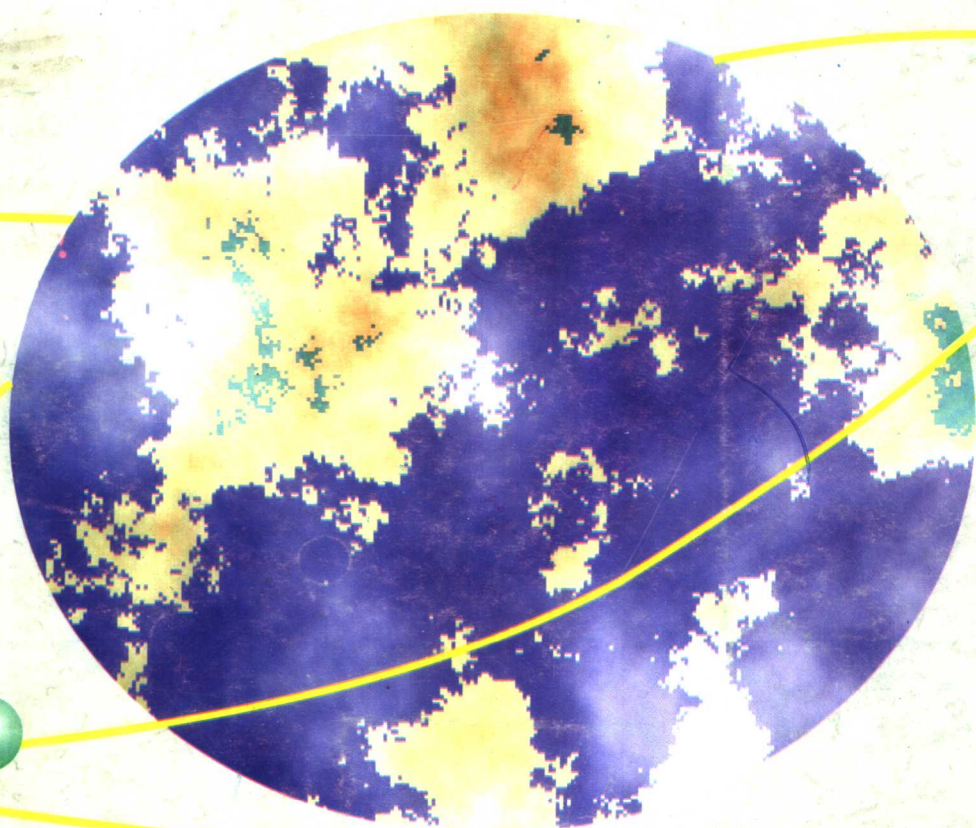


测绘科技丛书

控制测量学

孔祥元 梅是义 主编

下册



武汉测绘科技大学出版社

测绘科技丛书

控制测量学

下 册

孔祥元 梅是义 主编

武汉测绘科技大学出版社

(鄂)新登字 14 号

内 容 简 介

《控制测量学》分上、下两册,本书是下册,共七章。

本书系统介绍了测量控制网计算的基本原理和方法。内容包括:地球椭球几何性质,观测值归算及椭球面上的基本计算,高斯投影及控制网概算,国家及工程坐标系建立概念及应用,控制网的条件平差、间接平差及近代平差理论及应用等。本书不仅概括了有关的传统理论,而且也反映了现代发展成就,理论联系实际,以典型实例说明具体应用。

本书为高等学校测量工程专业本科(包括日校和成人教育)教材,也可供其他测绘专业师生及科研和生产技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

控制测量学(下册)/孔祥元,梅是义主编. —武汉:
武汉测绘科技大学出版社,2000.2(2000.7重印)
ISBN 7-81030-479-8

I. 控… II. ①孔…②梅… III. 控制测量-测量学 IV. P221

责任编辑:易法楷 封面设计:曾 兵
武汉测绘科技大学出版社出版发行
(武汉市珞喻路 129 号,邮编:430079)
核工业中南三〇九印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:16.75 字数:426千字
1996年10月第1版 2000年7月第5次印刷
印数:5801—7800册 定价:18.00元

前 言

控制测量学是高等学校测量工程专业一门主干课程,在专业课程设置中具有重要地位和作用。十几年来,在学校大力支持下,我们在控制测量学教学和课程建设等方面做了一定的改革工作,在总结日校和成人教育多年教学经验和科研成果的基础上,根据现行教学大纲,特为测量工程专业本科学生新编了这套《控制测量学》上册及下册教材。

《控制测量学》下册内容主要讲述测量控制网计算的理论和方法。近年来,由于电子计算机在测量计算中的普及与应用,测量平差理论迅速发展及我国新大地坐标系建立等新成就,促使《控制测量学》下册内容发生了很大变化。首先,在地球椭球、高斯投影及平差计算等章节的理论和公式推导中尽量简化,并舍去那些不必要的级数展开及手算表格,使其适宜电算程序的编写和应用;在阐述经典平差方法的基础上,概述了近代平差的理论及在工程测量中的应用,其中包括控制网逐次分解平差, GPS网与地面网联合平差以及控制测量数据管理系统等内容;此外,还简介了参考椭球定位, 1980年国家大地坐标系,坐标变换及工程测量中投影带和投影面选择等概念。力求在加强基础理论和方法的基础上,理论联系实际,反映近代控制测量新发展。

