KLXJH

快乐学几何

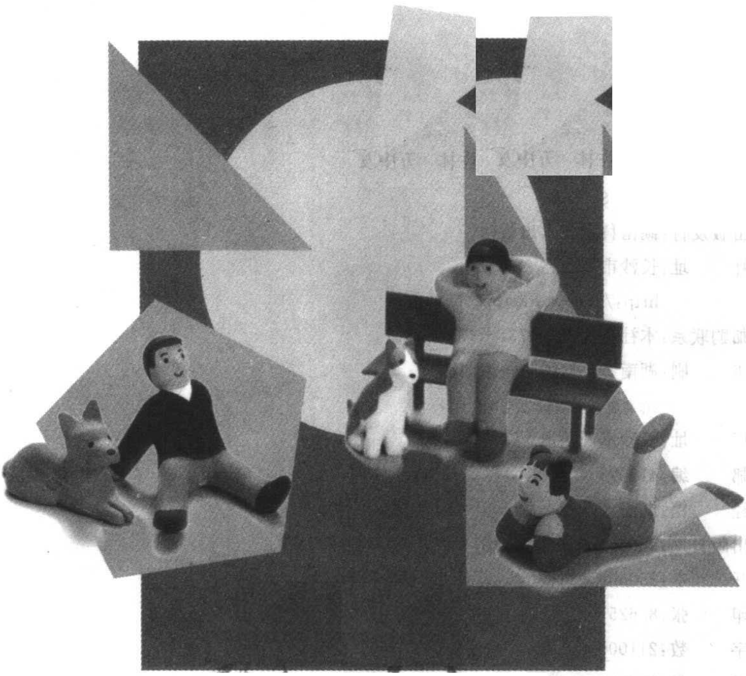
——平面几何解题的模型法

高培旺 贺建明 李柱林 万中友 编著

湖南科学技术出版社

快乐学几何

——平面几何解题的模型法



高培旺 贺建明 李柱林 万中友 编著

湖南科学技术出版社

快乐学几何

——平面几何解题的模型法

编　　著：高培旺　贺建明　李柱林　万中友
责任编辑：沙一飞
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路 280 号
　　　　　http://www.hnstp.com
邮购联系：本社直销科　0731－4375808
印　　刷：湖南省长沙国防科大印刷厂
　　　　　（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：长沙市砚瓦池正街 47 号
邮　　编：410073
经　　销：湖南省新华书店
出版日期：2002 年 6 月第 1 版第 1 次
开　　本：850mm×1168mm　1/32
印　　张：8.625
字　　数：211000
书　　号：ISBN 7-5357-3473-1/O·197
套　　价：15.00 元

前　言

平面几何是初等数学的重要组成部分,其问题变化多端,往往使人困惑难"解",对平面几何的初学者尤其如此。这涉及如何寻找一个思考点,应用平面几何或其他学科中相应的公理、定理和推论等性质等作为推理过渡的"桥梁",通过适当的逻辑推理,从已知条件顺利过渡到待求结果。本书作者通过多年的教学实践和不断的探索研究,总结出一套非常适用的求解平面几何问题的思维方法。这套方法把平面几何中众多的定义、公理、定理和推论等归结到相应的直观生动的具有某些"特殊性质"的基本几何模型中。于是,对一般的平面几何问题,从已知或待求的有关点、线、图的某些特殊关系出发,只要找到或构造出相应的基本模型,问题都能顺利解决,一些问题因使用某些适当的模型还能得到非常简单的解答过程。这种模型思维法是一种有目的(从有限的基本模型中寻找或构造与问题已知或待求的某些特殊关系相应的模型,不是无的放矢)的发散思维,更是一种轻松快乐的思维方法。

书中荟萃了大量各种类型的平面几何问题,它们本就是国内外的中考题、竞赛题、中考模拟题和典型题。因而本书可作为中学生复习备考、参加竞赛的一种有力的辅助工具,同时也为平面几何研究者和爱好者互相切磋和交流提供了一份参考资料。

目　录

第一章 平面几何模型简述

平面几何是初等数学的重要组成部分,解答平面几何问题是培养人的逻辑推理能力、发展创造性思维能力的最好方式之一.初学者有时感觉平面几何问题很"难"解答,不知从何入手,这是很正常的.随着我们所具有的平面几何知识的不断丰富,接触的问题类型越来越多,再加上正确的思维方法和灵活的解题技巧,解决问题的能力自然而然就会得到提高和加强.

