在工作百忙之中认真审阅了本书的初稿,并为本书作序,使其增色不少。同时也感谢始终给予我支持的各位同仁及我的家人,正是他(她)们的关注和鼓励,才使我能在繁忙的教学及科研工作中较快地完成此书的撰写工作。

张德然

2003 年 2 月

目　录

第一章 概 论

第一节 概率论思维及其特征

一、概率论思维的含义

思维是具有意识的人脑对客观事物的本质属性和内部规律性的概括的间接的反映.思维以感知为基础而又超越于感知的界限,是认识过程的高级阶段.思维以场的形式存在,通过复杂的中介和不同的方式进行信息加工,以获得关于客观事物的特性、联系和关系的知识.它既是高级的神经生理活动,也是复杂的心理操作,是一个动态的关联系统①.概率论思维是从属于一般思维的,它是人脑和概率论研究对象交互作用并按照一般思维规律认识概率论内容的内在理性活动.

二、概率论思维的主要特征

从一般思维的特性和概率论的特点这两个方面的结合来分析,就可以得出概率论思维的特征主要是随机性、概括性、问题性、辐射性、指向性和创造性.

(一)概率论思维的随机性

由于概率论是从数量上研究随机现象统计规律的学科,它的思想体系,处理问题的主要方法和结果同大家已经熟悉的研究确定性现象的各个数学分支像代数、几何、数学分析等有着许多不同的特点,因而在研究概率问题时不能完全拘泥于传统的数学思维,而要用随机的目光,透过表面上的偶然,去寻找内部蕴涵着的必然.事实上,只有纯形式化的问题才能有纯粹的、确定的解决,而现实中问题的解决绝大部分都不可能是纯粹的、确定的.像"一个游戏的中奖率是1%,买100张奖一定会中奖吗?""明天是晴天的可能性是70%"等等,其实都是近似的结果,并非精确的结论②.

例 1.1 袋中有 a 个黑球,b 个白球,它们除颜色不同外,其他方面没有差别,现在把球随机地一个个摸出来,求第 k 次摸出的一个球是黑球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

本题可用全概率公式去求解,也可以用概率的古典定义去求解,但利用每个球在各次抽取的随机性,就可抓住刻画欲求概率的事件的本质特点,从中使人领略到化难为易的简捷美,与常规解法迥异的新奇美.

---

① 任樟辉.数学思维论,广西教育出版社,1996年版,第9页.

② 陈嫣,涂荣豹.关于随机性数学意识的培养,数学教育学报,2002,11(2):27—19.

事实上,只考虑第 k 次抽球, $a+b$ 个球中任何一个都有可能在第 k 次被抽到,故样本点总数为 $a+b$,抽到黑球只有 a 种可能,故 $p(A)=\frac{a}{a+b}$.

1887 年,著名的法国数学家贝特朗(J·Betrand)提出并解决了下述问题:"有甲、乙两个候选人参加竞选.假设投票结果甲得 n 票,乙得 m 票,且 $n>m$.按惯例,开票时选票是一张一张地读出的,直至全部选票读完.假定开票时选票的排列是完全随机的,即各种排列方式是等可能的,求在整个开票过程中,甲累计所得票数始终超过乙累计所得票数的概率."

这个问题被称为投票问题.它曾吸引过不少数学家去研究它,产生了许多解法,还被进一步推广到更复杂的情形.这些解法中既有直接的初等解法,也有利用较高深的随机过程知识的近似方法,多种多样,饶有兴趣,颇具启发性.下面仅介绍其中一种简单而典型的方法:

记所求概率为 $p(n,m)$ 按题意立即可知

$$p(n,\ m)=0,\text{当 } n\leqslant m \text{ 时}.$$

我们考虑最后一张选票的情况,由于随机性,它或是甲票(即投甲的票),或是乙票(即投乙的票).前者的概率为 $\frac{n}{n+m}$,后者的概率为 $\frac{m}{n+m}$.除去最后一张选票不考虑,那么整个开票过程只剩下 $n+m-1$ 张选票,但在前一种情况是 $n-1$ 张甲票, m 张乙票,而在后一种情况是 n 张甲票, $m-1$ 张乙票.因此,按全概率公式我们即有下列递推公式:当 $n>m$ 时

$$p(n,m)=\frac{n}{n+m}p(n-1,m)+\frac{m}{n+m}p(n,m-1) \tag{1-1-1}$$

由(1-1-1)式可见,若 $n+m=k$ 时的 $p(n,m)$ 都已知,就能求得 $n+m=k+1$ 时的全部 $p(n,m)$.因此可对 $n+m=k$ 用数学归纳法证明

$$p(n,m)=\frac{n-m}{n+m} \tag{1-1-2}$$

当 $k=1$ 对,显然 $p(1,0)=1$.

