

三年重庆高考 两年名校模拟

重庆高考自主命题规律探秘

重庆一中
南开中学
重慶八中
重慶蜀中
巴蜀中学
育才中学
西师附中
外国语学校

高三集训场报告

数学(文科)

主编：解传江 谭渝生



万试无忧系列丛书

三年重庆高考 两年名校模拟

数学(文科)

主 编 解传江 谭渝生

编写人员 (按音序排列)

邓 勇 李 力 廖 桦

谭渝生 王 璟 肖 军

谢 凯 解传江 郑 黎

邹发明 祖浚修

重庆出版集团  重庆出版社

图书在版编目(CIP)数据

三年重庆高考 两年名校模拟. 数学. 文科/解传江
主编. —重庆:重庆出版社, 2006.8
ISBN 7-5366-8031-7

I. 三... II. 解... III. 数学课—高中—解题—升学
参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 094041 号

三年重庆高考 两年名校模拟·数学(文科)

SANNIAN CHONGQING GAKAO LIANGNIAN MINGXIAO MONI·SHUXUE

解传江 谭渝生 主编

出 版 人: 罗小卫

责任编辑: 丁华全

封面设计: 杨 峰

版式设计: 杨 川

 重庆出版集团 出版
重庆出版社

重庆市长江二路 205 号 邮政编码 400016 <http://www.cqph.com>

重庆升光电力印务有限公司印刷

重庆市天下图书有限责任公司发行

重庆市渝中区双钢路 3 号科协大厦 14 楼

邮政编码 400013 电话: 023-63658853

全国新华书店经销

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 11.75 字数: 270 千字

版次: 2006 年 8 月第 1 版 印次: 2006 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1~3 050 册

定价: 18.00 元

版权所有, 侵权必究



近年来,全国各省市纷纷命制高考试题,一套试卷一统天下的局面不复存在,取而代之的是精彩纷呈、各具特色的地方自主命制的试卷。到2006年,重庆自主命制语文、数学、英语试题已有3个年头,文科综合、理科综合也开始自主命题。如果说,2004年重庆自主命制的语文、数学、英语试题还仅仅是脱胎于全国卷的命题思路,那到了2006年,重庆考卷就已经逐步成熟,体现了重庆高考的特色。文科综合、理科综合的自主命题也仍然有同样的发展轨迹。重庆高考试题、重庆名校的模拟试题都是重庆的教育专家对重庆高考的一种探索,都是重庆高考的前沿信息。

这套书收集了重庆近三年的高考题,近两年重庆大型的诊断性考试题,重庆一中、重庆南开中学、重庆八中、重庆育才中学、重庆巴蜀中学、西南师大附中、川外附属外国语学校等名校近两年的模拟试题,由重庆市多年工作在高考一线的特级、高级教师把这些试题按考点分类整理解析,并指出针对某一考点的命题规律、趋势和一些应对方法。在答案解析部分还包含了一些解题思路和点拨。

总体来讲,这套书具有以下特点:

一、**全析重庆高考。**这套书的作者都是重庆各名校的教学骨干,有多年高考复习的指导经验。他们中,有的曾培养出重庆高考状元;有的是重庆市大型诊断考试试题命制者;有的多次参与、负责本学科的高考阅卷工作。他们通过对重庆近三年高考的总体分析,全面、准确地把握了重庆高考的命题特点和发展趋势,为重庆考生提供了必知的高考信息。

二、**试题典型。**这套书中收录的诊断试题、模拟题都是很有代表性的试题。其中,名校的模拟试题是他们训练学生的法宝,被名校视为不传之密(作者对试题进行了精要的解析),同时也是重庆高考试题命制者不得不研究的对象,看完这些试题及作者的解析,你或许能了解这些学校之所以成为名校的一些原因。

三、**重点明确。**这套书不是简单的试题汇编,而是把这些试题按知识点分类整理,并总结了各个知识点的考查规律和趋势。这样的编写体例,让读者看完本书后,能够非常清楚地了解重庆高考和重庆名校模拟的重点,同时也可以明确自己的复习重点。

我们期望通过本书的出版,能够帮助重庆广大的高三老师和学生科学复习,笑对高考。

编 者

2006年8月



第一章 集合与简易逻辑	1
考点要览	1
三年重庆高考	1
两年名校模拟	2
第二章 函数	7
考点要览	7
三年重庆高考	7
两年名校模拟	10
第三章 数列	17
考点要览	17
三年重庆高考	17
两年名校模拟	20
第四章 三角函数	25
考点要览	25
三年重庆高考	25
两年名校模拟	28
第五章 平面向量	38
考点要览	38
三年重庆高考	38
两年名校模拟	39
第六章 不等式	46
考点要览	46
三年重庆高考	46
两年名校模拟	48
第七章 直线和圆的方程	55