本书从一个新的认识角度对平面几何问题进行了一次归类,阐述了一种轻松快乐的思维方法和解题技巧.即根据问题已知条件或待证结论中的某些特殊关系,寻找(图中已有的)或构造(图中未有的)相应的基本模型,然后应用模型所具有的"特殊性质"作为推理求解的"桥梁".

平面几何的解题模型包括基本几何模型和非几何模型.所谓基本几何模型就是一些基本图形或其简单组合,如相交线、平行线、角平分线、中线、中位线、三角形、四边形(包括梯形、平行四边形、矩形、菱形、正方形)、圆等及其组合所产生的一些简单图形,也可看成是从某些特殊点(如中点)、线(如相交线、平行线)、图(如三角形、四边形、圆)出发构成的图形,因而都具有某些"特殊性质",这些特殊性质就是由平面几何中众多的定义、公理、定理、推论和公式等描述的.通过基本几何模型,我们可以推

证线段、角、面积等的垂直、平行、相等、倍分或比例(等积)以及其他关系.非几何模型就是泛指基本几何模型之外的具有与某些几何性质相对应的非几何关系(如代数、函数、向量、复数等)的模型.通过非几何模型,我们可以把几何问题的求解转化为其他非几何量的运算和比较,达到化难为易的目的.本书主要讨论基本几何模型的应用.

寻找或构造基本几何模型推理的思维方法,其解题要(特)点和注意事项归纳如下:

1. 平面几何中众多的定义、公理、定理、推论和公式等都归结到相应的基本几何模型中,直观生动,易记易用.寻找或构造基本模型的目的就是利用其固有的由相应的定义、公理、定理、推论和公式等组成的特殊性质推理解题.

2. 应用基本几何模型的思维方法,我们可以把众多的平面几何问题按不同的基本模型进行归类.这样,可以取得化(题)多为少,(解题)思路清晰自然的效果.

3. 问题的已知条件或待证结论中给出的某些点、线、图所具有的特殊关系,是我们构造基本几何模型的基础.模型思维方法在这里有“章”可循.

4. 在一个问题中,由问题的条件或结论找到或构造出的基本模型,仅仅是题图(整体)中的一部分.正是这些局部的模型所具有的特殊性质,架起了从已知条件过渡到待证结论的“桥梁”.因此,只要我们充分利用这些基本模型所具有的特殊性质(指这些“桥梁”的架设位置)适当推理下去,最终定能达到我们的目的,得到所求的结果.

5. 本书的编排是按基本模型的分类进行的,因而与模型有关的公理、定理、推论等性质的叙述顺序与教材不完全一致.如果你在解题时,联系到某些性质,可从相应的模型中阅读寻找,如此也可加深对基本模型的认识.

6. 在本书中,同一基本模型有可能出现在不同的章节里,

如有关相交线、平行线和多边形等的模型中都包含了平行四边形模型，这是因为同一模型的来源（由相交线、平行线、多边形等产生）各异，应用于解题的前提也不尽相同，因而我们把它们当作不同的模型使用．于是，在有些问题中，从不同的条件或结论入手，从不同的特殊点、线、图出发，可以构造同一种基本几何模型求解且都是可行的（见例题 1.1）；也可以构造不同的基本模型推理（见例题 1.2）．其中有可能遇到某些找到或构造的基本模型不恰当、不可行的情形，我们必须及时舍弃．总之，我们应该尽量探索一题多解．如此，我们不仅可以拓宽自己的思维视野，熟悉模型思维方法和技巧，而且还可选择更好的解题模型，丰富解题的经验．值得指出的是，本书的大部分例题只提供了一种解题方法，感兴趣的读者可以尝试寻找或构造其他模型求解．

［例题 1.1］　$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 为 BC 边上的高，AD 的中点为 M，CM 的延长线交 AB 于 K．求证：$AB=3AK$．

