非完整系统的运动方程和力学的变分原理

新一类控制问题

C.A. 杰格日达
〔俄〕 Ш.Х.索尔塔哈诺夫 著
M.П.尤士科夫
梅凤翔 译

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

非完整系统的运动方程和力学的变分原理新一类控制问题

C. A. 杰格日达　Ш. X. 索尔塔哈诺夫　M. П. 尤士科夫　著

梅凤翔　译

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

非完整系统的运动方程和力学的变分原理:新一类控制问题/(俄)杰格日达,(俄)索尔塔哈诺夫,(俄)尤士科夫著;梅凤翔译. —北京:北京理工大学出版社,2007.4

ISBN 978-7-5640-1029-4

Ⅰ.非…　Ⅱ.①杰…②索…③尤…④梅…　Ⅲ.非完整体系动力学　Ⅳ.O316

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 031209 号

北京市版权局著作权合同登记号　图字:01-2007-2082 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京圣瑞伦印刷厂
开　　本 / 880 毫米×1230 毫米　1/32
印　　张 / 8.75
字　　数 / 233 千字
版　　次 / 2007 年 4 月第 1 版　2007 年 4 月第 1 次印刷
印　　数 / 1～3000 册　　责任校对 / 张　宏
定　　价 / 19.00 元　　责任印制 / 吴皓云

图书出现印装质量问题,本社负责调换

献给我们的老师

Николай Николаевич Поляхов

教授一百诞辰

前　言

本书是圣彼得堡大学 2002 年出版的《非完整系统的运动方程和力学的变分原理》一书的第二版。在准备第二版时，对内容做了很大修改。首先，特别注意了研究混合动力学问题（详见下），当运动规划用高阶微分方程附加组给定时，事实上提出了一类新的控制问题。所提的解类似问题的理论用一系列新的例子加以说明。这两个版本是 1985 年列宁格勒大学出版社出版并于 2000 年由《高等学校》出版社再版的 Поляхов，Зегжда 和 Юшков 的大学教材《理论力学》[189]中的章节《有约束的运动》和《力学的变分原理》所表达的有关非完整力学思想的发展。在此方向上的第一个工作是 Поляхов 教授在 1970—1974 年间发表的[185]。从 1975 年开始在列宁格勒国立大学数学力学系理论与应用力学教研室，由 Поляхов 领导和直接参与下研究工作按期进行，并一直延续到 1987 年 Николай Николаевич 去世。

本书给出扩充至高阶非完整约束的理想约束的新定义。结果提出了组建某类新问题的运动方程的理论。按 Григорян 院士的提议，我们称之为混合动力学问题，因为其中既有动力学正问题又有逆问题的特征。实际上，一方面按给定的广义主动力 $Q=(Q_1,\cdots,Q_s)$ 来求由广义坐标 $q=(q^1,\cdots,q^s)$ 描述的力学系统的运动，而另一方面要求这些广义坐标同时又是附加微分方程组

$$f_n^{\chi}(t,q,\dot{q},\cdots,\overset{(n)}{q})=0,\qquad \chi=\overline{1,k},\qquad k\leqslant s \tag{1}$$

的解，其中 n 为任意整数。用方程(1)给出力学系统运动特征，为满足这些方程需找到附加力 $\Lambda=(\Lambda_1,\cdots,\Lambda_k)$。

在完成工作时，在 Румянцев 院士和 Карапетян 教授领导下的莫斯科国立大学学术讨论班上的讨论起了重要作用。实际上，在满足条件(1)下解某个控制问题，其中运动规划由微分方程组(1)给出。按照非完整力学采用的术语，这些方程应称为 n 阶非完整约束。但是，实际上

正如上面所述，它们是运动规划，因此最好称为规划约束。

本书由非完整力学发展基本阶段概述，七章、四个附录以及文献清单组成。

在非完整力学发展基本阶段概述中，给出非完整力学基本研究方向的简略描述。

第一章引出代表力学系统的点的概念。方法用于推导第一类和第二类 Lagrange 方程，证明其唯一性和普遍性。这种方法将 Lagrange 方程写成一种形式，这种形式不仅可用于一个质点的情形，而且可用于具有有限自由度或无限自由度的任意力学系统的情形。以各种观点讨论完整约束的理想性概念。分析所得运动方程与 D'Alembert-Lagrange 原理的相互联系。

