高等数学第二部分

拉 氏 变 换

高等数学教研室编

西安交通大学

1964.2

拉氏变换

編輯者：西安交通大学高等数学教研室

发行者：西安交通大学教材供应科

印刷者：西安交通大学印刷厂

一九六四年二月第四版

印数：2,581—3,580册

目 录

§1. 基本概念

1. 拉氏变換

設函数 $f(t)$定义在 $t\geqslant 0$ 上，我們把旁义积分

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt \tag{1.1.1}$$

叫做拉氏积分。如果其中 $p=x+iy$ 是一个复数参数，那末拉氏积分在它的收斂范圍内就給出参数 p 的一个新函数 $F(p)$，即

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt. \tag{1.1.2}$$

这样，我們就叫对于 $f(t)$ 做拉氏变换而 $f(t)$ 与 $F(p)$ 分别称为变换的原函数与象函数，它們之間的关系，我們以后用下面符号表示：

$$L\{f(t)\}=F(p).$$

有許多书也記成 $f(t)\doteqdot F(p)$ 或 $F(p)\doteqdot f(t)$。

在討論拉氏积分收斂問題之前，让我們先来看几个簡单函数的象函数。

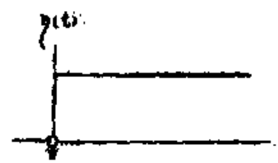

图 1

1° 单位函数 $\eta(t)=1$，$t>0$（图1）。

这个函数的拉氏变换是

$$\int_0^\infty e^{-pt}dt=\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0^+}}\frac{1}{p}\left(e^{-pa}-e^{-pb}\right).$$

现在，如果 $Re(p)=x>0$，那末

$$\lim_{b\to\infty}|e^{-pb}|=\lim_{b\to\infty}|e^{-xb}\cdot e^{-iyb}|=\lim_{b\to\infty}e^{-xb}=0,$$

即 $\lim\limits_{b\to\infty}e^{-pb}=0$，再由 $\lim\limits_{a\to 0^+}e^{-pa}=1$，立即得到

$$L\{1\}=\frac{1}{p}，\ 在 Re(p)>0 时。$$

上述函数如果在若干个点上有有限的跳跃間断点，据旁义积分的道理，并不影响拉氏积分的值，所以下列函数（图2与图3）与上例一样有相同的象函数 $\frac{1}{p}$，$Re(p)>0$。

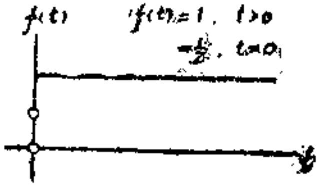

图 2

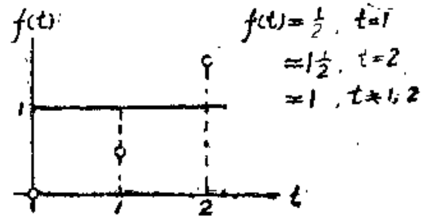

图 3

2° 指数函数 $f(t)=e^{kt}$，k 是一复数，我們有

$$\int_0^\infty e^{kt}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-(p-k)t}dt=-\frac{e^{-(p-k)t}}{p-k}\Big]_0^\infty.$$

如果 $Re(p-k)>0$，容易知道

$$L\{e^{kt}\}=\frac{1}{p-k}.$$

3° 正弦函数 $f(t)=\sin kt$，这里 k 是实数，

$$\int_0^\infty e^{-pt}\sin kt\,dt=\frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-pt}(e^{ikt}-e^{-ikt})dt$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{\frac{e^{-(p-ik)t}}{p-ik}+\frac{e^{-(p+ik)t}}{p+ik}\right\}_0^\infty.$$

所以，当 $Re(p)>0$ 时，有

$$L\{\sin kt\}=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-ik}-\frac{1}{p+ik}\right]=\frac{p}{p^2+k^2}.$$

以上例子說明拉氏变换在一定范围内給出了彼此相应的函数对，一个是实变函数，另一个是复变函数。例如，对于原函数 $f(t)=1$，$t>0$，相应的象函数是定义在半个复数平面 $Re(p)>0$ 上的 $F(p)=\frac{1}{p}$。由于拉氏变换应用十分广泛，与积分表一样，我們也有拉氏变换表可查，讲义后面即附有常用函数表，以备查改。

