高等数学好题精编系列

线性代数

学习指导与题解

◎ 黄光谷 邓泽清 胡启旭 黄东 编

HAOTI

- 大学生 备考的帮手
- 考研者 成功的阶梯
- 教师们 命题的参考

·华中科技大学出版社·

http://www.hustp.com

2007

高等数学好题精编系列

线性代数学习指导与题解

黄光谷　邓泽清　编
胡启旭　黄谷东

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与题解/黄光谷　邓泽清　胡启旭　黄　东　编.—武汉:华中科技大学出版社,2007年3月
ISBN 978-7-5609-3971-1

Ⅰ.线…　Ⅱ.①黄…　②邓…　③胡…　④黄…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第020507号

线性代数学习指导与题解　　黄光谷　邓泽清　胡启旭　黄　东　编

策划编辑:钟小珉
责任编辑:王汉江　　封面设计:刘　卉
责任校对:陈　骏　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　印张:12.5　字数:300 000
版次:2007年3月第1版　印次:2007年3月第1次印刷　定价:18.80元
ISBN 978-7-5609-3971-1/O·409

内容介绍

本书精选了线性代数课程最常用的四种教材和一本考研辅导书中有代表性的习题和考题，按照最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(简称“考纲”)“数学一”中线性代数所列顺序和内容作了取舍，依前言中教材[1]的目录顺序编目，共分六章，各章章首列有学习指导，含考纲要求、重点难点和学习注意，以指导读者学习；各节开头列有该节的内容提要，包括主要概念、公式、方法和定理，然后精选了五种书的好题并逐题作了分析和解答.

本书集各家之长，精选各书好题于一书，具有代表性、典型性、系统性、资料性和很强的可读性. 特别适宜于作为理科、工科、农林、财经、管理等专业本、专科生学习线性代数课程的参考书，也可作为考研者的优秀复习资料和指南，还可为教师提供考试的命题参考.

前　　言

要学好数学，一要深入理解数学概念、定理、公式等基础知识，二要学会解题，并从中掌握方法和培养能力．本书侧重于后者，精选了下列四种常用教材和一本考研辅导书中有代表性的习题和考题，并作了分析或解答，以作示范．

[1]同济大学应用数学系．工程数学-线性代数．第4版．北京：高等教育出版社，2003年7月．本书各节第一部分为内容提要，与书[1]记号一致；第二部分对应于书[1]，简称“(同济四版)线性代数习题选解”．各题编号，如1-3，第一个数字1是本书序号，第二个数字3是教材[1]原题号，以下类似．

[2]上海市教委组编、(上海交大)李世栋等编．线性代数．北京：科学出版社，2000．对应本书各节第三部分，简称“(上海交大)线性代数习题选解”．

[3]工科数学课程教学指导委员会本科组编．工程数学例题与习题(上册)(线性代数·概率论与数理统计)．北京：高等教育出版社，1996．对应的本书各节第四部分，简称“工数线代题选解”．

[4]北京大学数学系几何与代数教研室代数小组编．高等代数．第2版．北京：高等教育出版社，1988年3月．对应的本书各节第五部分，简称“北大高代题选解”．

[5]黄光谷，胡启旭，何晓亚，石先军．考研数学题典．武汉：华中科技大学出版社，2002．对应的本书各节第六部分，简称“考研题线代选解”．其中序号1．Ⅰ、01、一、(4)、(3′)依次是指该节本段的第1题、考研“数学一”、2001年试题的第一大题的第(4)小题，本题满分3分”，其他类似．

本书按照最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》

(以下简称“考纲”)“数学一”中线性代数的考试内容决定取舍和选题，共分六章. 本书各章章首有学习指导，含考纲要求、重点难点和学习注意，以指导读者学习. 其中，“考纲”与“线性代数课程基本要求”(相当于“教学大纲”)是基本一致的，达到了“考纲”的要求，也就达到了教学要求. 阅读各章考纲要求时，要注意其中“了解”、“理解”、“会”、“掌握”等用词层次的不同，以便掌握分寸. “重点难点”与“学习注意”是提纲挈领、原则性的，有待读者阅读了各部分习题选解以后，再回头细心体会.

选入的各节习题，有的题已有详细的分析或提示，则以其代替该题的解答，不重复解答. 题后留有方括号[　　]的是选择题，画有横线______的是填空题及其答案.

这五种书的习题或考题都较好，但本书限于篇幅，不能逐一解答；只精选了各书约1/2的题解合成一书. 本书采众家之长，熟读本书，相当于读了五种题解书的精华.

感谢华中科技大学出版社的领导和编辑对本书的指导、支持和细心工作. 本书中用到了许多习题、考题和资料，特此向所引用书籍的作者一并表示感谢！

由于作者水平有限，书中可能会有错误和缺点，恳请读者和同行批评指正，以便再版时修改.

编　者

2006 年 10 月

目　录

第一章　行　列　式

学习指导

（一）考纲要求

1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质.