本书由孔祥元和梅是义主编,参加编写工作的有:张琰、岑虹、姚优华、郭际明等。

本书承邢永昌教授、刘近伯副教授初审,朱鸿禧教授复审,并经测绘教材评委会审定通过,作为全国普通高等教育测绘类规划教材。在审定过程中提出了许多宝贵的意见和建议,在此谨致衷心的感谢。由于编者水平有限,对书中可能存在的不足和错误之处,敬请读者批评指正。

编者

1996年5月

目 录

第二篇 地球椭球与高斯投影

第七章 椭球面上的测量计算

- § 7.1 地球椭球的基本几何参数及其相互关系 (1)
- § 7.2 椭球面上的常用坐标系及其相互关系 (3)
- § 7.3 椭球面上的几种曲率半径 (7)
- § 7.4 椭球面上的弧长计算 (12)
- § 7.5 大地线 (15)
- § 7.6 将地面观测的方向值归算至椭球面 (18)
- § 7.7 将地面观测的长度归算至椭球面 (23)
- § 7.8 椭球面上三角形的解算 (26)
- § 7.9 大地主题解算的高斯平均引数公式 (28)

第八章 椭球面元素归算至高斯平面——高斯投影

- § 8.1 高斯投影概述 (38)
- § 8.2 正形投影的一般条件 (42)
- § 8.3 高斯投影坐标正反算公式 (47)
- § 8.4 高斯投影坐标计算的实用公式及算例 (53)
- § 8.5 平面子午线收敛角公式 (60)
- § 8.6 方向改化公式 (64)
- § 8.7 距离改化公式 (69)
- § 8.8 高斯投影的邻带换算 (74)
- § 8.9 高斯-克吕格投影族及横轴墨卡托投影(UTM 投影)概念 (85)
- § 8.10 工程测量投影面与投影带选择的概念 (87)

第九章 控制测量概算

- § 9.1 概算的准备工作 (92)
- § 9.2 观测成果化至标石中心的计算 (93)
- § 9.3 观测值化至椭球面上的计算 (96)
- § 9.4 椭球面上的观测值化至高斯平面上的计算 (99)
- § 9.5 依控制网几何条件检查观测质量 (100)
- § 9.6 资用坐标计算 (102)
- § 9.7 三角网概算算例 (103)

第十章 参考椭球定位和不同坐标系之间的换算	
§ 10.1 建立大地坐标系的基本原理	(113)
§ 10.2 参心坐标系	(114)
§ 10.3 我国大地坐标系	(116)
§ 10.4 不同坐标系之间的变换	(117)
§ 10.5 地心坐标系	(121)
§ 10.6 站心坐标系	(122)
第三篇 测量控制网平差计算与数据管理	
第十一章 工程控制网条件平差	
§ 11.1 三角网的条件及条件方程式	(125)
§ 11.2 测边网的条件及条件方程式	(136)
§ 11.3 边角网的条件及条件方程式	(144)
§ 11.4 工程水平控制网条件平差算例	(151)
第十二章 工程控制网间接平差	
§ 12.1 三角网坐标平差	(167)
§ 12.2 测边网与边角网间接平差	(174)
§ 12.3 观测值权的确定和方差估计	(180)
§ 12.4 三角网方向坐标平差算例	(185)
§ 12.5 测边网间接平差教学程序及算例	(193)
§ 12.6 边角网间接平差程序及算例	(202)
第十三章 工程控制网近代平差与数据管理	
§ 13.1 近代测量平差发展概况	(217)
§ 13.2 带有未知数的条件方程式	(219)
§ 13.3 带有条件的间接平差	(225)
§ 13.4 工程控制网相关分解平差	(226)
§ 13.5 GPS网与地面网联合平差	(239)
§ 13.6 工程控制网数据库系统设计概念	(257)
主要参考文献	(262)

第二篇 地球椭球与高斯投影

第七章 椭球面上的测量计算

本章前五节内容讲述地球椭球的数学性质,其中包括:地球椭球,椭球的基本几何参数,基本坐标系及其相互关系,椭球面上的曲率半径及弧长,大地线定义及其微分方程等,这些是学习本章及以后其它内容的基础。§7.6及§7.7讲述椭球面同地面之间的关系,即将地面观测元素,其中包括天文方位角、水平方向及斜距等归算至椭球面上的公式和方法,从而为椭球面上点的位置坐标计算做好数据准备。最后两节讲述椭球面上点的大地坐标计算,其中主要介绍高斯中纬度公式。

§7.1 地球椭球的基本几何参数及其相互关系

7.1.1 地球椭球的基本几何参数

在控制测量中,用来代表地球的椭球叫作地球椭球,通常简称椭球,它是地球的数学代表。具有一定几何参数、定位及定向的用以代表某一地区大地水准面的地球椭球叫作参考椭球。地面上一切观测元素都应归算到参考椭球面上,并在这个面上进行计算。参考椭球面是大地测量计算的基准面,同时又是研究地球形状和地图投影的参考面。