考点要览	55
三年重庆高考	55
两年名校模拟	56
第八章 圆锥曲线	60
考点要览	60
三年重庆高考	60
两年名校模拟	64
第九章 直线、平面、简单几何体	73
考点要览	73
三年重庆高考	73
两年名校模拟	79
第十章 排列、组合、二项式定理	99
考点要览	99
三年重庆高考	99
两年名校模拟	100
第十一章 概率与统计	105
考点要览	105
三年重庆高考	105
两年名校模拟	108
第十二章 导数	116
考点要览	116
三年重庆高考	116
两年名校模拟	118
两年名校模拟参考答案	127

第一章 集合与简易逻辑

考点要览

分值 时间	考点	集合的表示	集合的运算	命题的真假	四种命题	充要条件	集合思想运用
2004·重庆		5		5		5	
2005·重庆			4			5	
2006·重庆		5				5	

三年重庆高考

1 试题再现

- (2004·重庆) 已知 p 是 r 的充分不必要条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件. 那么 p 是 q 成立的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- (2005·重庆) 已知 α, β 均为锐角, 若 $p: \sin \alpha < \sin(\alpha + \beta), q: \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 p 是 q 的 ()
 A. 充分而不必要条件
 B. 必要而不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- (2006·重庆) 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A = \{2, 4, 5, 7\}, B = \{3, 4, 5\}$, 则 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) =$ ()
 A. $\{1, 6\}$
 B. $\{4, 5\}$
 C. $\{2, 3, 4, 5, 7\}$
 D. $\{1, 2, 3, 6, 7\}$
- (2005·重庆) 若集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0, x \in \mathbf{R}\}, B = \{x | (x - 2)(x - 5) < 0, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____

2 考题解析

1. A. $\because p \Rightarrow r$ 且 $r \Rightarrow s$, 又 $s \Rightarrow q$, $\therefore p \Rightarrow q$, 从而知 p 是 q 的充分不必要条件.

2. B. $\because \alpha, \beta$ 均为锐角, 且 $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, $\therefore 0 < \alpha < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \sin \alpha < \sin(\alpha + \beta)$, 即 $q \Rightarrow p$. $\therefore p$ 是 q 的必要而不充分条件.

3. D. 由条件得 $C_U A = \{1, 3, 6\}$, $C_U B = \{1, 2, 6, 7\}$, 则 $(C_U A) \cup (C_U B) = \{1, 2, 3, 6, 7\}$.

4. $\{x | 2 < x < 3\}$. $\because A = \{x | 1 < x < 3\}$, $B = \{x | 2 < x < 5\}$, $\therefore A \cap B = \{x | 2 < x < 3\}$.

3 命题规律

集合几乎是每年必考的内容之一, 主要考查集合本身的知识, 另外以集合语言与集合思想为载体, 考查函数的定义域、函数的值域、方程、不等式、曲线间的相交等问题. 而简易逻辑以考查四种命题, 逻辑联结词, 充要条件等知识点为主. 题目的形式以选择题和填空题居多.

4 备考指要

1. 把握住集合中各个概念的真正内涵. 例如集合的概念与“全体”的区别; “ A 是 B 的子集”的理解; “ A 是 B 的子集”和“ A 是 B 的真子集”的联系与区别; “且”和“或”的理解等; 空集的内涵和作用.

2. 对于集合问题, 首先要确定属于哪一类集合(点集、数集或其它), 即首先应该“读懂”集合, 然后再确定处理此类问题的方法.

3. 集合问题多与函数、方程、不等式有关, 要注意各类知识的融会贯通.

4. 掌握复合命题的结构及真假判断; 四种命题反映出命题之间的内在关系, 要注意结合实际问题的理解其关系; 同时区别命题的否定和否命题.

5. 命题的否定只否定命题的结论, 常表现为对命题中正面叙述语进行否定. 常用的正面叙述词语和它的否定词语的逻辑理解, 见下表:

正面词语	等于	大于 ($>$)	小于 ($<$)	是	都是	任意的
否定词语	不等于	不大于 ($\leq$)	不小于 ($\geq$)	不是	不都是	某个

正面词语	所有的	任意两个	至多有一个	至少有两个	至多有 n 个
否定词语	某些	某两个	至少有两个	一个也没有	至少有 $n+1$ 个

6. 判断充要条件的基本方法有:

(1) 定义法——根据充要条件的定义.

(2) 构造法——利用等价命题的思想, 构造逆否命题, 即 $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$;

(3) 集合的角度——若 $A \subseteq B$, 则 $x \in A \Rightarrow x \in B$, 若 $A = B$, 则 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, 类似的每种关系都可以联系集合的关系.

