21世纪高等教育系列规划教材
21SHIJI GAODENG JIAOYU XILIEGUIHUA JIAOCAI

高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

主　编　辛小龙
副主编　曹吉利 马保国 陈斯养 薛利敏
郝华宁 阎恩让 李红文 张永锋

下册

高等数学
ADVANCED MATHEMATICS

西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

21世纪高等教育系列规划教材

高等数学

下册

主　审　刘新平　熊必璠
主　编　辛小龙
副主编　曹吉利　马保国　陈斯养　薛利敏
　　　　郝华宁　阎恩让　李红文　张永锋

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学　下册/辛小龙主编. 一西安:西北大学出版社,2005.8

ISBN 7-5604-1965-8

Ⅰ.高...　Ⅱ.辛...　Ⅲ.高等数学一高等学校一教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第087260号

高等数学　下册

主　　编　辛小龙

出版发行　西北大学出版社
地　　址　西安市太白路229号
邮政编码　710069
购书电话　(029)88303313　88302590
经　　销　陕西省新华书店
印　　刷　陕西向阳印务有限公司印刷

开　　本　787毫米×960毫米　1/16开本
印　　张　22
字　　数　404千字
版　　次　2004年8月第1版　2006年8月第3次印刷
书　　号　ISBN 7-5604-1965-8/O·121
定　　价　24.00元

前　言

数学是研究客观世界数量关系与空间形式的科学.随着现代科学技术和数学科学的发展,"数量关系"和"空间形式"具备了更加丰富的内涵和更加广泛的外延.现代数学内容更加丰富,方法更加综合,应用更加广泛.数学不仅是一种工具,而且是一种思维模式;不仅是一种知识,而且是一种素养;不仅是一种科学,而且是一种文化,能否运用数学观念定量思维是衡量民族科学文化素质的一个重要标志.数学教育在培养高素质科学技术人才中具有其独特的、不可替代的重要作用.

高等学校理工综合类专业本科生的高等数学是必修的重要基础理论课.通过该课程的学习,应使学生获得一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、无穷级数与常微分方程等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能,为今后学习各类后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础.在传授知识的同时,要努力培养学生进行抽象思维和逻辑推理的思维能力、综合运用所学知识分析问题解决问题的能力和较强的自主学习能力,逐步培养创新精神和创新能力.此外,随着我国改革开放和经济社会的发展,我国高等教育事业也有了长足发展,特别是大学扩招,变原来的"精英教育"为大众教育,引起了生源的变化.所有这些都对大学数学教学改革和教材建设提出了新的要求.

多年来,我国也出现了许多优秀的大学高等数学教材.然而,现有的大多数教材比较适合工科院校的学生.面对扩招以后大学生源质量的变化,特别是对综合类、师范类院校的学生,这些教材都有明显的局限性,不适合这些院校的学生学习.因而编写一本以理工综合类院校学生为主要对象的高等数学教材是非常必要的,所以我们编写了本教材,力争本教材能够适合目前高等教育的现状,适合新世纪人才培养的要求,成为反映数学教学改革新思路、新方法,具有自己的特色的大学数学教材.

本教材是按照高等院校理工综合类本科专业学习本课程都应达到的基本要求编写的,其中带 * 号的条目是为某些相关专业选用的,也是对选用专业学生的基本要求.各院校根据自身情况,在达到基本要求的基础上,还可以提出一些较高的或特殊的要求.

参加本教材编写的学校有西北大学、陕西师范大学、延安大学、西安石油大学、陕西理工学院、宝鸡文理学院、咸阳师范学院、渭南师范学院、解放军第二炮

兵工程学院,共 9 所院校, 总负责是西北大学辛小龙教授.