地球椭球是经过适当选择的旋转椭球。旋转椭球是椭圆绕其短轴旋转而成的几何形体。在图7-1中。 O 是椭球中心, NS 为旋转轴, a 为长半轴, b 为短半轴。包含旋转轴的平面与椭球面相截所得的椭圆,叫子午圈(或经圈,或子午椭圆),如 $NKAS$ 。旋转椭球面上所有的子午圈的大小都是一样的。垂直于旋转轴的平面与椭球面相截所得的圆,叫平行圈(或纬圈),如 QKQ' 。通过椭球中心的平行圈,叫赤道,如 EAE' 。赤道是最大的平行圈,而南、北极点是最小的平行圈。

旋转椭球的形状和大小是由子午椭圆的五个基本几何参数(或称元素)来决定的,它们是:

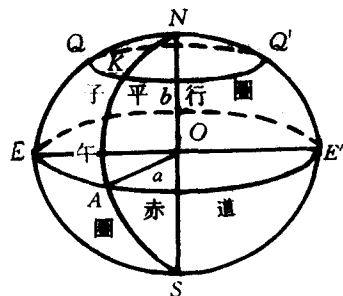


图7-1

$$\begin{aligned} \text{椭圆的长半轴} & a \\ \text{椭圆的短半轴} & b \\ \text{椭圆的扁率} & \alpha = \frac{a-b}{a} \end{aligned} \quad (7-1)$$

$$\text{椭圆的第一偏心率} \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (7-2)$$

$$\text{椭圆的第二偏心率} \quad e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \quad (7-3)$$

其中 a, b 称为长度元素；扁率 α 反映了椭球体的扁平程度，如当 $a=b$ 时， $\alpha=0$ ，椭球变为球体；当 b 减小时， α 增大，则椭球体变扁；当 $b=0$ 时， $\alpha=1$ 时，则变为平面。因此 α 值介于 1 和 0 之间。偏心率 e 和 e' 是子午椭圆的焦点离开中心的距离与椭圆半径之比，它们也反映椭球体的扁平程度，偏心率愈大，椭球愈扁，其数值恒小于 1。

决定旋转椭球的形状和大小，只需知道五个参数中的两个参数就够了，但其中至少有一个长度元素（比如 a 或 b ），通常习惯于用 a, e^2 或 a, e'^2 或 a, α ，因为其中包含一个小于 1 的量，便于级数展开。

为简化书写，还常引入以下符号

$$c = \frac{a^2}{b}, \quad t = \operatorname{tg} B, \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B \quad (7-4)$$

式中 B 是大地纬度；以后在 § 7.3 中将会看到， c 有明确的几何意义，它是极点处的子午线曲率半径。

此外，还有两个常用的辅助函数

$$\left. \begin{aligned} W &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \\ V &= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B} \end{aligned} \right\} \quad (7-5)$$

传统大地测量利用天文大地测量和重力测量资料推求地球椭球的几何参数。19 世纪以来，已经求出许多地球椭球参数，比较著名的有贝塞尔椭球（1841 年），克拉克椭球（1866 年），海福特椭球（1910 年）和克拉索夫斯基椭球（1940 年）等。60 年代以来，空间大地测量学的兴起和发展，为研究地球形状和引力场开辟了新途径。国际大地测量和地球物理联合会（IUGG）已推荐了更精密的椭球参数，比如第十六届 IUGG 大会（1975 年）推荐的 1975 国际椭球参数等。建国以来，我国采用 1954 年北京坐标系应用的是克拉索夫斯基椭球；以后将采用的 1980 国家大地坐标系应用的是 1975 国际椭球；而全球定位系统（GPS）应用的是 WGS-84 系椭球参数。今把这三个椭球元素值列于表 7-1。

椭球体参数值

表 7-1

	克拉索夫斯基椭球体	1975 年国际椭球体	WGS-84 椭球体
a	6 378 245.000 000 000 0(m)	6 378 140.000 000 000 0(m)	6 378 137.000 000 000 0(m)
b	6 356 863.018 773 047 3(m)	6 356 755.288 157 528 7(m)	6 356 752.314 2(m)
c	6 399 698.901 782 711 0(m)	6 399 596.651 988 010 5(m)	6 399 593.625 8(m)
α	1/298.3	1/298.257	1/298.257 223 563
e^2	0.006 693 421 622 966	0.006 694 384 999 588	0.006 694 379 901 3
e'^2	0.006 738 525 414 683	0.006 739 501 819 473	0.006 739 496 742 27

7.1.2 地球椭球参数间的相互关系

依(7-1)~(7-3)式,可很容易导出各参数间的关系式,下面仅以 e 和 e' 的关系式为例作一推导。由(7-2)及(7-3)式,得

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad 1 + e'^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

进而得
于是有

$$(1 - e^2)(1 + e'^2) = 1 \quad (7-6)$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}, \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad (7-7)$$

