近似数的计算

郭夫先编著

河南人民出版社

前　言

近似数据的計算在日常生活中使用得很广泛。但我們常常将近似数据的运算，当作了眞实数据的运算，因而浪費了精力和时間。苏联造船工程师阿列克謝·尼考拉也維奇·克雷洛夫院士創造了这种近似数据的計算方法，这在科学事业上是个很大的貢献。

本书系編选了一些有关近似数計算的基础知識，及其基本运算方法，并結合本人近年来講授近似計算时的一些心得体会，在編写时力求定理証明浅显易懂，方法簡便实用。本书可供初学者学习之用，也可为中等学校数学教师教学时的参考。但由于时間仓卒，又加本人能力所限，难免有不妥之处，希讀者指正！

目　录

第一章　近似数的基本概念

一　近似計算的概念

近似計算是杰出的俄罗斯数学家造船工程师阿列克謝·尼考拉也維奇·克雷洛夫院士(1863—1945)在工作实践中发现的。这給我們計算工作上带来极大的方便，使用这种計算既能节省时間，又能保証問題应用的足够准确度。

在我国工农业大跃进的年代里，一切經济核算、地形測量、机件設計及工程建筑，都要进行計算。这些計算若使用近似数的計算法則进行运算，便可在較短的时間里得出一个比較准确的数据来。

在日常生活中所遇到的数有两种：一种是精确的数值，这种数值我們称它为“眞值”，如我們班里有 45 个同学，“45”这个数便是眞数，因为学生可以一个一个的数出来；另一种数值我們称它为近似値。当我們不可能得到眞値的时候，就用近似値来代替。如載重量为 5 吨的汽車，这个載重量“5”便是近似値，因为它是个約数，若汽車上再多裝三斤五斤貨物仍然是可以的。

任何一个量全是有眞値的，但在某种情况下，眞値不易求得或者不能用有理数来表达，因而就需要用近似値来表示了。

二 絕对誤差与最大絕对誤差

在近似計算理論中，最重要的問題是定出所給数的誤差，以及在用近似数值运算中所得数值的誤差的求法。所以我們首先要弄清楚誤差的眞实意义。

誤差有两种：一种是絕对誤差，另一种是相对誤差。我們先来研究近似数的絕对誤差。

定义：某个量的眞值与其近似值的差的絕对值，称为这个近似值的絕对誤差。

若用A表示某个量的眞值，a表示它的近似值，α（讀阿尔法）表示絕对誤差，由定义則得：

$$\alpha = |A-a| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

其中記号 $|A-a|$ 代表A－a的絕对值。

从等式（1）可知

$$A = a \pm \alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

必須注意，对于大多数的量来說，数的絕对誤差是个完全假想的数，因为量的眞值往往不可能知道，所以眞值减去近似值所得的差也就常常不知道，只有在少数最不重要的情况下，我們才可以算出它的絕对誤差来，如5768.47元，略去角以下的数，得到整数5768元，那么它的絕对誤差等于：

$$\alpha = 5768.47\text{元} - 5768\text{元} = 0.47\text{元}。$$

但如度量物体的长度、重量等，便不能得到量的眞值。如果尽量要求准确，就可以使所得結果的上下差不超过所用仪器上最小刻度的一半（例如量长度时到0.5厘米）。換句話說，可以确定所允許的絕对誤差不超过某种数值，这个数值我們称它为最大絕对誤差。

如去掉百位以下的尾数所得数据为4600，那么去掉的尾数就在100以下，所以絕对誤差是小于100，也就是：

$$|4600-A|<100$$

因此，如果能够找到一个尽可能小的正数δa（讀为小得尔塔a），使$\propto$的絕对值不超过这个小的正数δa，也就是

$$|\propto|\leq\delta a \quad 卽 \quad |A-a|\leq\delta a$$

那么这个小的正数δa就叫做近似数a的最大絕对誤差。

有了近似数和它的最大絕对誤差，就能够知道近似数所表示的眞值的界限；因此最大絕对誤差是判断近似数准确度的方法之一。事实上由公式（2）知

$$a_1=A的上界=a+\propto \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$a_2=A的下界=a-\propto \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