2. 拉氏变换的存在

一个函数的拉氏积分有許多理由可以不存在，譬如，由于 $f(t)$ 在积分区間上有了无穷間断点，或者 $f(t)$ 增长得很快，虽有 e^{-pt} 减幅，也无法使得积分收斂等等。因此，我們首先要考虑积分的收斂条件。

我們已經知道，一个函数 $f(t)$，如果在某一区間 (a, b) 上只能有有

限个的有限的跳跃間断点，就叫做在(a, b)上是按段連續的。

如果函数$f(t)$不比指数函数增长得快，就是說，有一个常数x_0存在，使得$e^{-x_0t}|f(t)|$在所有$t>T$上有界（T是一个常数），那末我們就叫函数$f(t)$当$t\to\infty$时是属于指数級的。換句話說，函数$f(t)$称为属于指数級即指

$$|f(t)|\leqslant Me^{x_0t}, \quad t>T,$$

其中M是界，以后我們簡略地記为$f(t)=0(e^{x_0t})$。数x_0叫做$f(t)$的增长指数。

常数显然是属于指数級的，有$x_0=0$。同样$e^{at}\sin bt$有$x_0>a$，$t^n(n\geqslant0)$和$t^2\sin t$都有$x_0>0$。所有有界函数都是属于指数級的，且有$x_0=0$。但是函数e^{t^2}却不属于指数級。

下面我們将証明：函数$f(t)$如果滿足上述兩个条件，它的拉氏积分就一定收斂。对于大多数用来描写物理过程的函数$f(t)$（t表示时間）来說，上述条件总是滿足的。同时，对于物理的始值問題，函数在开始的瞬間之前（这瞬間时刻自然可取$t=0$）完全可以不加考慮。由此可見拉氏变換适合于解決那些能归結到始值条件下解函数方程的一类問題。

定理 設函数$f(t)$（1°）在$t\geqslant0$的任何一个有限区間上按段連續，（2°）当$t\to\infty$时是属于指数級的，即$f(t)=0(e^{x_0t})$，那末拉氏变換的象函数

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

在半平面$Re(p)>x_0$上都已确定，而且$F(p)$是这半平面上的解析函数。

事实上，当$Re(p)=x>x_0$时，由于$|f(t)|\leqslant Me^{x_0t}$，我們有

$$\left|\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt\right|\leqslant\int_0^\infty Me^{-(x-x_0)t}\,dt=\frac{M}{x-x_0},$$

所以拉氏积分絕对收斂。

如果再把拉氏积分式分成实部与虛部，$F(p)=u(x, y)+iv(x, y)$，可以証明u，v分别滿足解析函数的达朗倍尔－歐拉条件。因此，$F(p)$在$Re(p)>x_0$半平面上是p的解析函数。

这个定理指出了二个很重要的結果：

1° 拉氏变換把一定类型的非連續函数轉換成解析函数。

2° 根据 $\left|\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt\right|\leqslant\dfrac{M}{x-x_0}$，可知当$Re(p)=x\to\infty$时，

$F(p) \to 0$，即

$$\lim_{p\to\infty} F(p)=0.$$

因此，可知当 $p\to\infty$，只要 p 的輻角始終保持在 $-\frac{\pi}{2}+\delta<\arg p<\frac{\pi}{2}-\delta$ 范圍內，这里 $\delta>0$ 可以任意小，終有 $F(p)\to 0$。

