高 等 学 校
数学学习指导丛书

高等数学精讲精练

下册

与同济大学《高等数学》（第五版）同步

主编　陈启浩

系统梳理知识体系
全面总结方法技巧
细致解答疑惑难点
精心配置分层练习

北京师范大学出版社

高 等 学 校
数学学习指导丛书

高等数学精讲精练

下册

与同济大学《高等数学》（第五版）同步

主编 陈启浩
编者 寿 宇
李茂生
陈文超

北京师范大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学精讲精练．下册/陈启浩主编．－北京：北京师范大学出版社，2006

（高等学校数学辅导丛书）

ISBN 7-303-08035-X

Ⅰ．高…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 036008 号

北京师范大学出版社出版发行

（北京新街口外大街 19 号　邮政编码：100875）

出版人：赖德胜

北京东方圣雅印刷有限公司印刷　全国新华书店经销

开本：185 mm×260 mm　印张：22.75　字数：561 千字

2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷

印数：1～3 000　定价：28.00 元

前言

高等数学是大学工学、经济学、管理学各学科和专业的一门重要基础课，也是这些学科和专业的硕士研究生入学考试必考科目之一.

目前出版的高等数学辅导读物，其中虽不乏佳作，但多以题解"《高等数学》(同济大学)习题"或"历年硕士研究生入学试题"形式出现.本书则是旨在引导正在学习高等数学的读者，能与课堂教学或自学同步，准确灵活地理解高等数学中的众多概念与理论，熟练掌握各种问题的解题方法和技巧，较快捷、较深入地学会高等数学这门课程；同时帮助正在复习迎接硕士研究生入学考试的读者能在较短时期内使高等数学水平有一个较大幅度的提高，从容面对数学考试.

全书按同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第五版)(高等教育出版社)各章顺序编写，共分十二章及附录(高等数学的应用、全书综合练习题及考研试题).每章分若干节，每节都由以下三部分组成：

一、**主要内容提要**　列出该节的核心内容，即主要定义、定理及计算公式.

二、**疑问与解答**　将该节中较易混淆的概念、学习中会出现的问题以及解题方法和技巧以疑问形式提出，并结合典型例子给出解答.

三、**基础练习**　这里的练习都是基础题，旨在通过这些练习题熟悉本节的有关概念、理论及计算方法.基础练习包括单项选择题和填空题(书后都有解答)，特别对单项选择题，在解答中不仅给出选择其中某项的理由，也给出不选择其余三项的理由.

此外，每章的最后都安排有**"主要计算方法总结"**一节(除第六章)和**综合练习**(A)、**综合练习**(B)，通过这一节的阅读和综合练习训练，将融会贯通全章的各个知识点，提高分析问题和解决问题的能力.

北京师范大学出版社理科室的编辑们对本书面世给予了热情的支持和帮助，谨此致谢.

由于水平有限，成书时间仓促，书中疏漏等不足之处恐难幸免，恳请广大读者及同行指正.

陈启浩

2006 年 2 月识于北京

目 录

第八章
多元函数微分法及其应用

第一节　函数、极限与连续

一、主要内容提要

1. 多元函数的定义

设 x,y,z(或 x,y,z,w) 都是变量,D 是 xOy 平面(或 $Oxyz$ 空间) 上的点集. 如果对于每个点 $(x,y)\in D$(或 $(x,y,z)\in D$),变量 z(或 w) 按照某个法则总有确定的实数值与之对应,则称 z(或 w) 是 x,y(或 x,y,z) 的二元(或三元) 函数,记为 $z=f(x,y)$(或 $w=f(x,y,z)$).

如果记点 $P=(x,y)$(或 $P=(x,y,z)$),则 $z=f(x,y)$(或 $w=f(x,y,z)$) 可以表示为 $z=f(P)$(或 $w=f(P)$).

使表达式 $z=f(x,y)$(或 $w=f(x,y,z)$) 有意义的点 (x,y)(或点 (x,y,z)) 的集合,称为函数 $z=f(x,y)$(或 $w=f(x,y,z)$) 的定义域,记为 D,它是 xOy 平面(或 xyz 空间) 的某个点集. 当点 (x,y)(或点 (x,y,z)) 取遍定义域 D 上的一切点时,对应的函数值 z(或 w) 的集合称为函数 $z=f(x,y)$(或函数 $w=f(x,y,z)$) 的值域,记为 W,它是 z 轴(或 w 轴) 上的某个点集.

$n(n>3)$ 元函数也可以同样定义,但在高等数学范畴内,常用的是二、三元函数.