两年名校模拟

§1.1 集合与集合运算

1. (2005·南开月考) 已知集合 $M = \{x | (x-1)(x-$

$p) < 0\}$, 集合 $N = \{x | (x-1)^{\sqrt{p}} > (x-1)^{\sqrt{p-1}}, x > 1\}$, 且 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 p 的取值范围是()

A. $p > 1$

B. $p > 2$



- C. $p \geq 1$ D. $p \neq 1$
2. (2005·西师附中月考)已知集合 $A = \{x | a-1 \leq x \leq a+2\}$, $B = \{x | 3 < x < 5\}$, 则能使 $B \subseteq A$ 成立的实数 a 的取值范围是()
 A. $\{a | 3 < a \leq 4\}$ B. $\{a | 3 < a < 4\}$
 C. $\{a | 3 \leq a \leq 4\}$ D. $\emptyset$
3. (2005·育才月考)设集合 $P = \{\text{直线的倾斜角}\}$, $Q = \{\text{两个向量的夹角}\}$, $R = \{\text{两条直线的夹角}\}$, $M = \{\text{直线 } l_1 \text{ 到 } l_2 \text{ 的角}\}$, 则必有()
 A. $Q \cup R = P \cup M$ B. $R \subseteq M \subseteq P \subseteq Q$
 C. $Q = R \subseteq M = P$ D. $R \subseteq P \subseteq M \subseteq Q$
4. (2005·巴蜀月考)设集合 $A = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = x + 1, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B$ 为()
 A. $\{(0, 1), (1, 2)\}$ B. $\{(0, 1)\}$
 C. $\{(1, 2)\}$ D. $[1, +\infty)$
5. (2005·八中月考)集合 $M = \{(x, y) | y = \sqrt{1-x^2}, x, y \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(x, y) | x = 1, y \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cap N =$ ()
 A. $\{(1, 0)\}$ B. $\{y | 0 \leq y \leq 1\}$
 C. $\{1, 0\}$ D. $\emptyset$
6. (2006·一中月考)设集合 $A = \{x | \frac{4}{3-x} > 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | |x| \leq a, x \in \mathbf{R}\}$. 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是()
 A. $0 < a < 1$ B. $0 \leq a \leq 1$
 C. $a \leq 1$ D. $a < 1$
7. (2006·万州一诊)设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, 集合 $B = \{3, 5\}$, 则()
 A. $U = A \cup B$ B. $U = (\complement_U A) \cup B$
 C. $U = (\complement_U B) \cup A$ D. $U = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$
8. (2006·重庆二诊)已知集合 $M = \{1, 2, 3\}$, 设集合 N 满足关系 $M \cup N = M$, 则集合 N 的个数为()
 A. 3 B. 4 C. 7 D. 8
9. (2006·一中月考)设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$ ()
 A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$
 C. $\{1, 3\}$ D. $\{3\}$
10. (2006·重庆一诊)设全集是实数集 $\mathbf{R}$, $M = \{x | x \leq 1 + \sqrt{2}\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} M) \cap N =$ ()
 A. $\{4\}$ B. $\{3, 4\}$
 C. $\{2, 3, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$
11. (2005·南开月考)集合 $P = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$, 若 $a \in P, b \in P$, 则 $a \oplus b \in P$. 运算 $\oplus$ 可能是()
 A. 加法 B. 减法
 C. 乘法 D. 除法
12. (2005·外语校月考)已知集合 $A = \{x | y = \lg(x-2)\}$, $B = \{y | y = 2^x\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
13. (2006·南开月考)已知集合 $A = \{y | y = 2^{\lg x} - 1, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{y | y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}, x \in \mathbf{R}\}$, 则集合 $\{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\} =$ _____.
14. (2005·一中月考)已知 $M = \{1, 2, a^2 - 3a - 1\}$, $N = \{-1, 3\}$, $M \cap N = \{3\}$, 则实数 $a =$ _____.
15. (2005·八中月考)设集合 $A = \{x | |x - a| < 2\}$, $B = \{x | \frac{2x-1}{x+2} < 1\}$, 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

16. (2005·南开月考) 已知 $x \in \mathbf{R}^+, y \in \mathbf{R}$, 集合 $A = \{-x, -\frac{x}{2}, x+1\}$, $B = \{y^2+y+1, -y, -y-1\}$. 若 $A=B$, 求 x, y .

18. (2006·西师附中月考) 已知集合 $A = \{x | (x-2)[x-(3a+1)] < 0\}$, $B = \left\{x \mid \frac{x-2a}{x-(a^2+1)} < 0\right\}$.
- (1) 当 $a=2$ 时, 求 $A \cap B$.
- (2) 当 $a > \frac{1}{3}$ 时, 求使 $B \subseteq A$ 的实数 a 的取值范围.