其它元素间的关系式也可以类似地导出。现把有关的关系式归纳如下:

$$\left. \begin{aligned} a &= b \sqrt{1 + e'^2}, & b &= a \sqrt{1 - e^2} \\ c &= a \sqrt{1 + e'^2}, & a &= c \sqrt{1 - e^2} \\ e' &= e \sqrt{1 + e'^2}, & e &= e' \sqrt{1 - e^2} \\ V &= W \sqrt{1 + e'^2}, & W &= V \sqrt{1 - e^2} \\ e^2 &= 2\alpha - \alpha^2 \approx 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (7-8)$$

此外,还有关系式

$$\left. \begin{aligned} W &= \sqrt{1 - e^2} \cdot V = \left(\frac{b}{a}\right) \cdot V \\ V &= \sqrt{1 + e'^2} \cdot W = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot W \\ W^2 &= 1 - e^2 \sin^2 B = (1 - e^2)V^2 \\ V^2 &= 1 + \eta^2 = (1 + e'^2)W^2 \end{aligned} \right\} \quad (7-9)$$

§ 7.2 椭球面上的常用坐标系及其相互关系

为了表示椭球面上点的位置,必须建立相应的坐标系。通常采用以下四种坐标系:大地坐标系、空间直角坐标系、子午平面直角坐标系及大地极坐标系。

7.2.1 各种坐标系的建立

1. 大地坐标系

如图 7-2 所示, P 点的子午面 NPS 与起始子午面 NGS 所构成的二面角 L , 叫做 P 点的大地经度, 由起始子午面起算, 向东为正, 叫东经 ($0^\circ \sim 180^\circ$), 向西为负, 叫西经 ($0^\circ \sim 180^\circ$)。 P 点的法线 Pn 与赤道面的夹角 B , 叫做 P 点的大地纬度, 由赤道面起算, 向北为正, 叫北纬 ($0^\circ \sim 90^\circ$); 向南为负, 叫南纬 ($0^\circ \sim 90^\circ$)。在该坐标系中, P 点的位置用 L, B 表示。如果点不在椭球

面上,表示点的位置除 L, B 外,还要附加另一参数——大地高 H ,它同正常高 $H_{正*}$ 及正高 $H_{正}$ 有如下关系

$$\left. \begin{aligned} H &= H_{正*} + \zeta(\text{高程异常}) \\ H &= H_{正} + N(\text{大地水准面差距}) \end{aligned} \right\} (7-10)$$

显然,如果点在椭球面上, $H=0$ 。

大地坐标系是大地测量的基本坐标系,它具有如下的优点:

1)它是整个椭球体上统一的坐标系,是全世界通用的最方便的坐标系。经纬线是地形图的基本线,所以在测图及制图中应用这种坐标系。

2)它与同一点的天文坐标(天文经纬度)比较,可以确定该点的垂线偏差的大小。

因此,大地坐标系对于大地测量计算,研究地球形状和编制地图等都很有用。

2. 空间直角坐标系

如图 7-3 所示,以椭球体中心 O 为原点,起始子午面与赤道面交线为 X 轴,在赤道面上与 X 轴正交的方向为 Y 轴,椭球体的旋转轴为 Z 轴,构成右手坐标系 $O-XYZ$,在该坐标系中, P 点的位置用 X, Y, Z 表示。

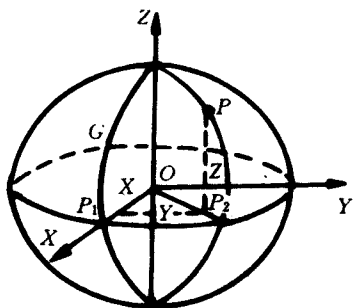


图 7-3

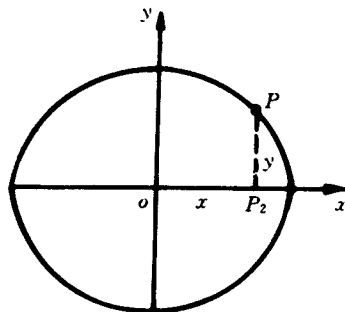


图 7-4

3. 子午面直角坐标系

如图 7-4 所示,设 P 点的大地经度为 L ,在过 P 点的子午面上,以子午圈椭圆中心为原点,建立 x, y 平面直角坐标系。在该坐标系中, P 点的位置用 L, x, y 表示。

4. 大地极坐标系

在图 7-5 中, M 为椭圆体面上任意一点, MN 为过 M 点的子午线, S 为连结 MP 的大地线长, A 为大地线在 M 点的方位角。以 M 为极点, MN 为极轴, S 为极径, A 为极角,这样就构成大地极坐标系。在该坐标系中 P 点的位置用 S, A 表示。