2. 多元初等函数

多元初等函数是可以用一个表达式表示的多元函数,且这个表达式是由多元多项式及(一元) 基本初等函数经过有限次四则运算和复合而成的.

3. 多元函数极限

这里给出二元函数极限的定义,三元和三元以上函数极限同样可以定义.

设二元函数 $f(x,y)$ 在点集 D 上有定义,(x_0,y_0) 是 D 的内点或边界点,A 是常数. 如果对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$(即 $0<|PP_0|<\delta$,其中 $|PP_0|$ 是点 $P(x,y)$ 到点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离) 时,对位于 D 上的点 (x,y) 有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$(即 $|f(P)-A|<\varepsilon$),则称 A 是 $f(x,y)$ 在 $x\to x_0,y\to y_0$(或 $(x,y)\to(x_0,y_0)$,$P\to P_0$) 时的二重极限(简称极限),记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ (\text{或}(x,y)\to(x_0,y_0))}} f(x,y)=A,\ \lim_{P\to P_0}f(P)=A(\text{或 } f(P)\to A(P\to P_0)).$$

注　(1) $f(P)\to A(P\to P_0)$ 是指点 P 沿位于 D 内的任何路径 Γ 趋近 P_0 时,二元函数 $f(P)$ 的值都无限地趋近常数 A.

(2) $f(x,y)$ 在 $P \to P_0$ 的累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 是指 P 沿两种特殊路径趋向 P_0 时，$f(x,y)$ 的极限，前者的路径是 Ⅰ，后者的路径是 Ⅱ(图 8.1.1).

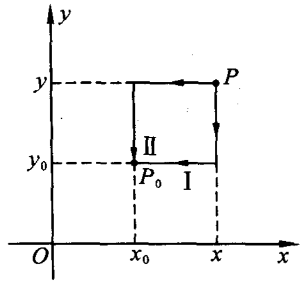

图 8.1.1

(3) 二元函数极限有与一元函数极限类似的运算法则.

(4) 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to\infty}} f(x,y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)$ 可以仿照 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 及一元函数极限 $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)$ 定义.

4 多元函数的连续性

这里给出二元函数连续性的定义. 三元或三元以上函数连续性同样可以定义.

设二元函数 $f(x,y)$ 在点集 D 上有定义，(x_0,y_0) 是 D 的内点或边界点，且 $(x_0,y_0)\in D$. 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在点集 D 的每点处连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续，则称 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的间断点.

注 (1) (多元) 连续函数的和、差、积仍为连续函数；在分母不为零的点处 (多元) 连续函数的商仍为连续函数；(多元) 连续函数的复合函数仍为连续函数.

(2) 多元初等函数在其定义区域(即包含在定义域内的区域或闭区域) 上连续. 它表明，对于多元初等函数 $f(P)$，如果点 P_0 位于它的定义区域上，则

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0).$$

利用这个结论对计算多元初等函数的极限是很方便的.

5 有界闭区域上(多元) 连续函数的性质

这里给出有界闭区域上二元连续函数的性质(对三元或三元以上的连续函数也有同样性质)：

(1) 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的连续函数，则 $f(x,y)$ 在 D 上一定能取到最大值和最小值，即至少存在一点 $(\xi_1,\eta_1)\in D$，使得 $f(\xi_1,\eta_1) = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$；至少存在一点 $(\xi_2,\eta_2)\in D$，使得 $f(\xi_2,\eta_2) = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$. (最大值和最小值定理)

(2) 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的连续函数. 如果 A,B 是 $f(x,y)$ 在 D 上取得的两个不同的值，则对于介于 A,B 之间的任一实数 μ，至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $f(\xi,\eta)=\mu$. (介值定理)

特别地，对于任一满足 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 的实数 μ(其中 m,M 分别是 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值与最大值)，至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $f(\xi,\eta)=\mu$.

二、疑问与解答

问 1 如何理解二元初等函数？

答 根据定义，二元初等函数是二元多项式及一元基本初等函数经有限次四则运算和复

合而成的，且能用一个表达式表示的二元函数，其中的"有限次"和"一个"这两个词的意义类似于一元初等函数. 但这里要注意构成二元初等函数的"材料"是二元多项式与基本初等函数，其中基本初等函数指的是一元函数的基本初等函数.

问 2　如何判定当点 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$ 时二重极限 $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)$ 不存在？

答　通常有两种方法：

(1) 选取某一条位于 D(定义域) 内的路径 Γ，如果 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ \text{沿}\Gamma}} f(P)$ 不存在，则二重极限 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 不存在.