对于本教材的编写,我们进行了充分的准备工作,由西北大学数学系和西北大学出版社组织以上参编单位的专家教授召开了数次教材编写研讨会,讨论了教材编写大纲、教材主要内容和教材编写特色,使得教材的编写工作有分工、有合作,有条不紊地进行.本教材的主编是西北大学的辛小龙教授,副主编是陕西理工学院的曹吉利教授、延安大学的马保国教授、陕西师范大学的陈斯养副教授、渭南师范学院的薛利敏副教授、西安石油大学的郝华宁教授、宝鸡文理学院的阎恩让教授、第二炮兵工程学院的李红文副教授和咸阳师范学院的张永锋副教授,编写成员与分工如下:西安石油大学的郝华宁教授(第 1 章)、咸阳师范学院的张永锋(第 2 章)、渭南师范学院的薛利敏(第 3,4 章)、延安大学的马保国教授(第 5 章)、陕西师范大学的陈斯养(第 6 章)、陕西理工学院的曹吉利教授(第 7,8 章)、第二炮兵工程学院的李红文(第 9 章)、西北大学的辛小龙教授(第 10 章)、西北大学的薛西峰(第 11 章)、宝鸡文理学院的阎恩让(第 12 章).另外,西北大学的荔炜编写了上、下册的附录.由辛小龙教授完成统稿、改写及校对工作;陕西师范大学的刘新平教授和西北大学的熊必璠教授对全书进行了审定.

本教材作为陕西省 21 世纪高等教育规划教材正式出版,是教育改革的产物.在此,我们感谢西北大学教务处、西北大学数学系和陕西师范大学、延安大学、西安石油大学、陕西理工学院、宝鸡文理学院、咸阳师范学院、渭南师范学院、解放军第二炮兵工程学院等院校的领导对本教材的出版所给予的鼎力支持,感谢刘新平教授和熊必璠教授详细审阅了本教材并提出了许多宝贵意见,感谢邢志栋教授、陈思养教授参加了教材编写研讨会并提出了许多有益的建议.我们特别感谢西北大学出版社和李宝宁编辑,由于他们的指导和帮助才使本书顺利与读者见面.

新世纪大学数学的教学改革是一项紧迫而艰巨的工作.我们虽然已经尽力想把本教材编写好,但由于水平有限,缺点和错误乃至问题一定在所难免,诚请读者批评指正.

编　者

2005 年 8 月

本书所用数学符号及其含义

N	自然数集合
N^- 或 N_-	正整数集合
Z	整数集合
Q	有理数集合
R	实数集合
C	复数集合
$\varnothing$	空集
$\forall x$	对一切 x
$\exists x$	存在 x
$\in$	属于
$\overline{\in}$ 或 $\notin$	不属于
$\subset$	含于
$\supset$	包含
$\cap$	交集
$\cup$	并集
$\backslash$	差集
$\lvert a \rvert$	a 的绝对值
$n!$	n 的阶乘，即 $1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$
$(2n)!!$	$2n$ 的双阶乘，即 $2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)$
$(2n-1)!!$	$(2n-1)$ 的双阶乘，即 $1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)$
$\binom{\alpha}{n}$	即$\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$（$\alpha$ 为实数）
$\binom{n}{k}$或 C_n^k	二项系数（从 n 个元素中每次取出 k 个元素所有不同组合的总数）即$\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot k}$

$\sum$	总和
$\prod$	连乘
%	百分比
∞	无穷大
[ ]	方括号,表示其中数的整数部分
{ }	花括号,表示其中数的分数部分
° ′ ″	度,分,秒(例 21°23′18″)
$\overset{\frown}{AB}$	弧
π	圆周率
∵	因为
∴	所以
$\lg x$	以 10 为底的对数(称为常用对数)
$\ln x$	以 e 为底的对数(称为自然对数)
e	自然对数的底
e^x 或 $\exp x$	指数函数(以 e 为底)
$\Gamma(\zeta)$	伽马函数(Γ－函数)
$\beta(p,q)$	贝塔函数(β－函数)
$\nearrow(\searrow)$	单调上升(单调下降)
$\rightarrow$	收敛于,趋于
sup	上确界
inf	下确界
max	最大
min	最小
Δx	x 的有限增量

目　录

第七章　向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，通过平面直角坐标系把平面上的点与一对有序数组相对应，把平面上的图形和方程相对应，从而用代数方法研究几何问题，空间解析几何也是如此.