17. (2006·南开月考) 已知关于 x 的不等式 $\frac{ax-5}{x^2-a} < 0$ 的解集为 M .
- (1) 当 $a=4$ 时, 求集合 M .
- (2) 若 $3 \in M$ 且 $5 \notin M$, 求实数 a 的取值范围.

§1.2 简易逻辑

1. (2005·一中月考) 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1 > 0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2 > 0$ 的解集分别为 M 和 N , 则 “ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ” 是 “ $M=N$ ” 的 ()
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
2. (2005·一中月考) 用反证法证明命题: “ $a, b \in \mathbf{N}, ab$ 可被 5 整除, 那么 a, b 中至少有一个能被 5 整除” 时, 假设的内容应为 ()
- A. a, b 都能被 5 整除
B. a, b 都不能被 5 整除
C. a, b 不都能被 5 整除
D. a 不能被 5 整除

3. (2005·一中月考)“ $x^2-3x+2>0$ ”是“ $x<1$ 或 $x>2$ ”的()

- A. 必要不充分条件
- B. 充分不必要条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

4. (2005·八中月考)若命题“ $\neg(q$ 或 $p)$ ”为假命题,则()

- A. p, q 均为假命题
- B. p, q 均为真命题
- C. p, q 中至少有一个为真命题
- D. p, q 中至多有一个为真命题

5. (2005·南开月考)下列命题中,真命题是()

- A. 若 $ac>bc$, 则 $a>b$
- B. 若 $a>b$, 则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$
- C. 若 $a>b$, 则 $a-c>b-c$
- D. 若 $a>b$, 则 $ac^2>bc^2$

6. (2005·南开月考)在正实数集上定义一种运算 $*$;当 $a \geq b$ 时, $a*b=b^3$;当 $a<b$ 时, $a*b=b^2$. 根据这个定义,满足 $3*x=27$ 的 x 的值为()

- A. 3
- B. 1 或 9
- C. 1 或 $\sqrt{2}$
- D. 3 或 $3\sqrt{3}$

7. (2006·西师附中月考)设 $f(x)=A \sin(\omega x + \varphi)$ (ω, A 为正常数, $x \in \mathbb{R}$), 则 $f(0)=0$ 是 $f(x)$ 为奇函数的()

- A. 充要条件
- B. 充分不必要条件
- C. 必要不充分条件
- D. 既不充分也不必要条件

8. (2006·南开月考)设有下列四个命题:

- ①“直线 $a \perp b$ ”的充分不必要条件是“ a 垂直于 b 在平面 α 内的射影”.
- ②“ $OM \parallel O_1M_1$ 且 $ON \parallel O_1N_1$ ”是“ $\angle MON = \angle M_1O_1N_1$ ”的必要不充分条件.
- ③“直线 $l \perp$ 平面 α ”的充要条件是“直线 $l \perp$ 平面 α 内的无数条直线”.

④“平面 α 的斜线段 AB, AC 在 α 内的射影 $A'B'$ 与 $A'C'$ 相等”是“ $AB=AC$ ”的充要条件. 其中正确命题的个数是()

- A. 3
- B. 2
- C. 1
- D. 0

9. (2006·万州一诊)“ $x \neq y$ ”是“ $\sin x \neq \sin y$ ”的()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

10. (2006·一中月考)向量 $a=0$ 或 $b=0$ 是 $a \cdot b=0$ 的()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

11. (2006·重庆一诊)命题甲:“ a, b, c 成等差数列”是命题乙:“ $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = 2$ ”的()

- A. 必要不充分条件
- B. 充分不必要条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

12. (2006·南开月考)在 $\triangle ABC$ 中, 条件甲: $\angle A < \angle B$, 条件乙: $\cos^2 A > \cos^2 B$, 则甲是乙的()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

13. (2006·一中月考)已知平面 α 交平面 β 于 l , 异于直线 l 的直线 $a \in \alpha$, 异于直线 l 的直线 $b \in \beta$, 且 $\alpha \perp \beta$. 命题 $P: a \perp l$, 命题 $Q: a \perp b$, 则 P 是 Q 的()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

14. (2005·一中月考) $p: |x-2| > 2-x, q: x > a$. 若

p 是 q 的充分不必要条件, 则 a 的取值范围是 _____.

15. (2005·南开月考) 设函数 $f(x) = 4\sin x \sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + \cos 2x$, 条件 $p: \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$, 条件 $q: |f(x) - m| < 2$, 若 p 是 q 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.