3. 反拉氏变換

上面我們討論了由原函数求变換的象函数的問題。运算法的另外一面，就是要由象函数 $F(p)$ 确定原函数 $f(t)$，这是拉氏变換的逆运算問題，叫做反拉氏变換，我們习惯上記成 $L^{-1}\{F(p)\}$。于是，如果

$$L\{f(t)=F(p)\},$$

則有

$$f(t)=L^{-1}\{F(p)\}.$$

例如，$L\{e^{kt}\}=\frac{1}{p-k}$ 則 $L^{-1}\left\{\frac{1}{p-k}\right\}=e^{kt}$。

反拉氏变換問題实际上可看成是解下列的积分方程：

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=F(p), \tag{1.3.1}$$

这里 $F(p)$ 为已知，$f(t)$ 是未知函数。

为了求解积分方程(1.3.1)，我們先要在下节扼要叙述在数学物理上有广泛应用的富氏（富里爱）积分。

4. 富氏积分

設 $\phi(t)$ 任意定义在区間 $(-l, l)$ 上，而且是一周期为 $2l$ 的周期函数，即有 $\phi(t+2l)=\phi(t)$，如果 $\phi(t)$ 与 $\phi'(t)$ 在区間 $(-l, l)$ 上按段連續，我們知道 $\phi(t)$ 可以展开为下列的富氏級数：

$$\phi(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi}{l}t, \tag{1.4.1}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\phi(\tau)\cos\frac{n\pi}{l}\tau\,d\tau,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\phi(\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\tau\,d\tau. \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{1.4.2}$$

这級数在 $\phi(t)$ 的間断处收斂于

$$\frac{1}{2}[\phi(t+0)-\phi(t-0)].$$

利用代换

$$\cos\frac{n\pi}{l}t=\frac{1}{2}\left[e^{i\frac{n\pi}{l}t}+e^{-i\frac{n\pi}{l}t}\right],$$

$$\sin\frac{n\pi}{l}t=\frac{1}{2i}\left[e^{i\frac{n\pi}{l}t}-e^{-i\frac{n\pi}{l}t}\right],$$

立即可以得到富氏級数的复数形式：

$$\phi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\frac{n\pi}{l}t},\tag{1.4.3}$$

其中系数

$$C_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}e^{-i\frac{n\pi}{l}\tau}\phi(\tau)d\tau.\tag{1.4.4}$$

富氏展式(1.4.1)或(1.4.3)指出，一个周期 $T=2l$，即頻率 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{l}$ 的周期函数 $\phi(t)$，实际上是由无穷多个頻率分别为 ω，2ω，3ω，…的三角函数，或者說是由无穷多个离散的周期分量 $e^{i\frac{n\pi}{l}t}$ 所組成。当原来周期逐漸增大(这样 $\omega\to 0$)，这些頻率就逐漸彼此相近，而系数也将趋零，我們要問富氏展式将变成如何形式?

将(1.4.2)代入(1.4.1)得到

$$\phi(t)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\phi(\tau)d\tau+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}\phi(\tau)\cos\frac{n\pi}{l}(t-\tau)d\tau.\tag{1.4.5}$$

如果再假定 $\phi(t)$ 有 $\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\tau)|d\tau$ 存在而且等于 A，这里对于 τ 的积分应理解是柯西的积分主値意义，即 $\int_{-\infty}^{\infty}d\tau=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}d\tau$，那末(1.4.3)中第一个积分在 $l\to\infty$ 时显然趋近于零，因为

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\phi(\tau)d\tau\right|\leqslant\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|\phi(\tau)|d\tau<\frac{A}{2l}.$$

对于第二个积分，我們令 $\frac{n\pi}{l}=y_n$，而 $y_n-y_{n-1}=\frac{\pi}{l}=\Delta y$（实际上 y_n 即 $n\omega$ 而 Δy 即 ω），于是积分变成

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta y\int_{-l}^{l}\phi(\tau)\cos y_n(t-\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\psi(y_n)\Delta y,\tag{1.4.6}$$

其中 $\psi(y)=\int_{-l}^{l}\phi(\tau)\cos y(t-\tau)d\tau$。这个和式(1.4.6)类似于黎曼意义下

的积分和式，所以当 $\Delta y\to 0$ 或 $l\to\infty$（即 $\omega\to 0$）时(1.4.3)将变成

$$\phi(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\tau)\cos y(t-\tau)d\tau. \qquad (1.4.7)$$

这就是著名的富氏积分，关于富氏积分的严格討論这里从略。

下面是富氏积分的复数形式：

$$\phi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyt}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iy\tau}\phi(\tau)d\tau\right\}dy. \qquad (1.4.8)$$