空间解析几何在空间直角坐标系基础上，用代数方法讨论空间几何图形. 本章首先建立空间直角坐标系，其次引进向量并介绍向量的运算，然后以向量为工具讨论空间的平面和直线，最后介绍空间曲面、二次曲面和空间曲线.

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

过空间一定点 O 作三条两两垂直的数轴，它们都以定点 O 为原点，且一般取相同的长度单位，这三条数轴分别为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴）. 它们的正向符合右手系（当右手的四个手指由 x 正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向）. 通常将 x 轴、y 轴放置在水平面上，z 轴为铅垂线，见图 7-1 所示，这样三条坐标轴就组成了空间直角坐标系，点 O 称为坐标原点. 每两条坐标轴确定的平面称为坐标面，分别是 xOy 面、yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分，称为八个卦限，并逐个编号为 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ，分别称为第一卦限，第二卦限，…，第八卦限，如图 7-2.

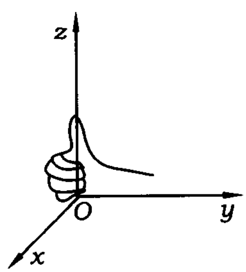

图 7-1

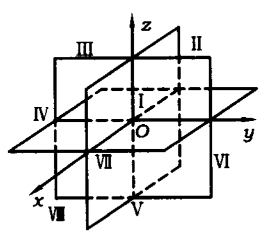

图 7-2

我们常采用的坐标系表示法有斜二侧，见图 7-1，及正等侧，见图 7-3.

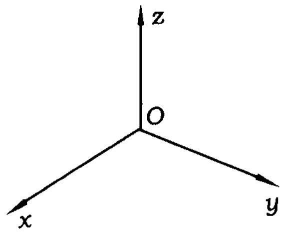

图 7-3

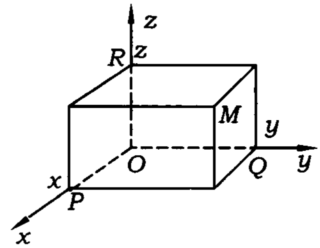

图 7-4

设 M 为空间的一点(见图 7-4)，过点 M 分别作三个与坐标轴垂直的平面，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P,Q,R，其坐标依次为 x,y,z，从而得到一个有序数组 (x,y,z)；反之，给定一有序数组 (x,y,z)，在 x 轴、y 轴、z 轴上分别作 $OP=x,OQ=y,OR=z$，然后过 P,Q,R 分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面，这三个平面确定了惟一的交点 M. 这样，空间点 M 就与有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应关系. 称 (x,y,z) 为点 M 的直角坐标，记为 $M(x,y,z)$，并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

二、空间两点间的距离

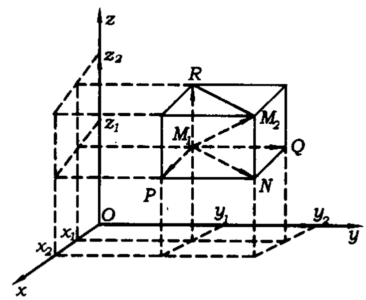

图 7-5

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，过 M_1，M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(见图 7-5). 因为

$$\begin{aligned} |M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 \\ &\quad + |NM_2|^2 \\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2, \end{aligned}$$

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1}$$

这就是两点间的距离公式.

例 1 设 P 是空间内一点，其坐标为 (x,y,z)，即 $P(x,y,z)$，求

(1) 点 P 引至各坐标轴的垂足之坐标为何?

(2) 点 P 引至各坐标面的垂足之坐标为何?