第二章 函数

考点要览

分值 时间	考点	函数的记号、定义域、值域	函数的性质	反函数	指数与指数函数	对数与对数函数	函数综合应用
2004·重庆		5	5				16
2005·重庆			10				5
2006·重庆		12			5	5	5

三年重庆高考

I 试题再现

1. (2004·重庆)函数 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是()

A. $[1, +\infty)$ B. $(\frac{2}{3}, +\infty)$
C. $[\frac{2}{3}, 1]$ D. $(\frac{2}{3}, 1]$

2. (2004·重庆)函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, 则 $\frac{f(2)}{f(\frac{1}{2})} =$

()

A. 1 B. -1 C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

3. (2005·重庆)若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 且 $f(2)=0$, 则使得 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是()

A. $(-\infty, 2)$ B. $(2, +\infty)$
C. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 2)$

4. (2005·重庆)若动点 (x, y) 在曲线 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b>0$) 上变化, 则 x^2+2y 的最大值为()

A. $\begin{cases} \frac{b^2}{4}+4 & (0<b<4) \\ 2b & (b\geq 4) \end{cases}$
B. $\begin{cases} \frac{b^2}{4}+4 & (0<b<2) \\ 2b & (b\geq 2) \end{cases}$

C. $\frac{b^2}{4}+4$

D. $2b$

5. (2006·重庆) 设函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 且

$y=f(2x-1)$ 的图象过点 $(\frac{1}{2}, 1)$, 则 $y=f^{-1}(x)$ 的

图象必过点 ()

A. $(\frac{1}{2}, 1)$

B. $(1, \frac{1}{2})$

C. $(1, 0)$

D. $(0, 1)$

6. (2004·重庆) 已知 $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2 (x>0, y>0)$, 则 xy

的最小值是 _____.

7. (2005·重庆) 若 $x^2+y^2=4$, 则 $x-y$ 的最大值是

_____.

8. (2006·重庆) 设 $a>0, a \neq 1$, 函数 $f(x) = \log_a(x^2 -$

$2x+3)$ 有最小值, 则不等式 $\log_a(x-1)>0$ 的解

集为 _____.

9. (2004·重庆) 某工厂生产某种产品, 已知该产品的月生产量 x (吨) 与每吨产品的价格 p

(元/吨) 之间的关系式为: $p=24200 - \frac{1}{5}x^2$, 且生

产 x 吨的成本为 $R=50000+200x$ (元). 问该

厂每月生产多少吨产品才能使利润达到最大?

最大利润是多少? (利润=收入-成本)

10. (2006·重庆) 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) =$

$\frac{-2^x+b}{2^{x+1}+a}$ 是奇函数.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 若对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(t^2-2t) + f(2t^2-k) < 0$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

2 考题解析

$$1. D. \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(3x-2) \geq 0 \\ 3x-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < 3x-2 \leq 1 \Rightarrow \frac{2}{3} < x \leq 1.$$

$$2. B. f(2) = \frac{3}{5}, f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{5}, \therefore \frac{f(2)}{f(\frac{1}{2})} = -1.$$

3. D. 由偶函数的性质易得答案.

$$4. A. \text{当 } 0 < b < 4 \text{ 时, } 0 < \frac{b}{4} < 1, \text{ 令 } x = 2\cos\theta, y = b\sin\theta, \theta \in [0, 2\pi]. \therefore x^2 + 2y = 4\cos^2\theta + 2b\sin\theta = -4\sin^2\theta + 2b\sin\theta + 4 = -4\left(\sin\theta - \frac{b}{4}\right)^2 + 4 + \frac{b^2}{4}.$$

当 $\sin\theta = \frac{b}{4}$ 时, $x^2 + 2y$ 取得最大值 $\frac{b^2}{4} + 4$;

当 $b \geq 4$ 时, $\frac{b}{4} \geq 1$, 同理 $x^2 + 2y = 4 \left(\sin \theta - \frac{b}{4} \right)^2 + 4 + \frac{b^2}{4}$, 当 $\sin \theta = 1$ 时取最大值 $2b$.

5. C. $y = f(2x-1)$ 的图象过点 $(\frac{1}{2}, 1)$, 则

$f\left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right) = f(0) = 1$, $\therefore y = f^{-1}(x)$ 的图象过 $(1, 0)$.

6. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2y+3x}{xy} = 2 \Rightarrow 2xy = 2y+3x \geq 2\sqrt{6xy} \Rightarrow xy \geq 6$. 当 $2y=3x \Rightarrow x=2, y=3$ 时, 等号成立, xy 的最小值为 6.

7. $2\sqrt{2}$. 法一: 三角代换, 令 $x=2\cos\theta$, $y=2\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, 则 $x-y=2(\cos\theta-\sin\theta)=2\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$, 于是最大值为 $2\sqrt{2}$.