设 $n+m=k$ 时(1-1-2)式成立,则 $n+m=k+1$ 时由(1-1-1)式容易算得

$$p(n,m)=\frac{n}{n+m}\cdot\frac{(n-1)-m}{(n-1)+m}+\frac{m}{n+m}\cdot\frac{n-(m-1)}{n+(m-1)}=\frac{n-m}{n+m}.$$

读者自然会问,(1-1-2)式是怎样得到的呢?

确实,这也许是这个解法中的一个难点,而用全概率公式建立递推公式是一种常用的概率方法.通常,只能由(1-1-1)式试算一部分($n+m=1,2,\cdots,$)的 $p(n,m)$,再归纳出(1-1-2)式.

(二)概率论思维的概括性

宇宙之力,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,大千世界,天上人间,无处不有随机因素在起作用.概率论思维的概括性就表现在概率论思维能揭示这些千变万化,杂乱纷纭的事物之间抽象的形式结构和数量关系这些本质特征和规律,能够把握一类事

物共有的数学属性.

概率论思维的概括性还在于它的迁移性,就是使主体不仅能从部分事物相互联系的事实中推知普遍的与必然的联系,而且能将这种联系推广到同类现象中去.概率论中各种各样的概率模型,各种各样的公式、定理无不是概率论思维概括性的表现和迁移的结果.

比如,一个随机现象可以用一个样本空间去描述,但是一个样本空间可以为多种完全不同的随机现象共用.例如

检查一个产品:$\Omega=\{$合格品,不合格品$\}$;

掷一枚硬币:　$\Omega=\{$正面,反面$\}$;

新生婴儿性别:$\Omega=\{$男,女$\}$;

检查一台车床:$\Omega=\{$正常工作,需要维修$\}$;

战士打靶:　　$\Omega=\{$命中,不命中$\}$.

这些都是不同的随机现象,假如我们只注意样本点的随机本质,而不去注意每个样本点的具体属性,那么从数学角度来看,它们的样本空间都是相同的,都只含有两个样本点.这样一来,上述随机现象都可以用一个贝努里试验去模拟.其对应的样本空间可抽象为:$\Omega=\{$成功,失败$\}$.如果,把成功看做是合格品,把失败看做是不合格品,那么做一次贝努里试验就可以看做是检查一个产品.又如,把命中看做成功,把不命中看做失败,那么战士打一次靶就相当于做一次贝努里试验,如此等等.

前述例 1.1 中,我们通过巧妙地构思已得出第 k 次摸出的黑球的概率 $p=\frac{a}{a+b}$,显然此结果与 k 无关,即是说任意一次摸球摸出黑球的概率均为$\frac{a}{a+b}$.那么就可把此规律迁移到相关随机试验中去解决有关的问题,比如:

例 1.2　某人有 n 把不同的钥匙,其中只有一把能打开他的门,他逐把地取出钥匙试开,求第 i 次打开锁的概率,$i=1,2,\cdots,n$

令
$$A_i=\{\text{第 } i \text{ 次试开打开锁}\},\ i=1,2,\cdots,n$$

由例 1.1 的结论,显然有
$$p(A_i)=\frac{1}{n}$$

例 1.3　袋中有 a 黑球,b 个白球,甲、乙、丙三人依次从袋中取出一球(取后不放回)试分别求出三人各自取得白球的概率($b\geqslant 3$)

对于此题,同样可以认为从袋中随机地一个个摸球,分别求第一次,第二次,第三次摸出白球的概率,从而由例 1.1 的结论知三人各自取得白球的概率均为$\frac{b}{a+b}$.

实际上,把例 1.1 的结论迁移到社会生活中去,我们就可以发现这与我们日常生活经验是一致的.例如在体育比赛中进行的抽签,对各队机会均等,与抽签的先后顺序无关等等.

(三)概率论思维的问题性

美国数学家哈尔莫斯指出:定理、证明、概念、定义、理论、公式、方法中的任何一个都不是

数学的心脏,只有问题是数学的心脏.数学科学的起源和发展是由问题引起的.概率论也不例外.它的一切都可以说成是问题的衍生物.所以概率论思维总是指向于概率问题的变换,表现为不断地提出问题,分析问题和解决问题.重视问题的分析,解决、应用、推广是概率论思维问题性的精髓.