例如：度量鋼梁长度时所得的近似长是82米，最大絕对誤差是0.5米，那么，鋼梁的眞实长度就在82.5米与81.5米之間，也就是鋼梁的眞实长度在下面两数之間：

$$上界=82+0.5=82.5（米）$$

$$下界=82-0.5=81.5（米）$$

同样，若知道了眞值的上下界，也就很容易求出眞值的任何近似值的最大絕对誤差。事实上（3）+（4）得

$$a_1+a_2=2a$$

故 $$a=\frac{a_1+a_2}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

（3）－（4）得 $a_1-a_2=2\propto$

故 $$\propto=\frac{a_1-a_2}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

但 $a-\propto\leq A\leq a+\propto$

故 $$a-\frac{a_1-a_2}{2}\leq A\leq a+\frac{a_1+a_2}{2}$$

$$-\frac{a_1-a_2}{2}\leq A-a\leq\frac{a_1+a_2}{2}$$

故 $$|A-a|\leq\frac{a_1-a_2}{2}$$

所以 $\alpha=\frac{a_1-a_2}{2}$ 是数 $a=\frac{a_1+a_2}{2}$ 的最大絕对誤差。

例如：已知3.14与3.15是π的不足近似値与过剩近似値。可以确定，数

$$a=\frac{3.14+3.15}{2}=3.145$$

是π的近似値，其最大絕对誤差

$$\alpha=\frac{3.15-3.14}{2}=0.005$$

在近似数的計算理論中，我們必須注意以下几点：

（1）最大絕对誤差通常写成只含一个数字的数，最精密的計算一般也只要两个数字就够了。

例如：$\delta a=0.243$，只用含一个較大的数字 $\delta a=0.3$ 来代替它，精密的計算用$\delta a=0.25$来代替。这里所取得的一个数字或是两个数字，是用去尾进一法得到的，并非是四舍五入。

（2）最大絕对誤差常冠以"±"号写在近似数的后面，以表示它的准确度。

例如：上例的鋼梁长度可写为82（±0.5）米。

（3）最大絕对誤差越小近似数的准确度越大，反之越

大絕对誤差越大近似数的准确度越小。

（4）絕对誤差等于 k 的近似数，常說这个近似数准确到k。

例如：我們在实用上常說准确到0.5与0.1的近似数，就是表明它們的最大絕对誤差分别是0.5和0.1

（5）两数和（a+b）、差（a−b）、积（ab）、商（$\frac{a}{b}$）的最大絕对誤差，分別用記号$\delta(a+b)$、$\delta(a-b)$、$\delta(ab)$与$\delta(\frac{a}{b})$来表示。

三　数的四舍五入法

在日常生活实际应用中，有时常不需要与实际完全相符的准确数。譬如說，郑州到开封的距离是142里，我們常說是140里，这样虽然少說了2里，但与实际的路程无大妨碍，因为这样能使人听到后有个明确的印象，而当他不需要知道确切数字时我們常是这样說的。又如：某城市的人口有2,693,831人，我們常說这个城市的人口約为2,700,000人。这两个近似数140与2,700,000都是用四舍五入法得到的，第一个数是四舍五入到十位数字，第二个数是四舍五入到十万位数字。

总之，四舍五入法就是把要参加計算的近似値或眞値右端的一个数字或几个数字割棄不要；但为了保証四舍五入后所得的数据能够有更大的准确度，我們特规定以下的四舍五入法规則：

某数四舍五入时，可略去数据中某位以下的数字，如果

略去的第一位数字小于5，那么保留下的数字就完全不动，而略去的数字用零代替（小数点后的零可不写）；如果略去的第一位数字大于或等于5，就把保留下的最末一位数字加上1，舍去的数字位数用零来代替（小数点后的零不写）。