法二: 线性规划的思想, 利用数形结合即可得答案.

8. $(2, +\infty)$. 令 $u=x^2-2x+3$, 则 $u>0$ 恒成立, 即 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 又当 $x<1$ 时, u 关于 x 单调递减; 当 $x>1$ 时, u 关于 x 单调递增. 由复合函数单调性的同增异减法则知, 欲使得 $f(x)=\log_a(x^2-2x+3)$ 有最小值, 则 $a>1$, 于是 $\log_a(x-1)>0 \Leftrightarrow \log_a(x-1)>\log_a 1$, 即 $x-1>1 \Rightarrow x>2$.

9. 解: 每月生产 x 吨时的利润为 $f(x) = \left(24200 - \frac{1}{5}x^2\right)x - (50000 + 200x) = -\frac{1}{5}x^3 + 24000x - 50000$ ($x \geq 0$). 由 $f'(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 24000 = 0$ 解得 $x_1=200, x_2=-200$ (舍去). $\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内只有一个点 $x=200$ 使 $f'(x)=0$, 故它就是最大值点, 且最大值为 $f(200) = -\frac{1}{5} \times 200^3 + 24000 \times 200 - 50000 = 3150000$ (元).
答: 每月生产 200 吨产品时利润达到最大, 最大利润为 315 万元.

10. 解: (1) $\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $\therefore f(0)=0$, 即 $\frac{-1+b}{2+a}=0$, 解得 $b=1$. 从而有 $f(x)=\frac{-2^x+1}{2^{x+1}+a}$;

又由 $f(1)=-f(-1)$ 知 $\frac{-2+1}{4+a} = -\frac{-\frac{1}{2}+1}{1+a}$, 解得 $a=2$.

(2) 解法一: 由 (1) 知 $f(x)=\frac{-2^x+1}{2^{x+1}+2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{x+1}}$, 由此式易知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 又 $\because f(x)$ 是奇函数, 从而不等式 $f(t^2-2t) + f(2t^2-k) < 0$ 等价于 $f(t^2-2t) < -f(2t^2-k) = f(-2t^2+k)$. 又 $\because f(x)$ 是减函数, 由上式推得 $t^2-2t > -2t^2+k$, 即对一切 $t \in \mathbf{R}$ 有 $3t^2-2t-k > 0$, 从而判别式 $\Delta=4+12k < 0$, 解得 $k < -\frac{1}{3}$.

解法二: 由 (1) 知 $f(x)=\frac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}$, 又由题设条件得 $\frac{-2^{t^2-2t}+1}{2^{t^2-2t+1}+2} + \frac{-2^{2t^2-k}+1}{2^{2t^2-k+1}+2} < 0$, 即 $(2^{2t^2-k+1}+2)(-2^{t^2-2t}+1) + (2^{t^2-2t+1}+2)(-2^{2t^2-k}+1) < 0$. 整理得 $2^{2t^2-2t-k} > 1$, 因底数 $2>1$, 故 $3t^2-2t-k > 0$. 上式对一切 $t \in \mathbf{R}$ 均成立, 从而判别式 $\Delta=4+12k < 0$, 解得 $k < -\frac{1}{3}$.

3 命题规律

函数是高中数学的重要组成部分, 是历年高考数学的主要内容, 每年高考分值都在 50 分以上. 纵观重庆三年自主命题的高考题, 对函数内容的考查主要体现如下几个特点: (1) 考查函数知识本身, 如映射、定义域、解析式、值域、单调性、奇偶性、周期性、对称性、函数图象等等. (2) 考查函数与方程、不等式、数列、解析几何、立体几何、向量等知识交叉渗透及综合应用问题. (3) 考查以函数为模型的实际应用问题. (4) 探索性问题.

4 备考指要

函数是中学数学中最重要的内容之一,

应从定义、解析式、图象、性质四方面加以研究和把握,在学习时应全面掌握,透彻理解每一个知识点,灵活掌握每一种解题技能.

1. 准确把握映射与函数的概念,深刻理解函数的三要素,如:求函数的定义域的主要依据;求函数解析式的常用方法(待定系数法、换元法、配凑法、函数方程的思想);求函数值域的常用方法(分析观察法、反函数法、配方法、判别式法、单调性法、数形结合法、换元法、不等式法、导数法等). 把握函数方面的数学符号和数学语言.

2. 深刻理解一些常见函数(一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、三角函数)的性质,熟悉它们的解析式和图象,以及解析式和图象之间的有机联系,把握数形之间的相互利用和联系.

3. 深刻理解反函数的概念及互为反函数的函数之间的关系,特别是定义域、值域、图象之间的联系. 会求一些简单函数的反函数.