(2) 选取某两条位于 D(定义域) 内的不同路径 Γ_1,Γ_2，如果 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ \text{沿}\Gamma_1}} f(P)$ 与 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ \text{沿}\Gamma_2}} f(P)$ 都存在但不相等，则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 不存在.

例 1.1　用上述两种方法判定二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在.

解　二元函数 $z=\dfrac{x+y}{x-y}$ 在点集 $D=\{(x,y)\mid x\neq y\}$ 上有定义，$P_0(0,0)$ 是 D 的边界点.

(1) 设点 $P(x,y)$ 沿曲线 $\Gamma: y=\sin x$ 趋向 P_0，则

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ \text{沿}\Gamma}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{1-\cos x} = \infty.$$

所以，所给的二重极限不存在.

(2) 设点 $P(x,y)$ 分别沿直线 $\Gamma_1: y=2x, \Gamma_2: y=3x$ 趋向 P_0，则

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ \text{沿}\Gamma_1}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{-x} = -3, \lim_{\substack{P\to P_0\\ \text{沿}\Gamma_2}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{-2x} = -2.$$

所以，所给的二重极限不存在.

问 3　对于二元函数 $f(x,y)$，二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在与累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 都存在有何关系？

答　两者的存在性是互不相关的.

例如，对于二元函数 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\cos\dfrac{1}{x}$，二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$（事实上，对于 $y\neq 0$ 有 $\left|x\sin\dfrac{1}{y}\right|\leqslant|x|$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\sin\dfrac{1}{y}=0$. 同样可得 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y\cos\dfrac{1}{x}=0$）. 但是，由于 $y\neq 0$ 时 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在，从而 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在. 同样可知 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在.

又例如，对于二元函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$（它在区域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$ 上有定义，且 $(0,0)$ 是它的边界点）有

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} 0=0, \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0} 0=0,$$

但是,二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在.这是因为

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\text{沿直线}y=x}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\text{沿直线}y=2x}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}=\frac{2x^2}{5x^2}=\frac{2}{5}.$$

由此可知,二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在不能保证累次极限$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$和$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$都存在,反之,累次极限$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$和$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$都存在也不能保证二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在.

问 4 二元函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处连续是两个一元函数$f(x,y_0)$和$f(x_0,y)$分别在点x_0和点y_0处连续的充分必要条件吗?

答 当二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续时,$f(x,y_0)$与$f(x_0,y)$未必连续.例如,设二元函数$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$ 则$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)=0=f(0,0)$,即$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续.但由$f(x,0)$与$f(0,y)$都无定义知$f(x,0)$,$f(0,y)$分别在点$x=0$和点$y=0$处不连续.

反之,当函数$f(x,y_0)$,$f(x_0,y)$分别在点x_0和点y_0处连续时,$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处也未必连续.例如,设二元函数$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$则由$f(x,0)\equiv 0$,$f(0,y)\equiv 0$知这两个一元函数分别在点$x=0$和点$y=0$处连续.但是由$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在知$f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续.

三、基础练习

1. 单项选择题

(1) 下列二元函数中,定义域为区域的是(　　).

A. $z=\ln(x^2-y^2-1)$　　　　B. $z=\ln(1-x^2+y^2)$

C. $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$　　　　D. $z=\sqrt{\cos(x^2-y^2)-1}+\sqrt{1-(x^2+y^2)}$

(2) 设二元函数$f(x,y)$是初等函数,则下列说法不正确的是(　　).

A. $f(x,y)$在其定义域上连续

B. $f(x,y)$在其定义区域上连续

C. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在,其中$f(x,y)$在非孤立点$(x_0,y_0)$处有定义

D. 当$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在时,$f(x,y)$未必在点$(x_0,y_0)$处连续

(3) 设函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则二元函数$f(x)f(t-x)$的表达式为(　　).

A. $f(x)f(t-x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & |x|<1 \text{ 且 } |t-x|<1, \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

B. $f(x)f(t-x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & |x|<1, \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

C. $f(x)f(t-x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & |t-x|<1, \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

D. $f(x)f(t-x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |x|<1 \text{ 且 } |t-x|<1, \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(4) 设函数 $f(x,y)$ 的二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\alpha$,则(　　).

A. 当 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在时极限值为 α

B. 当 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在时极限值未必为 α

C. $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 都存在且相等

D. $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 都存在但不相等

(5) 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x+y)}{x-y}$ 为(　　).