例 1.4 袋中有 a 个黑球,b 个白球,把球随机地一个个摸出来(不放回)直至袋中剩下的球颜色都相同为止.求最后剩下的全是黑球的概率.此题看来与例 1.1 对应的试验较相似,都是从装有 $a+b$ 个球的袋中随机一个个摸球,但考虑的结果不同,例 1.1 是要求求第 k 次($1\leqslant k\leqslant a+b$)取到黑球的概率,而此例则是要求当袋中剩下的球颜色都相同时求剩下的全是黑球的概率.由此我们可以这样考虑:

设想摸球直到摸完为止,且令 $A=\{$最后全剩下黑球$\}$,$B=\{$最后摸出的是黑球$\}$,则有

1. $A=B$

2. $P(A)=P(B)=\dfrac{a}{a+b}$,

事实上,如果最后全剩下黑球(A 发生),那么最后摸出的必是黑球(B 发生)所以有 $A\subset B$,反过来,如果最后摸出的是黑球(B 发生),那么最后剩下同颜色的球时必包含这最后一球,所以剩下的必全是黑球(A 发生),所以又有 $B\subset A$,因而有 $A=B$.而事件 B 就是第($a+b$)次摸出黑球,由例 1.1 的结论有 $P(A)=P(B)=\dfrac{a}{a+b}$.

当然此题也可采取其他种问题转换法,譬如化整为零,即先分别计算最后剩下 1 个,2 个,…a 个黑球的概率再相加即可求得所求事件的概率.这是解决概率论问题采用的一般思维方法.除此之外,还有进退互用,数形迁移,化生为熟,正难则反,引参求变,构函变通等使得概率论问题产生变换,从而使得一个个复杂的概率论问题得以解决,概率论的模式得到进一步推广、引申和应用.有惊奇才会有发现;有发现更会有惊奇.一切都那样平淡无奇.发现从何而起?其实,更基本的是发现问题.不善于发现问题,就不可能在发现真理的道路上走多远.①

(四)概率论思维的辐射性.

客观事物的发展总是循序渐进的,相应的概率论的理论和方法也自然形成了一个由浅入深的系列链.而这些链的构成无非是通过联想、类比,归纳和猜想等方法经过思维的辐射而得到的.通过思维辐射,可以巩固旧知识,发现新知识,加深理解概率论知识的内部联系和规律性,提高概率论思维的深刻性,激活思维的连通性和变通性,发展概率论思维的创造性.

比如,在例 1.1 中我们已得出随机抽球所得到任何一种颜色的球的概率与抽取次数 k 无关,为叙述方便,我们不妨把此结果作为引理.

引理 袋中有 a 个白球,b 个黑球,除颜色不同无其他差异,则任意第 k 次抽出白球的概

---

① 张楚廷.教育中什么在妨碍创造,高等教育研究,2002,23(6):1-5.

率均为$\frac{a}{a+b}$.

注:若不放回抽取,则有 $1\leqslant k\leqslant a+b$;

若有放回抽取则有 $1\leqslant k<\infty$.

显然对于上述两种不同的抽取方式,均可用全概率公式证得此结论.

由此我们可以联想到下述问题:

推广 1 两个口袋,每袋中有 a 个白球,b 个黑球,从第一口袋中任取一球放入第二口袋,求在第二口袋中任取一球为白球的概率.

事实上令 $A_i=\{$从第 i 袋中抽得白球$\}$,$B_i=\{$从第 i 袋中抽得黑球$\}$;$i=1,2$,则

由全概率公式知,第二次抽得白球的概率

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)$$

$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}=\frac{a}{a+b}$$

推广 2 三个口袋,每袋中有 a 个白球,b 个黑球,从第一口袋任取一球放入第二个口袋,再从第二个口袋中任取一球放入第三个口袋,求从第三个口袋中任取一球为白球的概率.

事实上,令 $A_i=\{$从第 i 个袋中取得白球$\}$

$B_i=\{$从第 i 个袋中取得黑球$\}$,$i=1,2,3$.