椭球面上点的极坐标 (S, A) 与大地坐标 (L, B) 可以

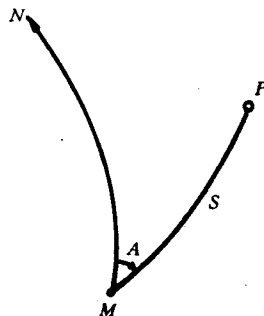


图 7-5

互相换算,这种换算叫做大地主题解算(见 § 7.9)。

7.2.2 各坐标系间的关系

如上所述,椭球面上的点位可在各种坐标系中表示,由于所用坐标系不同,表现出来的坐标值也不同。既然各种坐标系均可用来表示同一点的位置,那么它们之间必然存在有内部联系。因此,必须寻找出各坐标系的内在联系和规律,从而解决各种坐标系的变换问题,为以后的某些理论推导作必要的准备。

1. 子午平面直角坐标系同大地坐标系的关系

在这两个坐标系中, L 是相同的,因此,问题在于推求 x, y 同 B 的关系。

如图 7-6 所示,过 P 点作法线 Pn ,它与 x 轴之夹角为 B ,过 P 点作子午圈的切线 TP ,它与 x 轴的夹角为 $(90^\circ + B)$ 。由解析几何学可知,该夹角的正切值叫曲线在 P 点处之切线的斜率,它等于曲线在该点处的一阶导数:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(90^\circ + B) = -\operatorname{ctg}B \quad (7-11)$$

又由于 P 点在以 O 为中心的子午椭圆上,故它的直角坐标 x, y 必满足下面方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7-12)$$

上式对 x 取导数,得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \quad (7-13)$$

将此式同(7-11)式比较可得

$$\operatorname{ctg}B = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} = (1 - e^2) \frac{x}{y}$$

所以

$$y = x(1 - e^2)\operatorname{tg}B \quad (7-14)$$

将上式代入(7-12)式中,得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2(1 - e^2)^2\operatorname{tg}^2B}{b^2} = 1 \quad (7-15)$$

用 $a^2\cos^2B$ 乘上式两边,得

$$x^2\{\cos^2B + (1 - e^2)\sin^2B\} = a^2\cos^2B$$

或

$$x^2(1 - e^2\sin^2B) = a^2\cos^2B$$

由此得

$$x = \frac{a\cos B}{\sqrt{1 - e^2\sin^2B}} = \frac{a\cos B}{W} \quad (7-16)$$

将上式代入(7-14)式中得

$$y = \frac{a(1 - e^2)\sin B}{\sqrt{1 - e^2\sin^2B}} = \frac{a}{W}(1 - e^2)\sin B = \frac{b\sin B}{V} \quad (7-17)$$

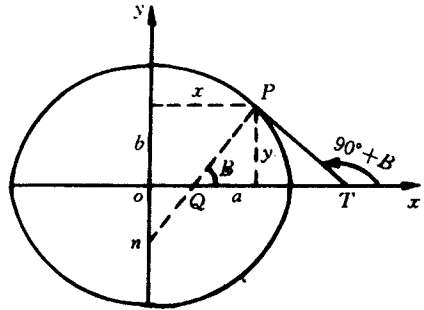


图 7-6

(7-16)及(7-17)式即为子午面直角坐标 x, y 同大地纬度 B 的关系式。

如果设 $Pn=N$ (N 的意义在 § 7.3 中解释), 由图直接看出

$$x = N \cos B \quad (7-18)$$

与(7-16)式比较, 可知

$$N = \frac{a}{W} \quad (7-19)$$

于是有

$$y = N(1 - e^2) \sin B \quad (7-20)$$

又由图直接看出

$$y = PQ \sin B \quad (7-21)$$

与(7-20)式比较可知

$$PQ = N(1 - e^2), \quad (7-22)$$

显然

$$Qn = Ne^2 \quad (7-23)$$

以上二式, 指明了法线 Pn 在赤道两侧的长度, 知道这个结论, 对今后某些公式推导是比较方便的。

2. 空间直角坐标系同子午面直角坐标系的关系

注意到图 7-3 及图 7-4 中, 空间直角坐标系中的 P_2P 相当于子午平面直角坐标系中的 y , 前者的 OP_2 相当于后者的 x , 并且二者的经度 L 相同。于是由图 7-3 直接可以得到

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos L \\ Y &= x \sin L \\ Z &= y \end{aligned} \right\} \quad (7-24)$$

3. 空间直角坐标系同大地坐标系的关系

将(7-18)式及(7-20)式代入上式, 易得

$$\left. \begin{aligned} X &= N \cos B \cos L \\ Y &= N \cos B \sin L \\ Z &= N(1 - e^2) \sin B \end{aligned} \right\} \quad (7-25)$$

如果将(7-16)式及(7-17)式代入, 则得

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{a \cos B}{W} \cos L \\ Y &= \frac{a \cos B}{W} \sin L \\ Z &= \frac{b \sin B}{V} \end{aligned} \right\} \quad (7-26)$$

如果 P 点不在椭球面上, 如图 7-7 所示。设大地高为 H , P 点在椭球面上投影为 P_0 , 显然

$$\rho = \rho_0 + Hn \quad (7-27)$$

由于

$$\rho_0 = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \cos B \cos L \\ \cos B \sin L \\ (1 - e^2) \sin B \end{bmatrix} \quad (7-28)$$