总結起来，我們就有所謂富氏积分定理：

設 $\phi(t)$ 与 $\phi'(t)$ 在每一有限区間上按段連續而且 $\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(t)|dt$ 存在，那末

$$\phi(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{iyt}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iy\tau}\phi(\tau)\,d\tau dy \qquad (1.4.9)$$

在所有連續点上成立，在 $\phi(t)$ 的間断点上

$$\phi(t)=\frac{1}{2}[\phi(t+0)+(t-0)].$$

許多应用問題（特别在电学方面）都需要用富氏积分来表达函数，下面是一个簡单的例子。

例　設有一直流脈冲函数

$$\begin{aligned}\phi(t)&=0, \quad t<0,\\ &=E_0, \quad 0<t<a,\\ &=0, \quad t>a,\end{aligned}$$

据(1.4.7)即有

$$\begin{aligned}\phi(t)&=\frac{E_0}{\pi}\int_0^{\infty}dy\int_0^{a}\cos y(t-\tau)d\tau\\ &=\frac{E_0}{\pi}\int_0^{\infty}\left[-\frac{\sin y(t-\tau)}{y}\right]_0^{a}dy=\frac{E_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin yt-\sin y(t-a)}{y}dy\\ &=\frac{2E_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\frac{a}{2}y}{\pi}\cos\left(t-\frac{a}{2}\right)y\,dy.\end{aligned}$$

在物理应用上，富氏积分中的变量 t 和 y（即 ω）常常分别表示时間和頻率，于是富氏积分給出原 t 函数的頻譜，因为把富氏积分的第二个积

分乘上$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，看作一个新函数，即

$$\psi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iy\tau}\phi(\tau)d\tau, \qquad (1.4.10)$$

富氏积分本身可写成

$$\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyt}\psi(y)dy. \qquad (1.4.11)$$

(1.4.11)指出，$\phi(t)$可以看作是周期分量e^{iyt}的連續和，它的各个分量的强度比例于$\psi(y)$。实际上，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi(y)dy$是无穷小的頻譜区間$(y,\ y+dy)$之間所有分量的总强度。一般說来，$\psi(y)$是实变数的一个复函数，所以可写成

$$\psi(y)=A(y)e^{i\theta(y)},$$

这里振幅A和相角θ都是頻率的实函数。把它代入(1.4.11)得到

$$\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(y)e^{i(yt+\theta(y))}dy.$$

很明显，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A(y)dy$代表$(y,\ y+dy)$之間所有振动的总强度，而在$t=0$时有一公共相角量$\theta(y)$。因此，我們說函数$\phi(t)$的頻譜分量的振幅和相角完全由相当的頻率函数$\psi(y)$所决定。

如果把积分(1.4.10)与(1.4.11)看作是一种积分变换，那末彼此恰巧相应，成为一組变換对。(1.4.10)就是著名的富氏变换，而(1.4.11)則是反富氏变換，由(1.4.7)还可推出富氏正弦变換：

$$\lambda(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\phi(\tau)\sin y\tau\,d\tau,$$

$$\phi(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\lambda(y)\sin yt\,dy.$$

与富氏余弦变換：

$$\mu(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\phi(\tau)\cos y\tau\,d\tau,$$

$$\phi(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\mu(y)\cos yt\,dy.$$

关于富氏变換我們这里不拟詳細討論。

5. 拉氏变换的复反演积分

設富氏积分定理中的函数 $\phi(t)$，現在定义如下：

$$\phi(t)=e^{-ct}f(t),\qquad t>0,$$
$$=0,\qquad t<0,$$

这里 $f(t)$ 与 $f'(t)$ 在 $t\geqslant 0$ 按段連續，$c>0$ 而且 $f(t)=0(e^{x_0t})$ 于是

$$\int_0^\infty|\phi(\tau)|d\tau\leqslant M\int_0^\infty e^{-(c-x_0)\tau}d\tau.$$

上述积分当 $c>x_0$ 时存在。又容易知道 $\phi(t)$ 和 $\phi'(t)$ 也是按段連續的，所以 $\phi(t)$ 滿足富氏积分定理中的条件，(1.4.9)就变成

$$e^{-ct}f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{iyt}\left\{\int_0^\infty e^{-(c+iy)\tau}f(\tau)d\tau\right\}dy.$$