2. 会用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式.

3. 掌握克拉默法则解线性方程组.

（二）重点难点

1. 重点：行列式的计算，克拉默法则.

2. 难点：含字母元素的行列式的计算或证明.

（三）学习注意

1. 首先熟悉简单的二阶和三阶行列式的计算，它们用得很广泛.

2. 对于数字元素高阶（含三阶）行列式的计算，一般是用“化零法”按某行（列）展开，即降阶法.

3. 对于字母元素的高阶行列式的计算或证明，是难点，要仔细观察题设行列式字母元素的特点，充分利用行列式的性质，把它们化成一些特殊行列式，如三角形行列式、范德蒙行列式等，再去进行计算或证明.

第一节　行列式的定义与性质

一、内容提要

1. 二阶和三阶行列式(对角线法则)

2. 排列及其逆序数、对换及其性质

3. n 阶行列式的定义

n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数,$\sum$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和.

n 阶行列式也可定义为 $D=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$,其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

4. 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

(2) 互换行列式的两行(列),行列式变号.

(3) 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式;或者,行列式的某一行(列)的所有元素的公因子 k 可以提到行列式记号的外面.

(4) 行列式中如果有两行(列)元素相同或成比例.则此行列式为零.

(5) 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和.例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a_{1i'} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a_{2i'} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+a_{ni'} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则D可以分解为下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i'} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i'} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni'} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(6) 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数，然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变.

二、(同济四版)线性代数习题选解

1-2 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

(6) $1\ 3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$.

解 各元素的逆序数依次为：$0,0,\cdots,0,0,2,\cdots,2n-2$，所以此排列的逆序数为

$$t=0+0+\cdots+0+0+2+\cdots+(2n-2)=n(n-1).$$

2-3 写出四阶行列式中含有因子$a_{11}a_{23}$的项.

解 四阶行列式中含有因子$a_{11}a_{23}$的项的一般形式是$(-1)^t a_{11}a_{23}a_{3p_3}a_{4p_4}$，其中$t$是列标排列$13p_3p_4$的逆序数，故$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$就是所求的项.

三、(上海交大)线性代数习题选解

1-2 设n阶排列$a_1a_2\cdots a_n$的逆序数为s，试求排列$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$的逆序数.

解 排列的逆序数等于排列中各元素的逆序数之和，关键是求出各元素的逆序数.

设$a_i(i=1,2,\cdots,n)$在排列$a_1a_2\cdots a_n$中的逆序数为t_i，则$\sum\limits_{i=1}^{n}t_i=s$. 而$1,2,\cdots,n$中比$a_i$大的数有$n-a_i$个，故$a_i$在排列$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$中的逆序数$\tau_i=n-a_i-t_i$，所求逆序数为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(n-a_i-t_i)&=n^2-\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}t_i\\&=n^2-\frac{n(n+1)}{2}-s=\frac{n(n-1)}{2}-s.\end{aligned}$$

2-5 若n阶行列式$D=|a_{ij}|$的元素满足$a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称这样的行列式为反对称行列式，试证：当$n$为奇数时，$D=0$.

证 因为$a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，$n$为奇数，所以

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-a_{11}&-a_{21}&\cdots&-a_{n1}\\-a_{12}&-a_{22}&\cdots&-a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&\cdots&-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=-D.$$

故$D=0$.

四、工数线代题选解

习题一（[3]P18）

1-1.1 计算下列行列式.

(1) $D_1=\begin{vmatrix}12&14&16&18\\2&4&6&8\\4&3&2&1\\3&7&11&15\end{vmatrix}$； (2) $D_2=\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$；

(3) $D_3=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&-1&3\\0&0&5&1\end{vmatrix}$； (4) $D_4=\begin{vmatrix}1&2&2&2\\2&2&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&4\end{vmatrix}$.

解 (1) 利用性质：如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式为零.

$$D_1\xlongequal[r_2/2]{r_1/2}2\times2\begin{vmatrix}6&7&8&9\\1&2&3&4\\4&3&2&1\\3&7&11&15\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}4\begin{vmatrix}6&7&8&9\\1&2&3&4\\5&5&5&5\\3&7&11&15\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3/5}20\begin{vmatrix}6&7&8&9\\1&2&3&4\\1&1&1&1\\3&7&11&15\end{vmatrix}\xlongequal[r_2-r_3]{r_1-6r_3}20\begin{vmatrix}0&1&2&3\\0&1&2&3\\1&1&1&1\\3&7&11&15\end{vmatrix}=0.$$

(2) 根据行列式 D_2 的特点：各列加到第 1 列，都是相同的数 $2(x+y)$，于是，提出第 1 列公因子是解决的关键.