第二章由牛顿定律的类似导出非完整力学非常方便的 Maggi 方程。由 Maggi 方程得到非完整系统运动方程写法的最常用的形式。建立 Maggi 方程和 Суслов-Jourdain 原理之间的关系。研究非完整约束理想性概念。在叙述材料时应用第一章研究完整系统运动所利用的方法。讨论 Четаев 型约束在非完整力学发展中的作用。应用各种方法解一系列非完整问题。

第三章研究中引进力的线性变换。对于完整系统，此时利用约束理想性概念以及可能元功的表达式。由力的变换得到第一类和第二类 Lagrange 方程。提出完整力学的一个定理，根据这个定理按给定曲线坐标的给定运动可用建立对应于这个坐标的附加广义力来保证。对非完整系统，力的线性变换借助 Четаев 假设引出。于此由于研究与约束方程相应的广义力，非完整力学一整套基本方程可在紧凑形式下得到。建立对这一套的扩充定理，根据这个定理准速度的给定变化用引进对应这个准速度的一个附加力来保证。所建立的完整和非完整力学的定理的应用，用飞行动力学的可控运动的两个问题的解给予验证。本章最后将力的线性变换用于得到 Gauss 原理。

第四章借助引入切空间第二类 Lagrange 方程组可写成矢量形式。证明切空间用约束方程分成两个子空间的直和。在一个子空间中系统加速度矢量的分量单值地由约束方程确定。分析完整约束和一阶及二

阶非完整约束理想性的概念。这个概念被推广到高阶约束。讨论力学的微分变分原理的联系与等价性。给出理想约束的几何解释。提出广义 Gauss 原理。借助这个原理得到三阶约束非完整系统 Maggi 型方程和 Appell 型方程。

第五章力学系统矢量表示的运动规律用于解混合动力学问题。这包括寻求确保满足规划约束的附加广义力，而规划约束以阶 $n\geqslant 3$ 的微分方程组的形式给出。证明，如果规划约束的数目等于广义控制力的数目，那么它们可由对广义坐标和这些力的微分方程组求得为时间的函数。确定给定方程组有唯一解的条件。根据 Gauss 原理也求出任意阶约束下存在运动控制的条件。因此可解新一类控制问题的理论建立起来。这个理论用于研究属于宇宙飞行器运动的动力学的两个问题。在第一个问题中，要确定径向控制力为时间的函数，以保证宇宙飞行器以加速度模为常数而运动；在第二个问题中，要给出径向和切向控制力随时间的变化规律，使得宇宙飞行器从一个圆轨道飞行到另一个圆轨道。

在第六章 Lagrange 乘子用于建立研究力学系统的两个新方法。一个新方法属于确定弹性系统的固有频率和振型的问题，而这个系统由许多单元组成，它们的固有频率和振型是已知的。在这个方法中弹性体彼此连接的条件当作完整约束来研究。其反力等于 Lagrange 乘子，就是系统物体间的相互作用力。根据约束方程组成固有振动下相对 Lagrange 乘子幅值的线性齐次方程组。这个方程组的解，可将整个系统的固有频率和振型用各个单元的固有频率和振型来表示。根据其单元高阶型的准静计算，提出确定固有频率和振型的近似算法。提出的第二个方法与刚体系统动力学的研究相关。此时对抽象约束引出 Lagrange 乘子，影响到使刚体动能具有简单形式的坐标数目多出来了。在此情形，消去 Lagrange 乘子，便引向刚体运动方程的新的专门形式。这个新形式可应用于描述动力试验台的运动，用于模拟飞机在极端状态下舱内飞行员的状态。

第七章证明非完整系统运动方程的所有存在形式都是等价的。因为它们都能由描述带理想约束的力学系统运动方程的不变矢量形式来得到。不允许将运动方程写成第二类 Lagrange 方程形式的约束的非