令 $p=c+iy$，代入上式有

$$e^{-ct}f(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{c-iR}^{c+iR}e^{-ct}\cdot e^{pt}\left\{\int_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)d\tau\right\}dp.$$

兩边除以 e^{-ct}，然后用 $F(p)$ 代 $\int_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)d\tau$，我們得到

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{c-iR}^{c+iR}e^{pt}F(p)dp.$$

这样，我們就証明了下列重要定理。

定理 如果(1°)$f(t)$定义在 $t\geqslant 0$ 而且 $f(t)=0(e^{x_0t})$，(2°)$f(t)$和$f'(t)$按段連續，(3°) $F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$，那末在 $f(t)$ 的連續点处

$$L^{-1}\{F(p)\}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{c-iR}^{c+iR}e^{pt}F(p)dp,\tag{1.5.1}$$

这里积分途徑是直綫 $x=c$，而 c 是大于 x_0 的任何一个正常数。

公式(1.5.1)叫做拉氏变换的**复反演积分**，这个积分使我們能找到許多象函数的原函数而且将成为一种解微分方程方法的基础。

現在我們来討論如何使用复反演积分(1.5.1)由象函数决定原函数問題。

設 $F(p)$ 滿足使反演积分(1.5.1)收斂的条件，是原函数 $f(t)$ 在 $Re(p)>c$ 上的象函数。我們知道 $F(p)$ 在 $Re(p)>c$ 上是解析的，但是它在 $x=c$ 的左半平面上一般会有奇点。这就使得我們可以适当选取圍綫，用柯西留数定理来求反演积分了。

先設 $F(p)$ 只有有限多个极点 p_1, p_2, … p_n, 我們取閉綫 c_n 把它們都圍起来，因为 e^{pt} 解析而且沒有零点，$F(p)$的极点显然就是$e^{pt}F(p)$的奇点。为簡便起見，令 $e^{pt}F(p)$ 在 $p=p_\lambda$ 处的留数为 $\rho_\lambda(t)$，即

$$\rho_\lambda(t)=Res[e^{pt}F(p),\ p_\lambda].$$

根据留数定理，立即得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\beta_n}^{c+i\beta_n}e^{pt}F(p)dp+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}e^{pt}F(p)dp=\sum_{\lambda=1}^{n}\rho_\lambda(t). \quad (1.5.2)$$

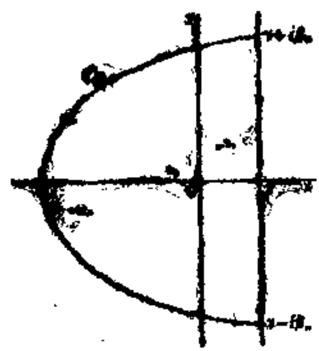

图 4

如果 $F(p)$ 在滿足相当条件下能使 (1.5.2) 中第二个积分当 $\beta_n\to\infty$ 时趋近于零，那末，由于第一个积分的极限收斂于$f(t)$，我們将会得到一个复反演积分公式的級数表达公式：

$$f(t)=L^{-1}\{F\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{pt}F(p)dp=\sum_{\lambda=1}^{n}\rho_\lambda(t). \qquad (1.5.3)$$

这个公式对于复反演积分的計算无疑是非常重要的。

$F(p)$ 只有有限多个极点的情况在解一般常微分方程时往往見到，但是对于某些常微分方程，特别是求偏微分方程，必須考虑函数 $F(p)$ 有无穷多个极点情况。在这种情况下，我們可以适当选擇圍綫列 $\{C_n\}$ 使得 C_n 在$\beta_n\to\infty$ 时依次将所有极点 p_n 都圍起来。但是为了使 (1.5.2) 第二个积分收斂，$\{C_n\}$ 中的每一个 C_n 不能通过任何极点。于是只要 $F(p)$ 滿足相当条件能使 (1.5.2) 第二个积分当 $\beta_n\to\infty$时趋近于零，那末 (1.5.2) 依然有效，即有