4. 针对抽象函数应引起高度重视,近年的重庆高考中对函数性质问题的考查使用具体函数的越来越少,而使用抽象函数符号的则越来越多. 学习中必须掌握函数的奇偶性、单调性、周期性、对称性等抽象函数形式下的表现形式. 了解常见抽象函数关系式所对应的背景函数,对解题可以起到指导性的作用.

5. 掌握函数图象变换的常用方法:对函数 $f(x)$

(1) 平移变换 $f(x \pm a)$ (左右平移); $f(x) \pm a$ (上下平移).

(2) 对称变换 $-f(-x)$ (关于 y 轴对称); $-f(x)$ (关于 x 轴对称); $f(-x)$ (关于原点对称).

(3) 翻折变换 $|f(x)|$ (下翻上); $f(|x|)$ (去左留右,右翻左).

(4) 伸缩变换 $f(ax)$ (左右伸缩); $Af(x)$ (上下伸缩).

6. 对二次函数的问题应引起特别重视,复习时注意三个二次关系:二次函数,二次方程,二次不等式的区别与联系. 着重把握处理二次不等式的解,二次方程的实根分布(影响因素有:判别式,对称轴的位置,端点处的函数值符号),二次函数在闭区间上的最值等问题的方法.

7. 体会函数部分中所体现出的数学中的四大思想:函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、等价转化思想. 特别是数形结合与分类讨论的思想在本章中体现得尤为突出,应着重训练和培养这方面的能力.

8. 掌握函数思想解决实际问题的思路和方法. “审题——建模——解模——还原”,同时在实际问题的解答中应注意考虑实际问题的实际意义.

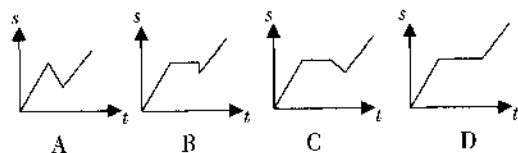
9. 导数是研究函数性质的有力工具,学习中应强化用导数研究函数的意识,培养用导数研究函数的单调性、最值等问题的能力.

两年名校模拟

§2.1 映射与函数

1. (2005·南开月考)某人骑自行车沿直线匀速行驶,先前进 a 千米,休息了一段时间,又沿原路返回 b 千米 ($b < a$),再前进 c 千米,则此人离起点的距离 s 与时间 t 的关系示意图

是()



2. (2005·一中月考)在同一平面直角坐标系中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.现将 $y=g(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移2个单位,再沿 y 轴向上平移1个单位,所得的图象是由两条线段组成的折线(如图2-1-1所示),则函数 $f(x)$ 的表达式为()

- A. $f(x)=\begin{cases} 2x-6 & 1\leq x\leq 2 \\ \frac{x}{2}-3 & 2<x\leq 4 \end{cases}$
 B. $f(x)=\begin{cases} 2x-2 & -1\leq x\leq 0 \\ \frac{x}{2}-2 & 0<x\leq 2 \end{cases}$
 C. $f(x)=\begin{cases} 2x-2 & 1\leq x\leq 2 \\ \frac{x}{2}+1 & 2<x\leq 4 \end{cases}$
 D. $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & -1\leq x\leq 0 \\ \frac{x}{2}+2 & 0<x\leq 2 \end{cases}$

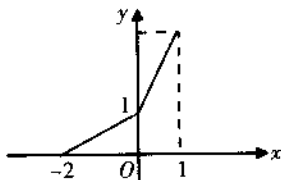


图 2-1-1

3. (2005·一中月考)已知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$,且 $f(1)=\lg 3-\lg 2$, $f(2)=\lg 3+\lg 5$. 则 $f(2003)$ 的值为()
 A. 1
 B. $\lg \frac{1}{15}$
 C. $\lg \frac{2}{3}$
 D. -1
4. (2006·重庆二诊)函数 $y=\sqrt{\lg(2-x)}$ 的定义域为()
 A. $(-\infty, 0]$
 B. $(-\infty, 1]$
 C. $(-\infty, 2)$
 D. $(-\infty, +\infty)$
5. (2006·南开模拟)函数 $f(x)=\frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,则实数 k 的取值范围是()

- A. $0\leq k<\frac{3}{4}$
 B. $k\leq 0$ 或 $k>\frac{3}{4}$
 C. $0<k<\frac{3}{4}$
 D. $k<0$ 或 $k>\frac{3}{4}$

6. (2006·重庆二诊)已知函数 $f(x)=2^x$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$,若 $f^{-1}(a)+f^{-1}(b)=4$,则 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 的最小值为()