完整性以最明显形式体现在独立准坐标中列写非完整系统的运动方程。对线性约束情形的这些方程本章用三种不同方法导出。这就有可能用三种观点来说明非完整性问题。本章中由第四章中得到的动力学方程的矢量形式,用于导出准坐标中的方程和 Poincaré-Четаев-Румянцев 方程。给出 Poincaré-Четаев-Румянцев 方程的几何解释。将 Poincaré-Четаев-Румянцев 推导非完整系统运动方程的方法与其他方法作比较。

附录 A 研究点在曲线坐标中的运动学。将所得公式推广到任意力学系统的运动。附录中引出的理论广泛应用于本专著叙述的基本资料。因此一般说来,阅读专著建议从这个附录开始。

附录 B 包括对保守非完整系统定常运动的存在性、稳定性和分岔著作的简略叙述。附录包括 Карапетян 在国际力学会议《第三届 Поляхов 报告会》上所作的大会报告(圣彼得堡,2003 年 2 月 4—6 日)。

附录 C 中积分形式下的 Gauss 原理应用于建立非线性振动方程的近似解,特别是用于按 Бубнов-Галёркин 方法所得到的解。

附录 D 中研究非完整系统没有约束反力时的运动。这样的运动按梅凤翔的术语称之为非完整系统的自由运动。研究 Чаплыгин 雪橇的自由运动。讨论在有外力下非完整系统存在自由运动的可能性。

专著中叙述的理论伴有许多例子,在解这些问题时一系列计算由 С. В. Алмазова, О. В. Алмазов, Е. С. Болгар, И. Н. Дрозд, Е. С. Дрозд, Т. Н. Дураева, Е. Ю. Леонтьева, А. А. Нездров, Ю. Л. Никифрова, Т. Н. Погребска, А. В. Смаль, Н. С. , Смирнова, В. П. Сысик, Л. Г. Федорченко, Н. Г. Филиппов, Н. А. Хорькова, Ю. С. Шевердин, А. Е. Шевцов, А. В. Шкондин 等完成。在专著的装帧上 К. К. Тверев 给予很大帮助。作者们对他们所有人表示感谢。

本书所有新思想都经过圣彼得堡国立大学数学力学系理论与应用力学教研室主任、俄罗斯联邦国家奖获得者、俄罗斯联邦功勋科学家 П. Е. Товстик 教授的仔细校阅和善意的评论。作者们对他对本书的关待表示深深感谢,并明显地理解到没有他的创造性的帮助不能完成提出的理论。

作者们非常感谢对本书关心的所有人。

目 录

非完整力学发展基本阶段概述

非完整系统的运动理论常常引起学者们的兴趣。还是在 I. Newton, L. Euler, I. Bernoulli, J. Bernoulli, J. D'Alembert, J. Lagrange 的研究中就遇到了带有非完整约束的系统运动特征的刚体无滑滚动问题的成分。S. Poisson[374. 1833]在解类似问题时利用了动力学普遍定理。E. Routh在书[379. 1884]中研究了刚体沿固定面的无滑滚动问题,并在许多复杂情形将其归为求积分,例如对匀质重球沿有摆线截面的柱面的滚动情形。P. Appell [266. 1899] 研究了滚动物体的运动。Д. К. Бобылёв[16. 1892]研究了内有陀螺的球无滑滚动的有趣问题。对于整个系统质心在球心的情形,他把问题解到底,并将所有待求未知量用椭圆函数表示出来。Н. Е. Жуковский[67. 1893]证明,如果在球外壳上加一环并用特殊方法选择惯性矩,那么问题的研究可简化。于此他在几何上给出了直观研究。

各个作者用各自的方法解的所有这些问题都是正确的。但是在 19—20 世纪之交,试图用完整力学的习惯方法去解典型的非完整问题,就出现了一系列重大错误,这些错误在非完整力学的建立中起着重要作用。这样,在 1885 年和 1886 年 C. Neuman[366]为建立刚体沿固定平面无滑滚动的运动方程,应用了通常的第二类 Lagrange 方程。诚然,不久他就明白了,在类似的问题中必须利用更复杂的带乘子的 Lagrange 方程[366. 1887—1888]。这样,Neuman 提出的问题,他自己在 1899 年[366]完全解决了。