$$D_2\xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2}\begin{vmatrix}2(x+y)&y&x+y\\2(x+y)&x+y&x\\2(x+y)&x&y\end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix}1&y&x+y\\1&x+y&x\\1&x&y\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-r_1]{r_3-r_2}2(x+y)\begin{vmatrix}1&y&x+y\\0&x&-y\\0&-y&y-x\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 }c_1\text{ 展开}}-2(x^3+y^3).$$

(3) **解一** 四阶及四阶以上的行列式没有对角线法则. 根据行列式 D_3 的特点：含有较多的零. 利用行列式性质进一步尽可能多地把行列式的某一行(列)中的元素化成零，然后将行列式展开.

$$D_3\xlongequal{r_2-3r_1}\begin{vmatrix}1&2&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-1&3\\0&0&5&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{按 }r_1\text{ 展开}]{\text{按 }c_1\text{ 展开}}-2\begin{vmatrix}-1&3\\5&1\end{vmatrix}=32.$$

解二 D_3 含有较多的零，可采用定义法．因 n 阶行列式 $D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，$t$ 为列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数．当 D 中含有较多的零时，只要找出那些不为零的项，就可求得行列式的值．因 D_3 中第一行的非零元素为 $a_{11}=1$，$a_{12}=2$，故 $p_1=1,2$．同法可求得 $p_2=1,2$；$p_3=3,4$；$p_4=3,4$．对应于不为零的项中 $p_1p_2p_3p_4$ 能组成如下四个四元排列．

$$1234 \quad 1243 \quad 2134 \quad 2143$$

D_3 中相应的非零项分别为

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=(-1)^0\times1\times4\times(-1)\times1=-4;$$

$$(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=(-1)\times1\times4\times3\times5=-60;$$

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=(-1)\times2\times3\times(-1)\times1=6;$$

$$(-1)^{\tau(2143)}a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}=(-1)^2\times2\times3\times3\times5=90.$$

它们的代数和即为 D_3 的值，即

$$D_3=-4+(-60)+6+90=32.$$

（4）**解一** 行列式性质法．

$$D_4\xlongequal[i=2,3,4]{r_i-2r_1}\begin{vmatrix}1&2&2&2\\0&-2&-2&-2\\0&-2&-1&-2\\0&-2&-2&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按}c_1\text{展开}}\begin{vmatrix}-2&-2&-2\\-2&-1&-2\\-2&-2&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3/(-2)]{c_1/(-2)}4\begin{vmatrix}1&-2&1\\1&-1&1\\1&-2&0\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_3}4\begin{vmatrix}0&-2&1\\0&-1&1\\1&-2&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按}c_1\text{展开}}-4.$$

解二 构造一行（列）与另一（些）行（列）成比例（或相同）的行列式，利用行列式性质：行列式中如果有两行（列）元素成比例（或相同），则此行列式为零．

$$D_4=\begin{vmatrix}1&2&2&2\\2&2&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2+(-1)&2&2+0&2+0\\2+0&2&2+0&2+0\\2+0&2&2+1&2+0\\2+0&2&2+0&2+2\end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}-1&2&0&0\\0&2&0&0\\0&2&1&0\\0&2&0&2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按}c_1\text{展开}}(-1)\begin{vmatrix}2&0&0\\2&1&0\\2&0&2\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{按}r_1\text{展开}}-2\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}=-4.
$$

注 第三个等号之所以成立，是因为去掉了拆开 D_4 所有成比例的分列所对应的行列式值为零的行列式.

2-1.2 解方程

$$
\begin{vmatrix}a+x&x&x\\x&b+x&x\\x&x&c+x\end{vmatrix}=0,\quad \text{其中}\ a,b,c\ \text{为已知数}.
$$

解 记方程左边的行列式为 D，D 的特点是：除了主对角线上元素以外，各列元素都相同. 可考虑"加边法"——把行列式添加一行和一列，使升阶后的行列式的值保持不变，这种计算行列式的方法称为加边法. 显然，

$$
D=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\x&a+x&x&x\\x&x&b+x&x\\x&x&x&c+x\end{vmatrix}\xlongequal[j=2,3,4]{c_j-c_1}\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1\\x&a&0&0\\x&0&b&0\\x&0&0&c\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{按}c_4\text{展开}}(-1)\times(-1)^5\begin{vmatrix}x&a&0\\x&0&b\\x&0&0\end{vmatrix}+c\cdot(-1)^8\cdot\begin{vmatrix}1&-1&-1\\x&a&0\\x&0&b\end{vmatrix}.
$$

等号右边第一个行列式按 c_2 展开，第二个行列式按 c_3 展开，得

$$
D=(-1)\cdot a\cdot\begin{vmatrix}x&b\\x&0\end{vmatrix}+c\cdot(-1)\begin{vmatrix}x&a\\x&0\end{vmatrix}+c\cdot b\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\x&a\end{vmatrix}
$$

$$
=x(ab+ac+bc)+abc.
$$

故方程 $D=0$ 的解为

$$
x=\frac{-abc}{ab+ac+bc},\quad \text{其中}\ ab+ac+bc\neq 0.
$$