例如：将876,492四舍五入到百位数字时，则得876,500；四舍五入到千位数字时，则得876,000

又如：将94.76824四舍五入到百分之一位时得94.77；四舍五入到千分之一位时，则得94.768

从以上二例可知，不論整数或小数，四舍五入到那位数字或几分之一位数字时，那位数字及几分之一位数字本身都不要再四舍五入。

日常生活中，也常用去尾法来取近似数，就是单单略去数据中末尾的几位数字，例如：696.743丈，去掉丈以下的尾数得696丈，去掉尺以下的尾数得696.7丈。

用四舍五入法所得的近似数，一般的都比用去尾法所得的近似数准确；例如467四舍五入到十位数字时得470，誤差为3个单位，若用去尾法去掉十位以下的数字則得460，誤差为7个单位。

四　有效数字与可靠数字

估計近似数的准确度，最簡便的方法是計算它的有效数字的个数。我們首先研究有效数字的定义。

定义：如果近似数的最大絕对誤差不超过某一位数字单位的半个单位，那么除第一位非零数字前的零外，由某一位起向左的所有数字都叫有效数字，向右的則是非有效数字。

例如：圓的直径为6.74厘米，如果最大絕对誤差不超过

0.005厘米，那么就有三个有效数字；如果最大絕对誤差为0.007厘米，那就只有两个有效数字了。

又如：将86400四舍五入到百位数字，就为三个有效数字，因为舍去的数字不超过50

为了分别有效数字与非有效数字的零，常把非有效数字的零写得小一点。如本例可写为864_{00}

把准确数7.9996四舍五入到千分之一位得8.000，这四位都是有效的，它与只有一位有效数字的$8._{000}$是有区别的，前者表示十分之一位，百分之一位与千分之一位（四舍五入后）都沒有数，而后者則表示对这三位数根本不知道是什么。

可靠数字与非可靠数字：

定义：如果近似数的最大絕对誤差不超过某一位数字单位的一个单位，那么除第一位非零数字前的零外，由某一位起，向左的所有数字都叫可靠数字。如果絕对誤差超过某位数字单位的一个单位，那么由这一位起，向右的所有数字都叫不可靠数字。

例如：73.82（±0.64）中，最大絕对誤差已超过十分之一位的一个单位，所以由十分之一位起，向右的8和2都是不可靠数字；但最大絕对誤差不超过个位数字的一个单位，所以由个位起向左的3和7都是可靠数字。

若知道了近似数据中有效数字或可靠数字的个数，就能够写出該近似数的最大絕对誤差。

例如：近似数678.60有5个有效数字，那么它的最大絕对誤差就是0.005；37_{00}中有两个可靠数字，那么它的最大絕对誤差就是100

我們必須注意到，某近似数有几个有效数字时就必定有几个可靠数字；但某数有几个可靠数字时却不一定有几个有效数字。例如：643.6（±0.72），有两位有效数字，三位可靠数字。

五　相对誤差与最大相对誤差

做一件衣服，丈量錯了1分米，我們便說裁縫的工作是很粗糙和不負責的；但若測量一段路程，誤差仍是1分米，我們便認为这个結果是很精确的。又如：称10吨煤，差了几斤便覚得沒有什么，但若称10斤米仍差了几斤，便感觉得差錯太大。因此，单純依靠絕对誤差的大小是不能表达度量結果的質量的，这也就是度量的質量与度量的本身大小有着密切的关系。根据这种情況，必須采用别的量来表示近似値的准确度，这种量便是“相对誤差”。

相对誤差的定义：

近似数的絕对誤差与近似数本身的比，叫做近似数的相对誤差。

用α'表示近似数a的相对誤差，α表示絕对誤差，则

$$\alpha'=\frac{\alpha}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（7）$$