［分析一］　过 B 作 $BE\parallel KC$ 交 AD 的延长线于 E，如图 1.1(a)，构造有关平行线的“相似三角形或线段成比例模型”．

［证明］　过 B 作 $BE\parallel KC$ 交 AD 的延长线于 E，如图1.1(a)．则有

$\angle BED=\angle CMD$，$\angle DBE=\angle DCM$，

又　$AB=AC$，AD 为 BC 边上的高，

所以　$BD=CD$．

所以　$\triangle BDE\cong\triangle CDM$．

$$DE=DM=AM=\frac{1}{3}AE.$$

故　$\dfrac{AK}{AB}=\dfrac{AM}{AE}=\dfrac{1}{3}$．

即　$AB=3AK$．

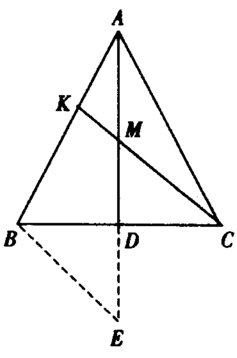


图 1.1(a)

［分析二］　过 B 作 $BE\parallel AD$ 交 CK 的延长线于 E，如图 1.1(b)，构造有关平行线的“相似三角形或线段成比例模型”．则

有 $AM=DM=\frac{1}{2}BE$，$\frac{AK}{BK}=\frac{AM}{BE}=\frac{1}{2}$.

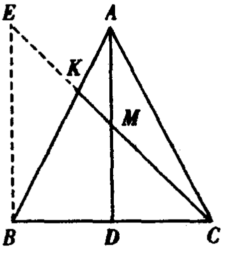


图 1.1(b)

[分析三] 过 A 作 $AE/\!/BC$ 交 CK 的延长线于 E，如图 1.1(c)，构造有关平行线的"相似三角形或线段成比例模型".则有 $\triangle AME\cong\triangle DMC$，$AE=DC=\frac{1}{2}BC$，$\frac{AK}{BK}=\frac{AE}{BC}=\frac{1}{2}$.

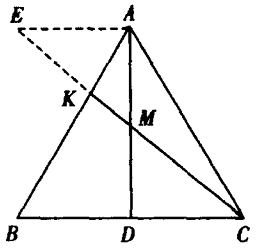


图 1.1(c)

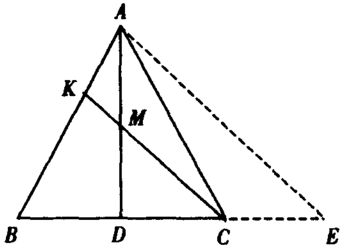


图 1.1(d)

[分析四] 过 A 作 $AE/\!/KC$ 交 BC 的延长线于 E，如图 1.1(d)，构造有关平行线的"相似三角形或线段成比例模型".则有 $EC=DC=\frac{1}{2}BC$，$\frac{AK}{BK}=\frac{EC}{BC}=\frac{1}{2}$.

[分析五] 过 D 作 $DE/\!/KC$ 交 AB 于 E，如图 1.1(e)，构造有关平行线的"相似三角形或线段成比例模型".则有

$AK=KE=EB=\frac{1}{3}AB$.

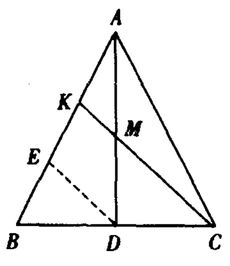


图 1.1(e)

[分析六] 过 D 作 $DE/\!/AB$ 交 CK 于 E，如图 1.1(f)，构造有关平行线的"相似三角形或线段成比例模型".则有

$\triangle AMK \cong \triangle DME$，$\dfrac{AK}{BK}=\dfrac{DE}{BK}=\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{1}{2}$.

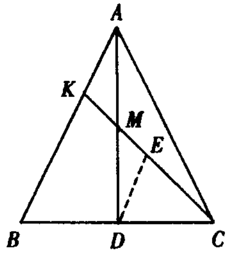


图 1.1(f)

[分析七]　过 C 作 $CE /\!/ AB$ 交 AD 的延长线于 E，如图 1.1(g)，构造有关平行线的“相似三角形或线段成比例模型”. 则有 $\triangle ABD \cong \triangle ECD$，从而得到 $AD=ED=2AM$，$AB=EC$，$\dfrac{AK}{AB}=\dfrac{AK}{EC}=\dfrac{AM}{ME}=\dfrac{1}{3}$.