外法线单位矢量

$$n = \begin{bmatrix} \cos B \cos L \\ \cos B \sin L \\ \sin B \end{bmatrix} \quad (7-29)$$

因此有式

$$\rho = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+H)\cos B \cos L \\ (N+H)\cos B \sin L \\ [N(1-e^2)+H]\sin B \end{bmatrix} \quad (7-30)$$

当已知 P 点的空间直角坐标计算相应大地坐标时,对大地经度 L 有式

$$\left. \begin{aligned} L &= \arctg \frac{Y}{X} \\ \text{或} \quad L &= \arcsin \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \\ \text{或} \quad L &= \arccos \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \end{aligned} \right\} (7-31)$$

大地纬度 B 的计算比较复杂,通常采用迭代法,如图 7-8。 $PP''=Z$, $OP''=\sqrt{X^2+Y^2}$, $PP'''=OK_P=Ne^2\sin B$, $OQ=Ne^2\cos B$,由图可知

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z + Ne^2 \sin B}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad (7-32)$$

$$\text{或} \quad \operatorname{ctg} B = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2} - Ne^2 \cos B}{Z} \quad (7-33)$$

(7-32)式右端有待定量 B ,需要迭代计算。迭代时可取 $\operatorname{tg} B_1 = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}$,用 B 的初值 B_1 计算 N_1 和 $\sin B_1$,按(7-32)式进行第二次迭代,直至最后两次 B 值之差小于允许误差为止。

当已知大地纬度 B 时,按下式计算大地高

$$H = \frac{Z}{\sin B} - N(1 - e^2) \quad (7-34)$$

$$\text{或} \quad H = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos B} - N \quad (7-35)$$

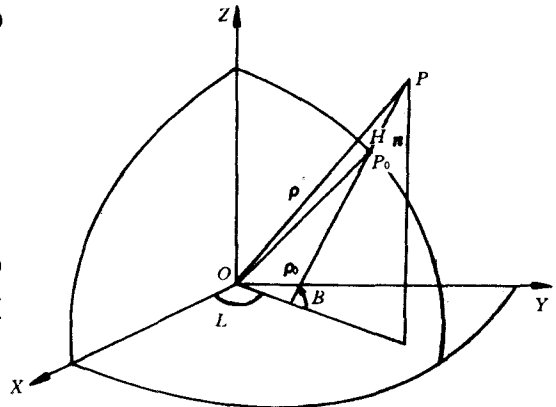


图 7-7

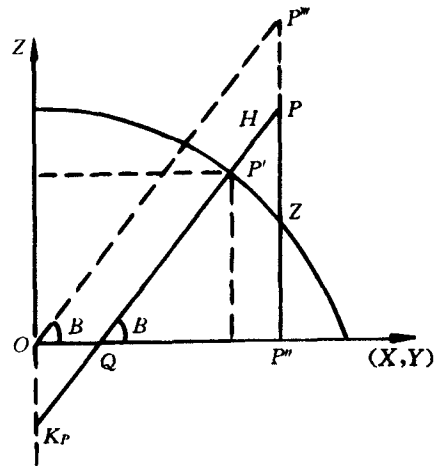


图 7-8

§ 7.3 椭球面上的几种曲率半径

为了在椭球面上进行控制测量计算,就必须了解椭球面上有关曲线的性质。过椭球面上任意一点可作一条垂直于椭球面的法线,包含这条法线的平面叫做法截面,法截面同椭球面交线叫法截线(或法截弧)。可见,要研究椭球面上曲线的性质,就要研究法截线的性质,而法截线的曲率半径便是一个基本内容。

包含椭球面一点的法线,可作无数多个法截面,相应有无数多个法截线。椭球面上的法截

线曲率半径不同于球面上的法截线曲率半径都等于圆球的半径,而是不同方向的法截弧的曲率半径都不相同。因此,本节首先研究子午线及卯酉线的曲率半径,在此基础上再研究平均曲率半径及任意方向的曲率半径公式。

7.3.1 子午圈曲率半径

在如图 7-9 所示的子午椭圆的一部分上取一微分弧长 $DK=dS$,相应地有坐标增量 dx ,点 n 是微分弧 dS 的曲率中心,于是线段 Dn 及 Kn 便是子午圈曲率半径 M 。

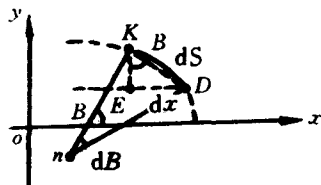


图 7-9

由任意平面曲线的曲率半径的定义公式,易知

$$M = \frac{dS}{dB} \quad (7-36)$$

从微分三角形 DKE 可求得

$$dS = \frac{-dx}{\sin B} \quad (7-37)$$

式中 dx 之所以取负号,那是因为子午椭圆上点的横坐标随着纬度 B 的增加而缩小的原因。

将上式代入(7-36)式,得

$$M = -\frac{dx}{dB} \cdot \frac{1}{\sin B} \quad (7-38)$$

由(7-16)式可求得

$$\frac{dx}{dB} = a \left[\frac{-\sin BW - \cos B \frac{dW}{dB}}{W^2} \right] \quad (7-39)$$