因为近似数的絕对誤差常常不知道，所以相对誤差也就无从算起，因而必須用它的最大相对誤差来代替。

最大相对誤差的定义：近似数的最大絕对誤差与近似数本身的比，叫做近似数的最大相对誤差。

用δ'表示近似数a的最大相对誤差，

则
$$\delta'a=\frac{\delta a}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（8）$$

最大相对誤差常記作百分的形式，以便清楚地看出它的准确度。

測量的結果，相对誤差小时，准确度就大，質量就好；反之，相对誤差大时，准确度就小，質量也差。

现在举几个例子来說明这个問題。

例1：两次測得物体的重量是：250（±0.1克），450（±0.1克）。那一次較准确？

解 $\delta'_{250}=\dfrac{0.1}{250}=0.0004=0.04\%$

$\delta'_{450}=\dfrac{0.1}{450}=0.00022=0.022\%$

显然第二次測量較第一次准确得多。

例2：丈量长20公里的路段时，絕对誤差是1公里，若丈量500公里的路段，絕对誤差是4公里，那么那一次較准确？

解 $\delta'_{20}=\dfrac{1}{20}=0.05=5\%$

$\delta'_{500}=\dfrac{4}{500}=0.003=0.8\%$

虽然第二次的測量有較大的絕对誤差，但在測量工作的質量上却比第一次精密得多。

例3：两次度量出的角度为：21°37′3″（±1″）与5′12″（±1″）。那一次較准确？

解 $a_1=21°37'3''=77823''$

$a_2=5'12''=312''\qquad \alpha=1''$

故 $\delta'_{a_1}=\dfrac{1}{77823}\approx0.13\times10^{-4}=0.0013\%$

$\delta'_{a_2}=\dfrac{1}{312}\approx0.0032=0.32\%$

显然第一次度量出的角度較第二次准确得多。

在一般情况下，因为絕对誤差不易找到，所以今后用“絕对誤差”一詞代替最大絕对誤差，用“相对誤差”来代替最大相对誤差。

相对誤差、絕对誤差与有效数字可以互相來推求。

例4：已知近似数$a=218$，求δa及$\delta' a$

解∵$\delta_a=0.5$（末位数字的半个单位）

$$\therefore \delta'_a=\frac{0.5}{218}\approx 0.00229<0.0023=0.23\%$$

例5：設近似数$a=32.8$，$\delta'_a=0.5\%$，試求δ_a，并判定此近似数包含那样的数字？并求出它的上下界。

解 $$\because \delta'_a=\frac{\delta a}{a}$$

$$\therefore \delta_a=a\cdot\delta'_a=32.8\times\frac{0.5}{100}=0.164<0.17$$

故此近似数有两位有效数字，8为不可靠数字，它的眞值在

$32.8+0.17=32.97$与$32.8-0.17=32.63$之間。

练　习

1.某城市有3,748,648人，試四舍五入到（1）百位，（2）千位，（3）万位。

2.我国伟大的数学家祖冲之，求得π的眞值在3.1415926与3.1415927之間，如果用这两个数作为π的近似值，試求它的准确度。

3.下列各近似数，各有几位有效数字？

5.04　37.0　0.013　8704.1　34.00

4.地球赤道的直径长12,754公里，絕对誤差为500米，試求地球半径的界限。

5.π的两个近似值各为3.14与$3\frac{1}{7}$，那一个較准确？

6.操场的跑道长3841.478尺（±0.46），試分别其中都是什么数字？

7.角度41°与41.0°的写法之間有什么区别？

8.1958年苏联发射的第三顆人造地球卫星，若它繞地球一周所走的路程为51,840公里，試四舍五入到千位数字。

9.設a＝467，其中都是有效数字，試求δa与$\delta' a$

10.若a＝6874　$\delta' a = 0.4\%$

試判定此数中都包含那样的数字？并求此近似数真值的上下界。

11.度量角43°24′30″时有10″的絕对誤差，求此度量的准确度。

12.已知$\sqrt{10}$的近似值a的最大相对誤差等于1%，試判定此数中有多少位有效数字？

13.在测定47.36公里的长度时，丈量工作达到了5米的准确度，試求它的最大絕对誤差。

第二章　近似数据的計算

一　近似数据的加减法

分两种情况来敍述:

（1）小数点后位数相同的近似数的加减法:

譬如作一次化学試驗，共須四种药品在一起化合，这四种药品的重量是21.4克，5.6克，0.7克及34.2克，那么，化合后的总重量是

$$21.4+5.6+0.7+34.2=61.9（克）$$

如果每次称得的重量上下都不超过0.05克，那么，在这四次中称得的重量誤差应为0.05克×4＝0.2克。照这样計算結果中的末位数字9是不可靠的，就应当舍去不要，事实上这样处理是不恰当的，因为每次所称得的重量可能比实际多些，也可能比实际少些，加起来时它的誤差就可能对消掉，絕不能是每次都是多的或都是少的誤差，因此本例中的61.9的末位数字9也可能是准确的，并不一定舍去。

用例子說明这种事实:

試求下列分数的和，使結果准确到0.0001

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}$$

先求各分数的近似値，四舍五入到万分之一位，然后再

相加得:

$$0.0909+0.0833+0.0769+0.0715+0.0667+0.0625+0.0588+0.0556+0.0526=0.6188$$

在这些加数里，各个加数的最大絕对誤差都是0.00005，故和的最大絕对誤差应是$0.00005\times 9=0.00045$，因此和的末位数字 8 是不可靠的应該舍去，事实上，若先将各分数相加，再化为小数，则得:

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}$$

$$=\frac{144045379}{232792560}\approx 0.618871$$

小数点后的前四位小数还是相同的，这就說明了和的第四位数字 8 仍是可靠的。

根据实践的証明:

小数位数相同的近似数的加减的結果中，小数点后应保留的数字个数，与原近似数中小数点后的位数相同。

这个法則也并不是說这样得到的結果就能保証所得的数字都是可靠的。但在实践中証明，如果加数不太多时，絕大多数是不包含不可靠数字的。

（2）小数点后位数不同的近似数的加减法:

有直角三角形的园地一块，測得直角三角形的周长为81.4米，二直角边的和为37.876米，求斜边长。

在这个直角三角形中，二直角边虽然計算得很精确，但周长測量得确很粗糙，只准确到十分之一米。它的百分位、千分位都不知道，因而斜边长的百分位、千分位也就不可能知道，所以将二直角边四舍五入到十分位后得:

$$\begin{array}{r} 81.4 \\ -)\ 37.9 \\ \hline 43.5(\text{米}) \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{r} 81.4 \\ -)\ 37.88 \\ \hline 43.52(\text{米}) \end{array}$$

得数中小数点后的第一个数字是相同的。

又如：求近似数36.4＋4.676＋0.0006的和。

小数点后位数最少的是36.4，所以得数中只能保留小数点后一位小数，因为它的百分位、千分位都不知道。因而将4.676及0.0006四舍五入到百分位再相加得

$$\begin{array}{r} 36.4 \\ 4.68 \\ +)\ 0.00 \\ \hline 41.08 \end{array}$$

由以上二例，我們可得出下面的法則：

小数点后位数不同的近似数的加減結果中，小数点后应保留的数字个数与原近似数中最少的小数位数相同。

整数近似数的加减，与含有小数的近似数的加减法則相同。

例如：求53000＋6200＋4460的和。

加数中准确度最小的为53000，只准确到千位数字，所以結果中也只能准确到千位数字。因而将其他各数都四舍五入到百位数字再相加，得：

$$\begin{array}{r} 53000 \\ 6200 \\ +)\ 4500 \\ \hline 63700 \end{array}$$

$$63700 \approx 64000$$