A. 1　　　　B. ∞

C. 0　　　　D. 不存在但不为 ∞

(6) 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ 为(　　).

A. 1　　　　B. 0

C. ∞　　　　D. 不存在但不为 ∞

(7) 甲、乙两学生用不同方法计算二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$,其中

甲学生计算:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}}=0 \quad \left(\text{这里因为} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)=\infty\right).$$

乙学生计算:

二元函数 $\dfrac{xy}{x+y}$ 在点集 $\{(x,y)\mid y\neq -x\}$ 上有定义.在此点集上有

$$\left|\frac{xy}{x+y}\right| \leqslant \frac{\dfrac{1}{4}(x+y)^2}{|x+y|}=\frac{1}{4}|x+y| \to 0\ (x\to 0, y\to 0),$$

所以,$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}=0$.

你的判断是(　　).

A. 甲学生计算正确而乙学生计算不正确

B. 甲学生计算不正确而乙学生计算正确

C. 甲、乙学生计算都正确

D. 甲、乙学生计算都不正确

(8) 二元函数 $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{(2-y^2+x)[x^2+(y-3)^2]^{\frac{1}{2}}}$ 有一个间断点 P 和一条间断曲线(即由 $f(x,y)$ 的间断点组成的曲线)C,则 C 的过点 P 的切线方程为(　　).

A. $y-3=\dfrac{1}{4}(3+\sqrt{7})x$

B. $y-3=\dfrac{1}{4}(3-\sqrt{7})x$

C. $y-3=\dfrac{1}{4}(3+\sqrt{7})x$ 及 $y-3=\dfrac{1}{4}(3-\sqrt{7})x$

D. 不存在

(9) 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续,而且一元函数 $f(x,y_0)$ 和 $f(x_0,y)$ 分别在点 x_0 和点 y_0 的某个邻域内有定义,则(　　).

A. $f(x,y_0)$ 在点 x_0 处连续且 $f(x_0,y)$ 在点 y_0 处连续

B. $f(x,y_0)$ 在点 x_0 处不连续且 $f(x_0,y)$ 在点 y_0 处不连续

C. $f(x,y_0)$ 在点 x_0 处不连续或 $f(x_0,y)$ 在点 y_0 处不连续

D. 在点 P_0 的充分小邻域内点 $P(x,y)$ 沿任何路径趋向 P_0 时,都有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$

(10) 设 $f(x,y)$ 是连续函数,则(　　).

A. $f(x,y)$ 在定义域上有最大值和最小值

B. $f(x,y)$ 在任一定义区域上都有最大值与最小值

C. $f(x,y)$ 在任一有界闭定义区域上都有最大值与最小值

D. $f(x,y)$ 在任一定义区域上都无最大值或最小值

2. 填空题

(1) 二元函数 $z=\sqrt{\ln\dfrac{1-(x^2+y^2)}{y}}$ 的定义域为________.

(2) 设二元函数 $z=x+y+f(x-y)$,并且 $y=1$ 时 $z=x^2$,则函数 $f(x)$ 的最小值为________.

(3) 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}=$________.

(4) 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=$________.

(5) 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2y^2}=$________.

(6) 设二元函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-4y^2)}$,则函数 $\varphi(t)=\lim\limits_{(x,y)\to(t,0)}f(x,y)$ 的定义域为________.

(7) 累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y}{x}\tan\dfrac{xy}{1+y+(1+x)y^2}=$ ________.

(8) 设函数 $f(k)=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\text{沿直线}y=kx}}\dfrac{e^{x^2y}-1}{(x^2+y^2)\sin x}$，则 $f''(k)=$ ________ $(-\infty<k<+\infty)$.

(9) 设 $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi(0\leqslant\varphi<2\pi)$，则仅当 $\varphi\in$ ________ 时，极限 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}e^{\frac{x+y}{x^2+y^2}}$ 存在.

(10) 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{[1-\cos(xy)]y}{x^4+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ A, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处连续，则常数 $A=$ ________.

第二节　偏导数与全微分

一、主要内容提要

1. 偏导数的定义

这里给出二元函数偏导数的定义，三元及三元以上函数的偏导数同样可以定义.

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义. 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\quad\left(\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}\right)$$

存在，则称其值为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的关于 x(关于 y) 的偏导数，记为 $z_x\big|_{(x_0,y_0)}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$，$f_x(x_0,y_0)$ 或 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$ $\left(z_y\big|_{(x_0,y_0)}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}, f_y(x_0,y_0)\text{ 或 }\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}\right)$.