由于

$$\frac{dW}{dB} = \frac{d\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}{dB} = \frac{-2e^2\sin B\cos B}{2\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} = \frac{-e^2\sin B\cos B}{W} \quad (7-40)$$

将上式代入(7-39)式,得

$$\frac{dx}{dB} = -a\sin B \left(\frac{1}{W} - \frac{e^2\cos^2 B}{W^3} \right) = -\frac{a\sin B}{W^3} (W^2 - e^2\cos^2 B) \quad (7-41)$$

又因

$$W^2 = 1 - e^2\sin^2 B$$

则有

$$\frac{dx}{dB} = -\frac{a\sin B}{W^3} (1 - e^2\sin^2 B - e^2\cos^2 B) \quad (7-42)$$

或

$$\frac{dx}{dB} = -\frac{a\sin B}{W^3} (1 - e^2) \quad (7-43)$$

顾及(7-43)式,则曲率半径公式(7-38)变为

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} \quad (7-44)$$

顾及(7-8)及(7-19)式中有关公式,上式又可写成

$$M = \frac{c}{V^3} \quad \text{或} \quad M = \frac{N}{V^2} \quad (7-45)$$

(7-44)及(7-45)式即为子午圈曲率半径的计算公式。由这些公式可知, M 与 B 有关, 它随 B 的增大而增大, 变化规律如表 7-2 所列。

表 7-2

B	M	说 明
$B=0^\circ$	$M_0 = a(1-e^2) = \frac{c}{\sqrt{(1+e^2)^3}}$	在赤道上, M 小于赤道半径 a
$0^\circ < B < 90^\circ$	$a(1-e^2) < M < c$	此间 M 随纬度的增大而增大
$B=90^\circ$	$M_{90} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = c$	在极点上, M 等于极点曲率半径 c

由表中可知, § 7.1 中给出的极曲率半径 c 的几何意义就是椭球体在极点(两极)的曲率半径。

7.3.2 卯酉圈曲率半径

过椭球面上一点的法线, 可作无限个法截面, 其中一个与该点子午面相垂直的法截面同椭球面相截形成的闭合的圈称为卯酉圈。如图 7-10 中 PEE' 即为过 P 点的卯酉圈。卯酉圈的曲率半径用 N 表示。

为了推求 N 的计算公式, 过 P 点(图 7-10)作以 O' 为中心的平行圈 PHK 的切线 PT , 该切线位于垂直于子午面的平行圈平面内。因卯酉圈也垂直于子午面, 故 PT 也是卯酉圈在 P 点处的切线。即 PT 垂直于 Pn 。所以 PT 是平行圈 PHK 及卯酉圈 PEE' 在 P 点处的公切线。

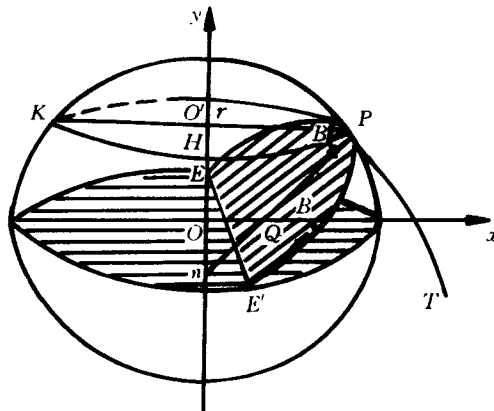


图 7-10

由麦尼尔定理知, 假设通过曲面上一点引两条截弧, 一为法截弧, 一为斜截弧, 且在该点上这两条截弧具有公共切线, 这时斜截弧在该点处的曲率半径等于法截弧的曲率半径乘以两截弧平面夹角的余弦。

由图 7-10 可知, 平行圈平面与卯酉圈平面之间的夹角, 即为大地纬度 B , 如果平行圈的半径用 r 表示, 则有

$$r = N \cos B \quad (7-46)$$

又据图 7-6 可知, 平行圈半径 r 就等于 P 点的横坐标 x , 亦即

$$x = r = \frac{a \cos B}{W} \quad (7-47)$$

因此, 卯酉圈曲率半径

$$N = \frac{a}{W} \quad (7-48)$$

顾及(7-8)式中有关公式,上式又可写为

$$N = \frac{c}{V} \quad (7-49)$$

(7-48)及(7-49)式即为卯酉圈曲率半径的计算公式。

由图 7-10 可以看出:

$$Pn = N = \frac{PO'}{\cos B} = \frac{r}{\cos B} \quad (7-50)$$

这就是说,卯酉圈曲率半径恰好等于法线介于椭球面和短轴之间的长度,亦即卯酉圈的曲率中心位在椭球的旋转轴上。

由 N 的计算公式(7-48)和(7-49)可知, N 与 B 有关,且随 B 的增大而增大,其变化规律如表 7-3。

表 7-3

B	N	说 明
$B=0^\circ$	$N_0 = a = \frac{c}{\sqrt{1+e^2}}$	此时卯酉圈变为赤道, N 即为赤道半径 a
$0^\circ < B < 90^\circ$	$a < N < c$	此间 N 随纬度的增加而增加
$B=90^\circ$	$N_{90} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = c$	此时卯酉圈变为子午圈, N 即为极点的曲率半径 c