则
$$P(A_3)=P(A_2)P(A_3|A_2)+P(B_2)P(A_3|B_2)$$

$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}=\frac{a}{a+b}$$

推广 3 N 个口袋,每袋中有 a 个白球,b 个黑球,从第一口袋中任取一球放入第二口袋,再从第二口袋中任取一球放入第三口袋,这样一直取下去,直至最后从第 N 中取出一球,则最后取出的球是白球的概率为$\frac{a}{a+b}(N\geqslant 2)$

用数学归纳法证:

当 $N=2$,结论成立(已证)

假设 $N=k$ 对结论成立,则当 $N=k+1$ 时,

有
$$P(A_{k+1})=P(A_k)P(A_{k+1}|A_k)+P(B_k)P(A_{k+1}|B_k)$$

$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}=\frac{a}{a+b}$$

结论成立.

由此得到,对于这样一类抽球问题,无论是一个袋,还是 n 个袋,也不论是那一次抽取,抽得某一颜色球的概率总等于初始抽球时袋中此种球所占比重.

类似于这样推广是很有价值的,因为实际生活中很多问题都可以归纳为或划归为该命题所考虑的情况.

没有知识的积累就没有灵感,没有巧妙的思维也没有创新.事实上,概率论理论的延伸和

问题的解决,就是一连串问题交映辐射推波逐浪由此及彼的结果.比如概率概念的形成与发展其过程为:

概率的直观定义(度量一个事件发生可能性大小的量)→概率的统计定义(大量重复试验中事件发生频率稳定的中心值)→概率的古典意义($P(A)=\frac{m}{n}$,其中 n 为样本点总数,m 为 A 所包含的样本点数)→概率的几何定义($P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}$,其中 L 为有限测度)→概率的公理化定义(概率是定义在 σ 一代数 $\mathscr{F}$ 上的一个非负的,规范的,具有可列可加的集函数),这种通过辐射从量的分析到质的抽象,不仅让人们认清了概率的本质所在,而且也为概率论成为一门严谨的学科奠定了坚实的理论基础.又如从古典概型→几何概型→贝努里概型,从事件→一维随机变量→多维随机变量→随机变量的函数等,无不是遵循从个别到一般,从具体到抽象,从简单到复杂的规律,抓住已知和未知之间的联系,新旧知识之间的联系,使"静"态知识内化到"动"态的概率论思考中去思考和认识的结果.在概率论中,可以这样说,没有思维的辐射,就没有知识的积累,就没有创新,更不会有学科的发展.

(五)概率论思维的指向性

概率论思维总是伴随某一问题情境产生的,它是由人的内部环境和外部刺激相互作用而共同组成的一种意识环境系统,也是一种由若干变动因素构成的空间动力系统.其中包括思维者所处的内部环境(知识、经验)和外部环境(问题情景),以及内外环境相互作用产生的思维渴求和能力水平①.尽管思维场情景最中充满问题解决的诸多"算子"和策略,而这些"算子"和策略也可以纵横交错地发散,从不同角度沿不同的方向进行延伸,但最终总是指向某一具体目标即概率论中的有关定理,公式及有关问题的结论.既包括同向性,也包括批判性.正是由于概率论思维的指向性,才能使人们产生对概率论的研究不懈追求的强烈愿望和具大动力.

(六)概率论思维的创造性

创造性人才=创造性思维+创造性人格.创造性是人类思维的高级形态,是人类智力能力的最集中的表现.创造性学习擅长新奇、灵活而高效的学习方法,具有创造性活动的学习动机,追求创造性学习的目标.春秋时,楚国大臣伍子胥的父亲和哥哥,都被楚平王杀害了.伍子胥逃到吴国,发誓要为父兄报仇.后来,伍子胥率领吴军攻破楚国首都郢.那时,楚平王已经死了,伍子胥还不肯罢休,他挖出楚平王的尸体,狠狠地鞭打了三百下,总算解了心中之恨.他的好朋友申包胥看到伍小胥为报私仇而把自己的祖国灭了,还要在死人身上出气,就派人去对他说:"你还是楚国人,你太过分了!"伍子胥对来人说:"我已经老了,日子有限,我急于报仇,没有别的办法,只好做这样违背常理的事!"这里我们且不去评价谁是谁非,但却说明了这样一个道理,人一旦有了追求,就会产生一股强大的内力,这样内力将激励他勇于探索,除旧布新.

在思维意识的清晰性上,创造性是分析思维和直觉思维的统一.在创造性思维的形式上,

① 朱德全,宋乃庆.中学数学教学中思维均情景的表征及其创设策略,课程·教材·教法,1997 年第 4 期:17~19.