- A. $\frac{5}{4}$
 B. $\frac{9}{4}$
 C. $\frac{9}{16}$
 D. 1

7. (2006·重庆二诊)联通公司拟定从甲地到乙地通话 m 分钟的通话费为 $f(m)=1.06\cdot(0.50\cdot[m]+1)$,其中 $m>0$, $a*b$ 表示 a 乘以 b , $[m]$ 表示不小于 m 的最小整数.若某人从甲地到乙地的通话费为4.24元,那么他的通话时间是()
 A. 至多5分钟
 B. 至少5分钟,但至多6分钟
 C. 超过6分钟,但不到7分钟
 D. 至少7分钟

8. (2006·西师附中月考)设函数

$$f(x)=\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x & (x\leq 0) \\ \sqrt{x} & (x>0) \end{cases}, \text{若 } f(a)>1, \text{ 则实数}$$

a 的取值范围是()

- A. $(-2, 1)$
 B. $(-\infty, -2)\cup(1, +\infty)$
 C. $(-\infty, -1)\cup(0, +\infty)$
 D. $(1, +\infty)$

9. (2005·巴蜀月考)已知函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)=x^3-2$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,则函数 $f(x)$ 的解析式为_____.
10. (2005·南开月考)若 $f(x)=x+\log_3 x+1$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$,则 $f^{-1}(12)=$ _____.
11. (2006·西师附中月考)若函数 $f(n)=k$ (其中 $n\in\mathbf{N}^*$), k 是 π 的小数点后的第 n 位数字, $n=3.1415926535\cdots$,例如 $f(5)=9$,则 $f[f\cdots f[f(10)]]$ (2006个 f 进行复合)等于_____.

12. (2005·一中月考) 设函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, 其中 $a \in \mathbf{N}^*, b \in \mathbf{N}, c \in \mathbf{Z}$.

- (1) 若 $b > 2a$, 且 $f(\sin x) (x \in \mathbf{R})$ 的最大值为 2, 最小值为 -4, 试求函数 $f(x)$ 的最小值.
 (2) 若对任意实数 x , 不等式 $4x \leq f(x) \leq 2(x^2+1)$ 恒成立, 求 c 的值.

- C. 单调递增无最大值
 D. 单调递增有最大值

3. (2005·八中月考) 关于 x 的方程 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1-\lg a}$ 有正根, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. (1, 10) B. (0, 10)
 C. (0, 1] D. (0, 1)

4. (2005·南开月考) 设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x}) (0 < a < 1)$ 的反函数, 则使 $f^{-1}(x) > 1$ 成立的 x 的取值范围为 ()

- A. $\left(\frac{a^2-1}{2a}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{a^2-1}{2a}\right)$
 C. $\left(\frac{a^2-1}{2a}, a\right)$ D. $[a, +\infty)$

5. (2005·一中月考) 当 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $f(x) = 2^x - 2^{-x} \lg a$ 是奇函数.

6. (2005·一中月考) 对于函数 $f(x) = 2^x - 2^{-x}$, 有下列四个结论:

① $f(x)$ 的图象关于原点对称; ② $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数; ③ $f^{-1}(2) = \log_2 3$; ④ $f(|x|)$ 有最小值 0. 其中正确结论的序号为 (把你认为正确的序号都填上).

7. (2005·一中月考) 若函数 $f(x) = 3 + a^{x-1} (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的反函数的图象恒过 P 点, 则 P 点坐标是 .

8. (2005·一中月考) 关于函数 $f(x) = \sin^2 x - \left(\frac{2}{3}\right)^{|x|} + \frac{1}{2}$ 有下列结论: ① $f(x)$ 是奇函数; ② 当 $x > 2005$ 时, $f(x) > \frac{1}{2}$ 恒成立; ③ 存在 x_0 使得 $f(x_0) \geq \frac{3}{2}$; ④ $f(x)$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$, 其中正确结论的序号是 .

9. (2005·重庆一诊) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4) = f(x)$, 当 $2 \leq x \leq 6$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-m|} + n$, $f(4) = 31$.

(I) 求 m, n 的值.

(II) 比较 $f(\log_2 m)$ 与 $f(\log_2 n)$ 的大小.

§2.2 指数与指数函数

1. (2005·一中月考) 函数 $f(x) = \frac{1}{2e}(e^x + e^{2x}) (x < 1)$ (其中 e 是大于 1 的常数), 则 ()

- A. $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) < f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$
 B. $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) > f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$
 C. $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) < f^{-1}(2)$
 D. $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) > f^{-1}(2)$

2. (2005·一中月考) 若函数 $f(x) = \frac{1}{2^x+1}$, 则该函

数在 $(-\infty, +\infty)$ 上 ()

- A. 单调递减无最小值
 B. 单调递减有最小值