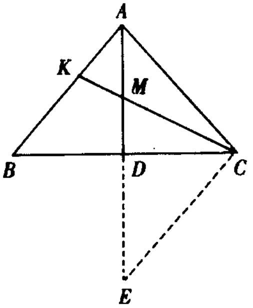


图 1.1(g)

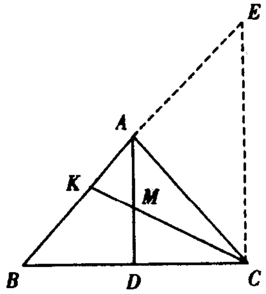


图 1.1(h)

[分析八]　过 C 作 $CE /\!/ AD$ 交 BA 的延长线于 E，如图 1.1(h)，构造有关平行线的“相似三角形或线段成比例模型”. 则有 $AB=AE$，$AD=\dfrac{1}{2}EC$，$\dfrac{AK}{AK+AB}=\dfrac{AM}{EC}=\dfrac{1}{4}$.

[分析九]　过 K 作 $KE /\!/ AD$ 交 BC 于 E，如图 1.1(i)，构造有关平行线的“相似三角形或线段成比例模型”. 则有

$$1-\frac{AK}{AB}=\frac{BK}{AB}=\frac{KE}{AD}=\frac{1}{2}\ \frac{KE}{MD}=\frac{1}{2}\ \frac{CE}{CD}=$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{DE}{CD}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{DE}{DB}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{AK}{AB}\right),$$

从而可得

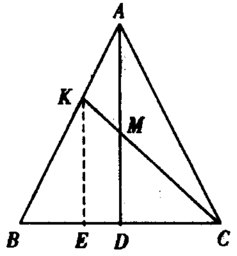


图 1.1(i)

$$\frac{AK}{AB}=\frac{1}{3}.$$

[分析十] 过 K 作 $KE /\!/ BC$ 交 AD 于 E,如图 1.1(j),构造有关平行线的“相似三角形或线段成比例模型”.则有 $\frac{AK}{AB}=\frac{KE}{BD}=\frac{KE}{CD}=\frac{ME}{MD}=1-\frac{AE}{AM}=1-2\,\frac{AE}{AD}=1-2\,\frac{AK}{AB}$,从而可得

$$\frac{AK}{AB}=\frac{1}{3}.$$

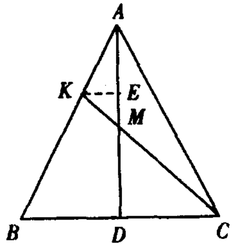


图 1.1(j)

[分析十一] 过 M 作 $ME /\!/ AB$ 交 BC 于 E,如图 1.1(k),构造有关平行线的“相似三角形或线段成比例模型”.则有 $DE=BE=\frac{1}{2}BD$, $ME=\frac{1}{2}AB$, $\frac{KB}{AB}=\frac{1}{2}\,\frac{KB}{ME}=\frac{1}{2}\,\frac{BC}{EC}=\frac{2}{3}$.

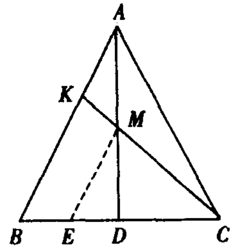


图 1.1(k)

[分析十二] 过 M 作 $ME /\!/ CB$ 交 AB 于 E,如图 1.1(l),构造有关平行线的“相似三角形或线段成比例模型”.则有 $AB=2EB$, $EM=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{4}BC$,从而可得

$$\frac{AB}{KB}=\frac{2EB}{KB}=2\left(1-\frac{KE}{KB}\right)=2\left(1-\frac{EM}{BC}\right)=\frac{3}{2}.$$

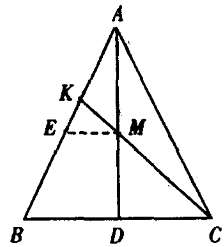


图 1.1(l)

[例题 1.2] A、C 分别在直线 MN 的两旁, $AB\perp MN$ 于 B, $CD\perp MN$ 于 D, O 是 AC 的中点.求证: $OB=OD$.

[分析一] 从直线 AC 与 BO 相交于 O 出发,延长 BO 交直线 CD 于 E,如图 1.2(a),尝试构造有关相交线的“全等三角形模型”求证.