它是发散思维与辐合思维的统一.正如一些心理学家所指出的:"在创造性中,发散因素和辐合因素的结合是和归纳推理对演绎推理或推论形式中的所谓两分法相类似的."概率论与社会生活,生产实际等诸方面存在千丝万缕的联系,问题解决是创新的土壤,对任一问题只要进行多层次、多方位、多视角地去观察分析和思考,小中见大,透过现象看本质,通过探因索果,正反对比,逆向思维,突破思维定势等途径和方法,提出创新性的问题,再通过创造性思维的连动性及大幅度的跨越性,最终就能实现创造目的.事实上建立概率模型也属于创造性思维的范畴,通过观察、猜想,把表面的问题深层化,深刻化,使众多的实例转化成模型,这同样是一种创造.另一方面,概率论的理论和方法向各个基础学科渗透是近代科学技术发展的特征之一,此举也使得相关学科的一些传统解决问题的方法旧貌换新颜,从而展示出了除理论创造外的另一种创造——方法上的创造.

例 1.5 证明 $1+\dfrac{A-a}{A-1}+\dfrac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)}+\cdots+\dfrac{(A-a)\cdots 2\cdot 1}{(A-1)\cdots(a+1)a}=\dfrac{A}{a}$

证明 构造概率模型如下:

设一口袋中有 A 个球,其中有 a 个白球,任意连续取球(不放回),求迟早取到白球的概率.

设第 k 次取到白球的	总可能数	有利场合数
1	A	a
2	$A(A-1)$	$(A-a)a$
3	$A(A-1)(A-2)$	$(A-a)(A-a-1)a$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A-a+1$	$A(A-1)\cdots(a+1)a$	$(A-a)(A-a-1)\cdots 2.1.a$

因取第 $A-a+1$ 次时必取得白球,则有

$$\frac{a}{A}+\frac{(A-a)a}{A(A-1)}+\frac{(A-a)(A-a-1)a}{A(A-1)(A-2)}+\cdots+\frac{(A-a)\cdots 2\cdot 1\cdot a}{A(A-1)\cdots(a+1)a}=1$$

将上式两端同乘以$\dfrac{A}{a}$,得

$$1+\frac{A-a}{A-1}+\frac{(A-a)(A-a+1)}{(A-1)(A-2)}+\cdots+\frac{(A-a)\cdots 2\cdot 1}{A(A-1)\cdots(a+1)a}=\frac{A}{a}$$

例 1.6 用概率方法证明维尔斯特拉斯定理:

设 $f(x)$为闭区间$[a,b]$上任一连续函数,则存在多项式序列 $N_n(x)(n=1,2,\cdots)$于$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$,

证明 不失一般性,我们在闭区间[0,1]上证明上述结论.

令
$$N_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

显然有,$N_n(0)=f(0)$,$N_n(1)=f(1)$.因此,当 $x=0$ 或者 $x=1$ 的收敛问题已解决.现仅需考虑 $x\in(0,1)$时的情形.

考虑贝努里概型如下：

设在每次试验中事件 A 发生概率均为某一固定值 $x(0<x<1)$，μ_n 为 n 次试验中事件 A 发生的次数，则有 $P\{\mu_n=k\}=C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$. 因此

$$E\left[f\left(\frac{\mu_n}{n}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$E\left[f(x)-f(\frac{\mu_n}{n})\right]=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\left[f(x)-f(\frac{k}{n})\right]$$

$$=f(x)-N_n(x)$$

另一方面，由全数学期望公式，得

$$E\left[f(x)-f\left(\frac{\mu_n}{n}\right)\right]=P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-x\right|<\delta\right\}\cdot E\left\{\left[f(x)-f\left(\frac{\mu_n}{n}\right)\right]\Big/\left[\left|\frac{\mu_n}{n}-x\right|<\delta\right]\right\}$$
$$+P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-x\right|\geqslant\delta\right\}\cdot E\left\{\left[f(x)-f\left(\frac{\mu_n}{n}\right)\right]\Big/\left[\left|\frac{\mu_n}{n}-x\right|\geqslant\delta\right]\right\}$$

其中 $\delta>0$ 用如下方法选定：对任意 $\varepsilon>0$，由于 $f(x)$ 是连续函数，所以存在 $\delta>0$，使当 $|x-y|<\delta$ 时，

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}，其中\ x,y\in(0,1)$$

令

$$M=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|,$$

则

$$|f(x)-N_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-x\right|\geqslant\delta\right\}\cdot 2M$$

由贝努里大数定律知上式右端第二项中

$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{\mu_n}{n}-x|\geqslant\delta\}=0$，对 $x\in(0,1)$ 一致成立. 从而对于 $x\in[0,1]$ 一致地有 $\lim\limits_{n\to\infty}N_n(x)=f(x)$.