$$f(t)=\sum_{\lambda=1}\rho_\lambda(t).$$

現在我們来証明以下定理。

定理　如果函数$F(p)$沿 $x=c$ 的复反演积分收斂于它的原函数 $f(t)$，而且 $F(p)$ 在 $x=c$ 的左半平面上除了极点 p_λ ($\lambda=1, 2, 3\cdots\cdots$) 之外到处解析。那末当 $F(p)=0\ (|p|^{-k})$，$k>0$ 时，由函数 $e^{pt}F(p)$ $(t>0)$ 在所有极点 p_λ 上的留数所組成的級数一定收斂于 $f(t)$，即

$$f(t)=L^{-1}\{F(p)\}=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\rho_\lambda(t),\quad t>0. \qquad (1.5.4)$$

我們取直綫 $y=\pm\beta_n$ 和 $x=-\beta_n$ 所圍成的开矩形綫作为圍綫 C_n 如图5所示。在直綫 $y=\pm\beta_n$ 上由于 $F(p)=0(|p|^{-k})$，我們有

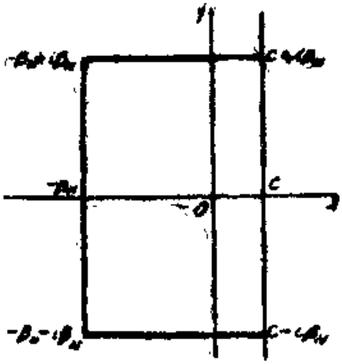

图 5

$$|F(x\pm i\beta_n)|<M(|x\pm i\beta_n|)^{-k}$$
$$\leqslant M\beta_n^{-k},$$
$$-\beta_n\leqslant x\leqslant c.$$

于是当 p 在上下兩直綫上时，

$$|e^{pt}F(p)dp|<\frac{M}{\beta_n^k}e^{xt}dx,$$

而 $$\left|\int_{-\beta_n}e^{pt}F(p)dp\right|$$
$$<\frac{M}{\beta_n^k}\cdot\frac{1}{t}(e^{ct}-e^{-\beta_n t}),\ t>0.$$

这样就証明了 $e^{pt}F(p)$ 在上下兩条直綫上的积分当 $\beta_n\to\infty$ 时趋近于零。

同样，由于 $|F(-\beta_n+iy)|<M(|-\beta_n+iy|)^{-k}$，我們可以知道 $e^{pt}F(p)$ 在 $x=-\beta_n$ 上从 $-\beta_n$ 到 β_n 的积分当 $\beta_n\to\infty$ 时也趋近于零。于是定理証明。

6. 分式有理函数的反变換函数，海氏展开式

利用上述定理，可以把分式有理函数的反变換函数表成非常簡單的公式。

根据拉氏变換的定义，容易証明变換与反变換都是綫性的：

$$(1°)\quad L\{A_1f_1(t)+A_2f_2(t)+\cdots\cdots+A_nf_n(t)\}$$
$$=A_1L\{f_1(t)\}+A_2L\{f_2(t)\}+\cdots+A_nL\{f_n(t)\},$$

$$(2°)\quad L^{-1}\{A_1F_1(p)+A_2F_2(p)+\cdots+A_nF_n(p)\}$$
$$=A_1L^{-1}\{F_1(p)\}+A_2L^{-1}\{F_2(p)\}+\cdots+A_nL^{-1}\{F_n(p)\}.$$

令分式有理函数为

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)},$$

其中 $A(p)$ 与 $B(p)$ 都是 p 的多項式，沒有公因式，而且 $B(p)$ 的次数高于 $A(p)$。

情况一 $B(p)$ 有 n 个不相等的零点 $p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$。因为 $F(p)$ 滿足定理中的条件，由公式(1.5.4)知道

$$L^{-1}\left\{\frac{A(p)}{B(p)}\right\}=\sum_{\lambda=1}^{n} Res\left[\frac{e^{pt}A(p)}{B(p)},\ p_\lambda\right] \tag{1.6.1}$$