[证明] 延长 BO 交直线 CD 于 E,如图 1.2(a),则有

$\angle AOB=\angle COE$.

又　O 是 AC 的中点,

所以　$OA=OC$.

又　$AB\perp MN, CD\perp MN$,

所以　$AB/\!/CD$,

$\angle OAB=\angle OCE$.

所以　$\triangle AOB\cong\triangle COE$,

$OB=OE$.

即　OD 是 Rt $\triangle BDE$ 斜边上的中线,有 $OD=OE$.

所以　$OB=OD$.

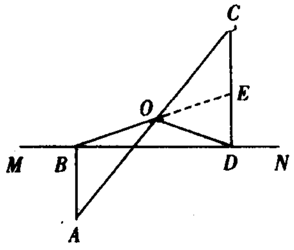


图 1.2(a)

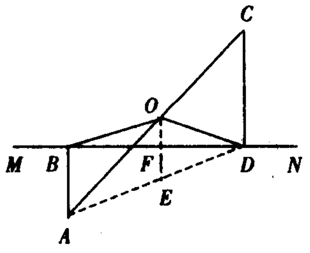


图 1.2(b)

[分析二]　根据 O 是 AC 的中点,连结 AD 并取其中点 E,再连结 OE 交 MN 于 F,如图 1.2(b),尝试构造有关中点的“三角形中位线模型”.则有 $OE/\!/CD/\!/AB\Rightarrow OF\perp BD, BF=DF$.

[分析三]　由 O 是 AC 的中点,过 A 作 $AE/\!/MN$ 交直线 CD 的延长线于 E,连结 OE,如图 1.2(c),尝试构造有关中点的“直角三角形斜边上的中线模型”.则有 $OE=OA,\angle OEA=\angle OAE\Rightarrow\angle OED=\angle OAB, DE=BA,\triangle AOB\cong\triangle EOD$.

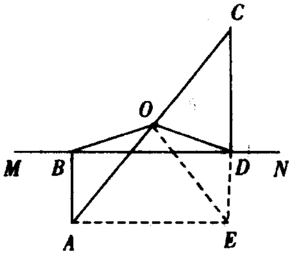


图 1.2(c)

[分析四] 过 O 作 $EF /\!/ MN$ 分别交直线 AB、CD 的延长线于 E、F,如图 1.2(d),尝试构造有关平行线的“矩形模型”.则有 $BE=DF$,$\triangle AOE \cong \triangle COF \Rightarrow OE=OF$,$\mathrm{Rt}\triangle BOE \cong \mathrm{Rt}\triangle DOF$.

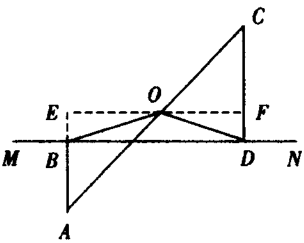


图 1.2(d)

7. 大部分问题都需要同时寻找或构造几个相同或不同的基本模型,把它们放在推理过程的适当位置,通过它们的特殊性质与已知条件的逻辑传递才能求解(见例题 1.3).因此,本书在对问题归类时,按照对题中某个(些)条件或结论的特征分析,往往将其归于一个相应的主要基本模型之下.

[例题 1.3] 已知 P 为 $\triangle ABC$ 内一点,$\angle PAC=\angle PBC$,由 P 作 BC,CA 的垂线,垂足分别是 L,M,设 D 为 AB 中点,如图 1.3. 求证:$DM=DL$.(第一届数学奥林匹克国家集训队培训题)

[分析] 在 $\mathrm{Rt}\triangle AMP$ 和 $\triangle ABP$ 的公共边 AP 上取中点 E,连结 ME、DE,同时构造有关中点的“直角三角形斜边上的中线模型”和“三角形的中位线模型”;同理,在 BP 上取中点 F,连结 LF、DF,同时构造有关中点的“直角三角形斜边上的中线模型”和“三角形的中位线模型”.四个模型结合起来,利用它们的特殊性质与题中的已知条件进行适当的逻辑传递,便可推出所求的结论.

[证明] 取 AP 的中点 E,连结 ME、DE,再取 BP 的中点 F,连结 LF、DF,如图 1.3.