E. Lindelöf[352. 1895]解了更个别的问题。他研究了有回转面的物体,其惯性中心在转轴上,而转轴是物体的动力对称轴,力是保守的,并且力函数仅依赖于物体接触点的坐标。对待 Poisson 的专著[374], Lindelöf 提议代替动力学普遍定理,由 Hamilton 原理或由它得到的第

二类 Lagrange 方程出发,写出两个非完整约束方程。他用这些方程组成动能,并错误地认为这就完全考虑到了约束的非完整性,而因此可以建立第二类 Lagrange 方程。自然,用这种方法得到的微分方程确是更简单并且可求积分。

E. Cresani[296. 1889]和 G. Schouten[382. 1899]也犯了类似错误,前者对非完整系统不合理地利用了 Hamilton-Jacobi 方法,后者利用了第二类 Lagrange 方程。P. Molenbrock[364. 1890]和一系列学者也忽略了非完整约束的微分特性。非完整力学的创始人之一 L. Boltzmann 在 1885 年也犯有类似错误[276]。他应用 Lagrange 方程研究齿轮和摩擦轮的转动,在其运动上施加与轮的角速度成比例表示的非完整约束。Boltzmann 仅在 1902 年[277]改正了自己的疏忽。Lindelöf 表面精美但不正确的解如此地令 Appell 高兴,以致他作为第二类 Lagrange 方程应用的例子写进他理论力学教程第一版 § 452[265. 1896]。在 1898 年的第二版中,他引证 Hadamard[311. 1894]和 Vierkandt [398. 1892]的研究时写道:"…Lindelöf 的结果是错误的,我在 1898 年指出了 Lindelöf 的这个错误,并在下一版我的 Traité 中做了改正。"

Чаплыгин 第一个指出,Lindelöf 所犯的本质错误并通知作者,而在 1895 年 11 月 25 日在自然、人类学、人文学爱好者协会物理科学分会上对此做了报告。Чаплыгин 在其工作中指出"……在前几页……Lindelöf 犯了重要错误,由于这个错误他所得到的方程比作者实际所能得到的要简单些。"在这个报告中 Чаплыгин 首次导出了非完整系统自己的运动方程,两年后他给出 Lindelöf 问题的正确解并在论文[239]中发表了自己的结果。

有意思的是,看来为使解直观,Чаплыгин 推导 Lindelöf 问题的运动方程并未用自己的方程,而是用质心运动定理和系统动量矩变化定理,于此他在研究时引入了摩擦力而后由所得方程消去它。为更具普遍性,Чаплыгин 对物体连一陀螺并将解引向求积分,并且化简了以前由 Бобылёв 所研究的情形[16]。

在 Чаплыгин 之后,Korteweg[336. 1899]用带约束乘子的 Routh 方程,Appell[268. 1900]和 Воронец[41,1903]根据他们导出的方程,以

及一系列其他学者都解了 Lindelöf 问题。因此，我们看到，Lindelöf 的工作[352]在很大程度上促进了非完整力学的形成和发展。在此特别要注意的是，在最初问题中正确考虑约束的微分性很难顺利进行到底。前面指出的工作[336]在这方面很典型，其中，Korteweg 详尽地描述了 Schouten，Lindelöf，Molenbrouck，Appell 的错误，但同时在有非完整约束情形在建立小振动理论时也犯了类似错误。

作为牛顿力学的独立部分，非完整力学是在 H. Hertz 的著作《新约束中描述的力学原理》[317. 1894]中形成起来的。正是他指出了完整和非完整系统的术语。在有非完整约束时最先一批正确方程是由 Остроградский[176. 1834]。Ferrers[306. 1872]和 Routh[379. 1884]得到的。这些方程包含 Lagrange 乘子，并且 Routh 对线性约束给出了现时文献中称之为带乘子的第二类 Lagrange 方程[59]的形式。注意，这个方法的初稿是 Routh 于 1877 年在他第三版《刚体系统动力学》中提出的。