如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点处都有关于 x(关于 y) 的偏导数，则由此确定的函数 $z_x(x,y)(z_y(x,y))$ 称为 $z=f(x,y)$ 在 D 内关于 x(关于 y) 的偏导函数(简称偏导数)，记为 $z_x,\dfrac{\partial z}{\partial x},f_x(x,y),\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\left(z_y,\dfrac{\partial z}{\partial y},f_y(x,y),\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$.

由偏导数的定义可知，要计算二元函数 $z=f(x,y)$ 的关于 x(关于 y) 的偏导数，只要将 y(将 x) 暂时看作常量对 x(对 y) 求导数. 因此求偏导数可以归结为一元函数的求导问题.

2. 多元复合函数求偏导数法则

以三个二元函数 $z=f(u,v), u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ 为例给出多元复合函数求偏导数法则，对于其他情形求偏导数法则与此类似.

设二元函数 $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ 都在点 (x,y) 处有关于 x 及关于 y 的偏导数，二元函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续的偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

3 多元隐函数求偏导数公式

(1) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的(隐) 函数,且 $F_z\neq 0$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

(2) 设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 是由方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 确定的(隐) 函数,且 $\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}.$$

4 全微分

以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例给出全微分的定义,其他情形同样可以定义.

如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某个邻域内有定义,且其全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可以表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$(其中 A,B 仅与 x,y 有关,$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$),则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,称 $A\Delta x+B\Delta y$ 是 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分,记为 $\mathrm{d}z$,

一般地,$\Delta z\neq \mathrm{d}z$,但对于自变量 x,y 有 $\Delta x=\mathrm{d}x,\Delta y=\mathrm{d}y$,所以

$$\mathrm{d}z=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y.$$

5 连续,偏导数存在,可微及偏导数连续的关系

以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例给出以上四者的相互关系:

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义,则

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续 $\rightleftarrows$ $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 存在;

(2) $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 存在 $\rightleftarrows$ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;

(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续 $\rightleftarrows$ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;

(4) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微 $\rightleftarrows$ $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

其中"$A\longrightarrow B$"表示由 A 可以推出 B,"$A\not\longrightarrow B$"表示由 A 推不出 B.

如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分为

$$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y.$$

6 全微分形式不变性

以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例,给出全微分形式的不变性.

设函数 $z=f(u,v)$ 有连续偏导数，则无论 u,v 是自变量或是可微的中间变量都有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

这一性质称为全微分形式不变性.

7. 方向导数与梯度

(1) 二元函数情形

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某个邻域内有定义，l 是引自点 (x,y) 的射线(也称方向). 如果极限

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \text{沿}l\text{方向}}}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta x)-f(x,y)}{\rho}\quad \left(\text{其中 }\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

存在，则称这个极限值为 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处沿方向 l 的方向导数，记为 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x,y)}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(x,y)}$ 或简记为 $\frac{\partial f}{\partial l}$，$\frac{\partial z}{\partial l}$.

如果 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则 $f(x,y)$ 在该点处的沿任一方向 l 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 都存在，且 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$ (其中 φ 是方向 l 与 x 轴正向的夹角).

设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，且在点 (x,y) 处 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 不全为零，则称向量 $\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$ 为 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的梯度，记为 $\mathbf{grad}\,f(x,y)$.

$f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 是梯度 $\mathbf{grad}\,f(x,y)$ 在方向 l 上的投影；

$f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 沿梯度 $\mathbf{grad}\,f(x,y)$ 方向取得最大值 $|\mathbf{grad}f(x,y)|$，或者说梯度 $\mathbf{grad}\,f(x,y)$ 的方向是与 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处取得最大方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 的方向一致.

(2) 三元函数情形

设三元函数 $w=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 的某个邻域内有定义，l 是引自点 (x,y,z) 的射线(也称方向). 如果极限

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \text{沿}l\text{方向}}}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho}\quad \left(\text{其中 }\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\right)$$

存在，则称这个极限值为 $w=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处沿方向 l 的方向导数，记为 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x,y,z)}$，$\left.\frac{\partial w}{\partial l}\right|_{(x,y,z)}$，或简记为 $\frac{\partial f}{\partial l}$，$\frac{\partial w}{\partial l}$.

如果 $f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处可微，则 $f(x,y,z)$ 在该点的沿任一方向 l 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 都存在，且 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial l}\cos\gamma$ (其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是方向 l 的方向余弦).

设三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处可微，且在点 (x,y,z) 处 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 不全为零，则称