因为 $PM \perp AC$,D 为 AB 中点,

故 $ME=PE=AE$,

$$DE /\!/ BP,\ DE=\frac{1}{2}BP=PF,$$

所以　$\angle PAC = \angle AME$.

同理,得　$LF = PF = BF$.

$$DF \parallel AP, DF = \frac{1}{2}AP = PE,$$

$$\angle PBC = \angle BLF,$$

所以　$ME = DF, DE = LF$,

四边形 $DFPE$ 是平行四边形,

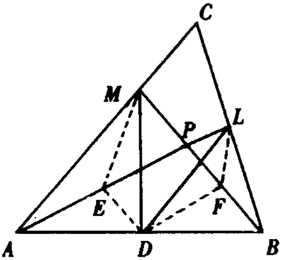


图 1.3

$$\angle PED = \angle PFD.$$

又　$\angle PEM = \angle PAC + \angle AME = 2\angle PAC$,

$$\angle PFL = \angle PBC + \angle BLF = 2\angle PBC,$$

$$\angle PAC = \angle PBC,$$

所以　$\angle PEM = \angle PFL$.

所以　$\angle PED + \angle PEM = \angle PFD + \angle PFL$.

即　$\angle DEM = \angle LFD$.

所以　$\triangle DEM \cong \triangle LFD$,

$$DM = DL.$$

8. 平面几何问题浩如烟海,通过模型思维法我们可以将其分门别类.另外,本书阐述的一些基本模型包含了从一般到特殊的变化过程及相对运动过程中产生的一系列不同状态的情形.比如:

(1) 某些“三角形模型”中,包含了从一般三角形→等腰(直角)三角形→等边三角形的变化状态;

(2) 某些“圆与圆位置关系的模型”,体现了圆与圆相对运动过程中产生的外离→外切→相交→内切→包含等一系列不同状态.

与上述运动变化过程相对应,有时一个问题往往可以演变成一系列问题,但它们都可以归结到同一个(类)模型中求解(见例题 1.4(a)～1.4(h)).注意到这点,我们便可以举一反三,达到

事半功倍的效果.

[例题 1.4(a)] 已知两圆相交于 A、B 两点,过 A 点的直线分别交两圆于 C、D,BE 为大圆的弦,交小圆于 F,如图 1.4(a).求证:$CE /\!/ DF$.

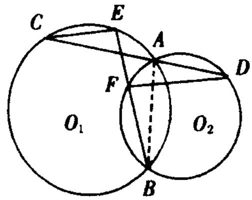


图 1.4(a)

[分析一] 这是第九章的例题 9.11(注:大、小圆位置互换了一下),连结 AB,可构造等圆周角模型进行角的相等转换,证明过程参考例题 9.11.

现在,我们把圆与直线的位置关系进行变动,就可得到一系列问题.

[例题 1.4(b)] 已知两圆相交于 A、B 两点,过 A 点的直线分别交大、小两圆于 C、D,BC 交小圆于 F,CT 是大圆的切线,如图 1.4(b).求证:$CT /\!/ DF$.

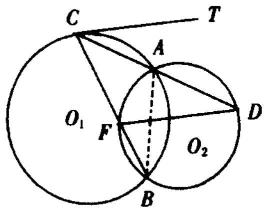


图 1.4(b)

[分析二] 当弦 CE 变为圆的切线时,便得到此题.同理,连结 AB,可构造等圆周角和弦切角模型进行角的相等转换.

[例题 1.4(c)] 已知两圆相交于 A、B 两点,过 A 点的直线分别交大、小两圆于 C、D,过 B 点的直线分别交大、小两圆于 E、F,且 $EF /\!/ CD$,如图 1.4(c).求证:$CE /\!/ DF$ 且 $CE = DF$.(山西省 1998 年中考试题)

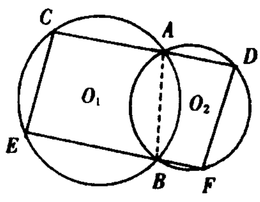


图 1.4(c)

[分析三] 当弦 EB 的延长线与小圆相交且平行 CA 时,便得到此题.同理,连结 AB,可构造圆内接四边形模型推导圆周角之间的关系.