不带 Lagrange 乘子的运动方程最先由 Чаплыгин 给出[239. 1895，1897]。他引出线性约束，力和动能表达式应该满足的某些条件。（这样的系统迟些称为 Чаплыгин 系统），并借助约束方程变换了动能的形式。结果使他能在运动方程的左端分出 Lagrange 算子形式的项，而其余项表征系统的非完整性，在约束的微分方程可积的情形它变为零。必须指出，实际上当时研究的所有非完整力学问题，都是 Чаплыгин 系统类型，因此这些方程有很广泛的应用。1901 年 П. В. Воронец[41]将 Чаплыгин 方程推广到了非循环完整坐标的情形和非定常约束的情形。

Чаплыгин 的工作引起他那个时代许多著名学者的关注。提出了非完整系统不带 Lagrange 乘子的各种形式的运动方程。这就是 Volterra[399. 1898]，Boltzmann[277. 1902]，Hamel[313. 1904]及其他人的方程。他们所建立的非完整系统各类运动方程是在准坐标中表示的，并且带有非完整性的修正附加项的第二类 Lagrange 方程的通常结构。有趣的是，与 Чаплыгин 方程的推广相平行，Воронец 也在工作[41]中导出了准坐标中的运动方程。这些研究总结在他的硕士学位论文中

[41. 1903]。由 Воронец,Boltzmann,Hamel 得到的方程外形上很相近,并且几乎同时导出。这可由近代文献中不同作者那里有不同的名称这一事实来解释。

为研究非完整系统动力学也提出了另外一些不带 Lagrange 乘子的方程。首先是 Appell 方程,其简要说明在工作[267. 1899]中,完全表述在 1900 年[269]。这些方程利用加速度能(由 Saint-Germain [381. 1900]提出的名称)的概念。有趣的是,Appell 在工作[268. 1900]中,用这个方法解决了 Lindelöf 问题。1924 年 Ценов[393]导出了混合型方程,既包含加速度能,也包含动能。稍后 Schouten[383. 1928]提出具有逆变结构的方程。

正像 Boltzmann-Воронец-Hamel 方程那样,Appell 型方程也由另外一些学者得到。特别要说的是,这些思想在工作[309,317. C. 244,371]中都有表述。诚然,在 Gibbs 的文章中仅研究了完整系统的运动。看来,独立于 Appell,Jourdain[325. 1904]也得到了类似的方程。

必须注意到 Maggi 方程[355. 1896],事实上与 Чаплыгин 同时提出而几乎未被现代人注意到。这些方程不含 Lagrange 乘子,它们在准坐标中写出并且是第二类 Lagrange 方程的线性组合。它们在解非线性非完整力学问题[189,286,327],对组建刚体系统运动方程[221]都很方便,但是现时看来不够有名。例如,В. Н. Сучков[222. 1999]根据约束理想性的原始定义导出了广义 Lagrange 方程,它们精确到乘子与 Maggi 方程重合。Maggi 本人在 1901 年发表短评[356],其中指出 Volterra 方程以及 Appell 方程都可由他在 1896 年的力学书中所提出的方程导出来。在大学的教科书[189]中由 Maggi 方程出发得到了非完整系统运动方程的基本形式。在 Papastavridis 的著作[370]中讨论了 Maggi 方程以及非完整约束反力的表达式。

运动方程研究的新方向由 Poincaré 的论文[373. 1901]给出。正如 В. В. Румянцев 写道的[203. 1994,C,3],"Poincaré[373]借助无限小变换的某个 Lie 可迁群导出完整系统运动方程的卓越思想,当变换群非可迁时被 Четаев[247,248,294]发展到约束非定常且变量不独立的情形。Четаев 将 Poincaré 方程变换为正则方程并研究了这些方程的积分理论。"