事实上，思维场情景实际上是由问题构成的，而问题又包括常规性问题和创造性问题，但常规性问题与创造性问题的差别是相对的. 我们可以把这两类问题设想为一个连续体的两端，其间则有常规性或创造性的连续变化，但这种连续变化中包含着问题解决的突发性. 即条件一旦成熟或充分，必将发生质的突变，产生预定的效果①

第二节　概率论思维中的辩证效应

概率论的知识内容中蕴含着丰富的辩证哲理，与之相适应的概率论思维同样也受到了辩证法科学因素的影响，并在解决问题的过程中发挥着十分重要的作用.

---

① 朱德全，宋乃庆. 中学数学教学中思维场情景的表征及其创设策略，课程·教材·教法，1997 年第 4 期：17～19.

一、必然寓于偶然之中

随机性是概率论思维的主要特征之一.恩格斯指出:“在表面偶然性起作用的地方,这种偶然性始终是受内部隐蔽的规律支配的.而我们的问题是在于发现这些规律.”概率论理论是关于偶然世界的规律性.它所研究的随机现象是偶然的,但又有一定的规律性,偶然中蕴涵着必然.概率论研究目的正是从偶然性中探求必然性,从混沌中寻找有序.

二、变与不变的辩证统一

概率论是一门不确定性数学,虽然它与高等代数,数学分析等一些确定性数学有很多差异,但也常会出现“你中有我,我中有你”,所以在概率论思维中常常会体现出变与不变的辩证统一.比如,从确定的二次函数 $ax(1-x)$ 通过迭代可以产生随机现象,同样,对于常用的无理数 π,它虽是确定的,但我们通过“蒲丰抛针”的随机试验求出其近似值.就是概率论自身理论的发展及问题的解决,也同样体现出这种变与不变的辩证统一.

一个事件发生的概率是事件本身所固有的不随人们主观意愿而改变的一种属性,事件的这样属性正是可以对事件发生的可能性大小进行度量的客观基础,它是一个固定值.而相应的事件的频率却是一个与试验次数有关的一组来回振荡的数,由于试验次数增大时,事件发生频率与概率有显著差异出现的机会非常小,并且随着试验次数的增加,这种机会越来越小,所以当试验次数充分大时,概率可以用频率近似代替.在古典概型中,若一袋中装有 10 个大小形状完全相同的球,其中 1～3 号是白球,4～10 号是红球,用 A 表示从袋中任摸一球是红球的事件,则 $P(A)=\frac{7}{10}$.在这里“静态”地讲,$\frac{7}{10}$是袋中红球所占比例数,是不变数,“动态”地讲,$\frac{7}{10}$是从袋中任取一球是红球的概率为$\frac{7}{10}$.在基础概率中,我们总针对某一具体的随机试验,考虑某一孤立事件的概率,引入随机变量后,随着它的取值的变化它将把所有事件都表述出来了.因而随机变量的概率分布全面地描述了随机试验的统计规律.从而使概率论从计算孤立事件的概率走向了更高的理论体系.

当然,为了处理问题的方便,我们也常有把对随机变量的研究转化为对随机事件的研究,比如:

设随机变量 ξ 与 η 都只取两个数值,则 ξ 与 η 不相关时,ξ 与 η 独立.

事实上,不妨设 ξ 与 η 的取值分别为 $0,b_1$ 与 $0,b_2$,因为 ξ 与 η 不相关,所以有 $E\xi\eta=E\xi\cdot E\eta$,由 $E\xi=b_1\cdot P(\xi=b_1)$,$E\eta=b_2\cdot P(\eta=b_2)$,$E\xi\eta=b_1b_2P(\xi=b_1,\eta=b_2)$可知,随机事件 $A=(\xi=b_1)$与 $B=(\eta=b_2)$相互独立,从而 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都相互独立,故 ξ 与 η 相互独立.

三、无限与有限的相互转换

无限与有限的相互转换在数学分析等有关确定性数学学科中的思维中经常出现,同样,在作为非确定数学之一的概率论的思维中也不例外.

例 1.7 任取一正整数,求该数的平方的个位数是 1 的概率.