单重极点 p_λ 上的留数是 $\frac{e^{p_\lambda t}A(p_\lambda)}{B'(p_\lambda)}$，这里 $B'(p)$ 是 p_λ 点上 $B(p)$ 的导数值，于是有公式

$$L^{-1}\left\{\frac{A(p)}{B(p)}\right\}=\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{e^{p_\lambda t}A(p_\lambda)}{B'(p_\lambda)}. \tag{1.6.2}$$

这个公式通常叫式**海氏展开式**。

例．求 $L^{-1}\left\{\frac{p}{(p+1)(p+3)}\right\}$

因为分母有零点 $p=-1$，$p=-3$，而 $B'(p)=2p+4$，所以

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{(p+1)(p+3)}\right\}=\frac{-e^{-t}}{2}+\frac{3e^{-3t}}{2}.$$

情况二　$B(p)$的次数是 n，有一个 m 重零点 p_s．

因为 $e^{pt}F(p)$在 m 重极点 p_s 上的留数是

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{p\to p_s}\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}\left[(p-p_s)^m\frac{e^{pt}A(p)}{B(p)}\right],$$

所以

$$L^{-1}\left\{\frac{A(p)}{B(p)}\right\}=\sum_{\lambda=1}^{n-m}\frac{e^{p_\lambda t}A(p_\lambda)}{B'(p_\lambda)}$$
$$+\frac{1}{(m-1)!}\lim_{p\to p_s}\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}\left[(p-p_s)^m\frac{e^{pt}A(p)}{B(p)}\right]. \tag{1.6.3}$$

如果 $B(p)$有几个多重零点，公式可以类似求得．

例．决定$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p+1)}\right\}$．

$p=-1$ 是单重极点，$p=0$ 是双重极点，而 $B'(p)=3p^2+2p$．在$p=0$ 处，$\lim\limits_{p\to 0}\frac{d}{dp}\left[\frac{e^{pt}}{p+1}\right]=t-1$，所以，由(1.6.3)知

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p+1)}\right\}=e^{-t}+t-1.$$

§2. 拉氏变換的性质

在§1中，我們已經給出拉氏变換的一个性質，即綫性性質，这个性質是說，对于任何兩个常数α与β，变換的原函数$f(t)$，$g(t)$和它們的象函数$F(p)$，$G(p)$間有如下关系：

$$L\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\alpha F(p)+\beta G(p).$$

反变換显然也有这个性質。現在我們要叙述一系列有关原函数与象函数間的运算性質。这些性質将构成拉氏变換的运算系統，給变換提供实踐的基础

为了叙述方便起見，我們以后假定，一切函数作为变換的原函数都滿足按段連續与屬于指数級的要求，增长指数假定是c，換句話說，就是它們的象函数一定存在，而且还約定，用$f(t)$，$g(t)$等表原函数，$F(p)$，$G(p)$等相应地表它們的象函数。

1. 拉氏变換的微分性質

設$f(t)$的象函数是$F(p)$，考虑$f(t)$，以至$f^{(n)}(t)$的象函数。

定理 如果把$f'(t)$，或更一般地把$f^{(n)}(t)$，作为原函数則在$Re(p)>c$上有

$$L\{f'(t)\}=pF(p)-f(0+), \tag{2.1.1}$$

或者

$$L\{f^{(n)}(t)\}=p^nF(p)-\{p^{n-1}f(0+)+p^{n-2}f'(0+)\cdots +pf^{(n-2)}(0+)+f^{(n-1)}(0+)\}。 \tag{2.1.2}$$

事实上，用分部积分法，有

$$L\{f'(t)\}=\int_0^\infty e^{-pt}f'(t)dt=[f(t)e^{-pt}]_{0+}^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt.$$

由于$f(t)=0(e^{ct})$，在$Re(p)=x>c$时，有$|e^{-pt}f(t)|\leqslant Me^{-(x-c)t}$，因而等式右边第一項显然是$-f(0+)$，第二項是$pF(p)$，(2.1.1)式証明。

将$f''(t)$作为原函数，用(2.1.1)式得到

$$L\{f''(t)\}=p[pF(p)-f(0+)]-f'(0+)=p^2F(p)-pf(0+)-f'(0+).$$

依此类推，用归納法可以証得(2.1.2).