[例题 1.4(d)] 已知两圆相交于 A、B 点,过 A 点的直线分别交两圆于 C、D,BE 为大圆的弦且平分线段 CD 于 G,交小

圆于 F，如图1.4(d)．求证：$EG=FG$．

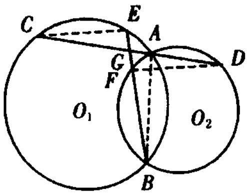


图 1.4(d)

[**分析四**]　仿照例题 1.4(a)，连结 AB、CE、DF，构造等圆周角模型进行角的相等转换，再证明 $\triangle CEG \cong \triangle DFG$．

[**例题 1.4(e)**]　已知两等圆相交于 A、B 点，过 A 点的直线分别交两圆于 C、D，弦 BE 垂直线段 CD 于 G，且交另一圆于 F，如图1.4(e)．求证：$CG=DG$．

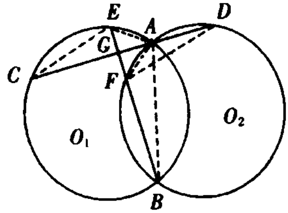


图 1.4(e)

[**分析五**]　仿照例题 1.4(a)，连结 AB、CE、DF，构造等圆周角模型进行角的相等转换，得到 $AE=AF$，$EG=FG$，再证明 $\triangle CEG \cong \triangle DFG$．

[**例题 1.4(f)**]　已知两圆相交于 A、B 点，过 A 点的直线分别交两圆于 C、D，BE 为大圆的弦且与小圆相切，如图 1.4(f)．求证：$CE \parallel DB$．

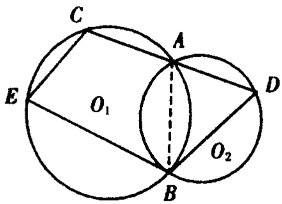


图 1.4(f)

[**分析六**]　当弦 BF 变为小圆的切线时，便得到此题．同理，连结 AB，可构造等圆周角和弦切角模型进行角的相等转换．

[**例题 1.4(g)**]　已知两圆相交于 A、B 点，AD 为小圆的弦且与大圆相切，BE 为大圆的弦且与小圆相切，如图 1.4(g)．求证：$AE \parallel DB$．

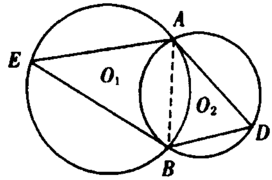


图 1.4(g)

[**分析七**]　当上题中的弦 AC 也变为大圆的切线时，便得到此题．同理，连结 AB，可构造等圆周角和弦切角模型进行角的相等转换，推出 $\angle E+\angle DBE=\angle BAD+\angle DBA+\angle ADB=180°$．

[例题 1.4(h)] 已知两圆相交于 A、B 点，AC、BE 为大圆的弦且都与小圆相切，如图 1.4(h)．求证：$CE /\!/ AB$．

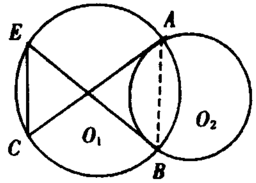


图 1.4(h)

[分析八] 这是例题 1.4(f)中弦 AD 也变为小圆的切线时得到的问题．同理利用等圆周角和弦切角模型有 $\angle C = \angle ABE = \angle BAC$．

当我们把两圆相交变为两圆相切(包括外切和内切)时，又可以得到大量相应的问题．此时，求解的模型思维方式类似，只不过通过公共弦构造的模型转化为通过公切线构造的相应模型罢了．

练习一

1．选择题：

(1) 在①菱形、②直角梯形、③正六边形、④等腰三角形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是 (　　)

(A) ②和④　(B) ①和④　(C) ①和③　(D) ①和②

(2) 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 (　　)

(A) 角　　(B) 线段

(C) 平行四边形　　(D) 正三角形

(3) 下列说法不正确的是 (　　)

(A) 三角形的内心是三角形三条角平分线的交点

(B) 每条边都相等的圆内接多边形是正多边形

(C) 垂直于半径的直线是圆的切线

(D) 有公共斜边的两个直角三角形有相同的外接圆

(4) 给出下列命题：①顺次连结四边形各边中点连线构成的四边形是平行四边形；②在同圆中，垂直于切线的弦必过圆