以上讨论的子午圈曲率半径 M 及卯酉圈曲率半径 N , 是两个互相垂直的法截弧的曲率半径,这在微分几何中统称为主曲率半径。

在实际计算中,还经常引用下面两个符号

$$\left. \begin{aligned} (1) &= \frac{\rho'}{M} \\ (2) &= \frac{\rho'}{N} \end{aligned} \right\} \quad (7-51)$$

(1)和(2)的数值可以直接算得,也可在《大地坐标计算用表》中以 B 为引数查取。

7.3.3 任意法截弧的曲率半径

我们知道,子午法截弧是南北方向,其方位角为 0° 或 180° 。卯酉法截弧是东西方向,其方位角为 90° 或 270° ,这两个法截弧在 P 点是正交的,如图 7-11。现在来讨论在 P 点方位角为 A 的任意法截弧的曲率半径 R_A 的计算公式。

按尤拉公式,由曲面上任意一点主曲率半径计算该点任意方位角 A 的法截弧的曲率半径的公式为

$$\frac{1}{R_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N} \quad (7-52)$$

上式可改写成

$$R_A = \frac{MN}{N\cos^2 A + M\sin^2 A} \quad (7-53)$$

将上式分子分母同除以 M ,并顾及

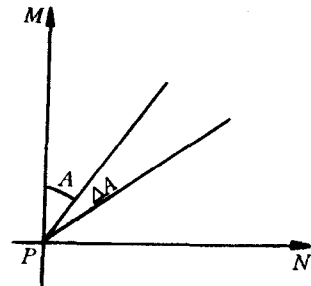


图 7-11

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + \eta^2 \quad (7-54)$$

于是

$$R_A = \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 A} = \frac{N}{1 + e'^2 \cos^2 B \cos^2 A} \quad (7-55)$$

上式即为任意方向 A 的法截弧的曲率半径的计算公式。为了实用,还需对它进行某些变化。将(7-55)式展开级数:

$$R_A = N(1 - \eta^2 \cos^2 A + \eta^4 \cos^4 A + \dots)$$

实际上,总是用平均曲率半径 R 代替 N , $N = R \sqrt{1 + \eta^2} \approx R(1 + \frac{1}{2}\eta^2)$ 。将此式代入上式,并略去 η^4 项,可得

$$\begin{aligned} R_A &= R \left(1 + \frac{1}{2}\eta^2\right) (1 - \eta^2 \cos^2 A) \\ &= R - \frac{R}{2} e'^2 \cos^2 B \cos 2A = R + \Delta \end{aligned} \quad (7-56)$$

式中

$$\Delta = -\frac{R}{2} e'^2 \cos^2 B \cos 2A \quad (7-57)$$

式(7-56)即为任意方向法截弧曲率半径的实用公式。式中 R 和 Δ 均可在《一、二等基线测量细则》的附表“任意法截弧曲率半径计算用表”中分别以 B 和以 B 与 A 为引数查取。

从 R_A 的计算公式可知, R_A 不仅与点的纬度 B 有关,而且还与过该点的法截弧的方位角 A 有关。当 $A=0^\circ$ (或 180°) 时, R_A 值为最小,这时(7-55)式变为计算子午圈曲率半径的(7-45)式,即 $R_0=M$; 当 $R_A=90^\circ$ (或 270°) 时, R_A 值为最大,这时的曲率半径 R_A 即为卯酉圈曲率半径,即 $R_{90}=N$ 。由此可见,主曲率半径 M 及 N 是 R_A 的极小值及极大值。

从(7-55)式还可知,当 A 由 $0^\circ \rightarrow 90^\circ$ 时, R_A 之值由 $M \rightarrow N$, 当 A 由 $90^\circ \rightarrow 180^\circ$ 时, R_A 值由 $N \rightarrow M$, 可见 R_A 值的变化是以 90° 为周期且与子午圈和卯酉圈对称的。

7.3.4 平均曲率半径

由于 R_A 的数值随方位而变化,这给测量计算带来不便。在测量工作中往往根据一定的精度要求,在一定范围内,把椭球面当作球面来处理,为此就要推求这个球面的半径——平均曲率半径。

所谓平均曲率半径就是过椭球面上一点的一切法截弧(从 $0 \rightarrow 2\pi$),当其数目趋于无穷时,它们的曲率半径的算术平均值的极限,用 R 表示,其计算公式为

$$R = \sqrt{MN} \quad (7-58)$$

或

$$R = \frac{b}{W^2} = \frac{c}{V^2} = \frac{N}{V} = \frac{a}{W^2} \sqrt{1 - e^2} \quad (7-59)$$

因此,椭球面上任意一点的平均曲率半径 R 等于该点子午圈曲率半径 M 和卯酉圈曲率半径 N 的几何平均值。

7.3.5 M, N, R 的关系

椭球面上某一点 M, N, R 均是从该点起沿法线向内量取,它们的长度通常是不相等的,由