解 根据点与坐标的关系得

(1) 点 $P(x,y,z)$ 引至 Ox 轴的垂足之坐标为 $(x,0,0)$；

点 $P(x,y,z)$ 引至 Oy 轴的垂足之坐标为 $(0,y,0)$；

点 $P(x,y,z)$ 引至 Oz 轴的垂足之坐标为 $(0,0,z)$；

(2) 点 $P(x,y,z)$ 引至 xOy 坐标面的垂足坐标为 $(x,y,0)$；

点 $P(x,y,z)$ 引至 yOz 坐标面的垂足坐标为 $(0,y,z)$；

点 $P(x,y,z)$ 引至 xOz 坐标面的垂足坐标为 $(x,0,z)$.

例 2　设 $P(1,2,3)$ 关于各坐标轴与坐标面对称点之坐标是什么？

解　根据点与坐标及对称性的关系得

点 $P(1,2,3)$ 关于 Ox 轴对称点的坐标为 $(1,-2,-3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oy 轴对称点的坐标为 $(-1,2,-3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oz 轴对称点的坐标为 $(-1,-2,3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 xOy 面对称点的坐标为 $(1,2,-3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 yOz 面对称点的坐标为 $(-1,2,3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 zOx 面对称点的坐标为 $(1,-2,3)$.

例 3　在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 M 的坐标.

解　因为所求的点 M 在 z 轴上，所以可设该点坐标为 $M(0,0,z)$，根据题意有 $|MA|=|MB|$，即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$$

化简得 $z=\frac{14}{9}$，故所求的点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

习题 7.1

1. 设空间直角坐标系中任意一点 P 的坐标为 (x,y,z)，从点 P 分别向各坐标轴和各坐标平面引垂线，试求各个垂足的坐标.

2. 试求点 $P(a,b,c)$ 关于各坐标面、各坐标轴及坐标原点的对称点的坐标.

3. 在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特点？指出下列各点的位置.

   $A(3,4,0)$；$B(0,1,2)$；$C(3,0,0)$；$D(0,-1,0)$.

4. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

5. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴上和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

6. 求点 $M(4,-3,5)$ 到原点及各坐标轴的距离.

7. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

8. 证明 $P_1(1,2,3)$，$P_2(2,3,1)$，$P_3(3,1,2)$ 三点构成一个正三角形.

第二节　向量及其线性运算

一、向量的概念

在研究力学、物理学以及其它应用学科时，常会遇到这样的一类量，它们既有大小，又有方向，如力、力矩、位移、速度、加速度等，我们将这种既有大小又有方向的量，称为向量(或矢量).

在数学上，往往用有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向，以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$(见图 7-6). 有时也用一个粗体字母或书写一个上面加箭头的字母来表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\vec{a}$. 向量的大小称为向量的模(也称为向量的范数，记为 $\|\cdot\|$)，如向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$，$\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}|$. 模为 1 的向量称为单位向量，模为零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$，其方向可任意选取.

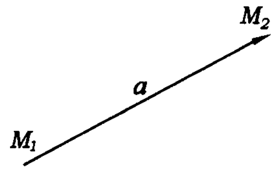

图 7-6

在这里我们只研究与起点无关的向量，即只考虑向量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方，这种向量称为自由向量. 由于我们只讨论自由向量，所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 从几何直观来看，就是经过平移后能完全重合的向量是相等的.

两个非零向量如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量平行，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

二、向量的线性运算(加减法、数乘向量)

1. 向量的加减法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC(见图 7-7(a))，向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(向量加法的三角形法则).

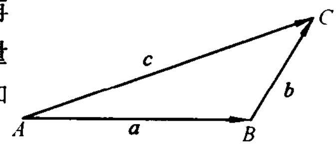

图 7-7(a)

仿此，也有向量加法的平行四边形法则(见图 7-7(b)).

向量的加法符合下列运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

见图 7-7(c).