上述公式(2.1.1)和(2.1.2)指出，变換原函数的微分运算，通过变換，化成了用p乘象函数的簡单代数运算。这就提供了用拉氏变換把微分

方程化为代数方程的运算工具，因而是拉氏变换的基本运算性質之一。

例 1. 令 $f(t)=\sin kt$，因为 $f'(t)=k\cos kt$ 連續而且屬于指数級，又 $L\{\sin kt\}=\frac{k}{p^2+k^2}$，所以

$$L\{k\cos kt\}=p\cdot\frac{k}{p^2+k^2}-f(0+),$$

或者

$$kL\{\cos kt\}=p\cdot\frac{k}{p^2+k^2}.$$

于是有

$$L\{\cos kt\}=\frac{p}{p^2+k^2}.$$

例 2. 求 $L\{t^m\}$，m 是一正整数。

令 $f(t)=t^m$，有 $f^{(m+1)}(t)=0$。于是

$$L\{f^{(m+1)}(t)\}=p^{m+1}L\{f(t)\}-m!=0,$$

卽得

$$L\{t^m\}=\frac{m!}{p^{m+1}}.$$

这个公式可以扩充到 m 不是整数的普遍情况，我們将 $L\{t^k\}$，$k>-1$，的拉氏积分作 $x=pt$ 的代换，因此

$$\int_0^\infty e^{-pt}t^k dt=\frac{1}{p^{k+1}}\int_0^\infty x^k e^{-x}dx,$$

右边积分就是所謂 γ 函数，所以

$$L\{t^k\}=\frac{1}{p^{k+1}}\Gamma(k+1),\ k>-1.$$

例 3. 求微分方程

$$y''(t)+k^2y(t)=0$$

的解。

令 A 与 B 分别表 $t=0$ 时 $y(t)$ 与 $y'(t)$ 的值，卽

$$y(0)=A,\qquad y'(0)=B.$$

对方程使用变换有

$$L\{y''(t)\}+k^2L\{y(t)\}=[p^2Y(p)-Ap-B]+k^2Y(p)=0,$$

这里 $Y(p)=L\{y(t)\}$。这是一个簡單的代数方程，可以求得

$$Y(p)=\frac{Ap+B}{p^2+k^2}.$$

从海氏展开式(1.6.2)可知，

$$y(t)=\sum Res\left[e^{pt}\frac{Ap+B}{p^2+k^2},\ \pm ik\right]$$

$$=\left[e^{pt}\frac{Ap+B}{2p}\right]_{p=ki}+\left[e^{pt}\frac{Ap+B}{2p}\right]_{p=-ki}$$

$$=\frac{A}{2}(e^{kit}+e^{-kit})+\frac{B}{2ki}(e^{kit}-e^{-kit})$$

或者 $y(\tau)=A\cos kt+B'\sin kt$，其中，$B'=\frac{B}{k}$.

在实际运算时，变换与反变换的計算一般总是将 $f(t)$ 或者 $F(p)$ 化为表中形式，用表求解。令

$$Y(p)=A\frac{p}{p^2+k^2}+\frac{B}{k}\cdot\frac{k}{p^2+k^2}.$$

根据上面求得的关系可知

$$y(t)=A\cos kt+B'\sin kt.$$

例 4. 解微分方程組

$$y''(t)-z''(t)+z'(t)-y(t)=e^t-2,$$
$$2y''(t)-z''(t)-2y'(t)+z(t)=-t,$$
$$y(0)=y'(0)=z(0)=z'(0)=0.$$

令 $Y(p)$ 与 $Z(p)$ 表 $y(t)$ 和 $z(t)$ 的象函数，对方程組使用拉氏变换，据初始条件可得

$$p^2Y(p)-p^2Z(p)+pZ(p)-Y(p)=\frac{1}{p-1}-\frac{2}{p},$$

$$2p^2Y(p)-p^2Z(p)-2pY(p)+Z(p)=-\frac{1}{p^2}.$$

整理后可写成：

$$(p+1)Y(p)-pZ(p)=-\frac{p-2}{p(p-1)^2},$$

$$2pY(p)-(p+1)(Zp)=-\frac{1}{p^2(p-1)}.$$