Poincaré-Четаев 理论被 Л. М. Мархашов, В. В. Румянцев, Фам Гуен 的工作[149,203,229]推广到线性非完整系统。1998 年 Румянцев [203]将 Poincaré-Четаев 方程推广到非线性非完整系统,因此这些方程应称为 Poincaré-Четаев-Румянцев 方程。正如 Румянцев 指出的,这些方程是非完整力学的普遍方程,由它们可以导出所有其余的运动方程。在工作[81. 2001]中给出了 Poincaré-Четаев-Румянцев 方程的几何解释。

与研究运动方程各种形式相平行,有关于建立可应用于非完整力学的变分原理的工作(力学的变分原理的详尽评述,有 В. Н. Щелкачёв 和 Papastavridis 的工作,其中有很广泛的参考文献[254,370])。1894 年 Hertz,在其名著《力学原理》[317]中指出,在经典提法下,Hamilton 原理不能应用于非完整系统。他在引言中用球按惯性无滑滚动的例子加以说明。这个情况的精美证明由 Poincaré 给出[372. 1897]。

O. Hölder[318. 1896]首先将 Hamilton-Остроградский 原理推广到定常非完整系统。A. Voss[400. 1900]利用曲线坐标将这个结果推广到非定常约束情形。与他们几乎同时,Воронец[41. 1900]和 Г. К. Суслов[219. 1901]也给出类似研究,并且奇异的是他们的工作在杂志的同一期发表。必须注意,Чаплыгин 将 Hamilton-Остроградский 原理推广到有两个自由参数的非完整系统的情形。在 В. С. Новосёлов, В. В. Румянцев, А. С. Сумбатов 等的工作[171,200,217]中讨论了力学的积分变分原理在研究非完整系统运动中应用的可能性。

在导出非完整系统运动方程的许多研究中,都利用了 D'Alembert-Lagrange 原理。但是此时在有非完整约束时必须先确定可能位移概念。对此情形 Appell[265]和 Gibbs[309]按实际上将其与可能速度等同起来的原则引进了可能位移,这是完全自然的。但正是 P. Jourdain [326. 1908—1909]将非完整力学的相应原理与可能速度的概念联系起来。注意到,实际上这个原理以稍许变化的术语由 Суслов 提出[218. 1900]。与此相关,对非完整系统的这个微分变分原理称为 Суслов-Jourdain 原理是正确的。E. Delassus[298. 1913]提议将所得结论称为广义 D'Alembert 原理的解析形式。应用 Суслов-Jourdain 原理

的研究一直延续至今(如见工作[285,1993])。

在非完整力学中同时应用 D'Alembert-Lagrange 原理,Jourdain 原理和 Gauss 原理,便出现力学的微分变分原理的相互关系问题。还在20世纪初这个问题已引起注意(例如,R. Leitinger 的文章[343. 1913]),但是对此问题的全面研究由 Четаев 的工作[245. 1932—1933]开始并由 Румянцев 的研究[199. 1975—1976]完成。这个方向现时引起很大注意。

Четаев 在同一篇文章[245]中引出非完整力学的最重要的概念——在有非线性非完整约束(Четаев 型约束)时系统的可能位移。A. Przeborski[375. 1931—1932]在将 Maggi 方程推广到非线性非完整约束时引入了非完整约束理想性的类似公理。考虑到 Appell 对相应结论的应有贡献,Новосёлов 称这些条件为 Appell-Четаев 条件,并对相应的可能位移给出术语"A-位移"[173]。Papastavridis[370. 1997]称给出的条件为在有非线性非完整约束时可能位移的 Maurer-Appell-Четаев-Hamel 定义。这些条件是非完整力学研究的基本工具(例如,见 Новосёлов[169,170],其后的论文[348,365];在工作[349. 1994]中建立了 Четаев 模型和 Vacco 模型的联系)。

经典非完整力学所提出的问题引起学者们极大注意。A. C. Сумбатов[217]和 A. П. Харламов[235]研究了 Чаплыгин[239]提出的转动刚体运动问题(另一些类似研究见下),Ю. И. Неймарк 和 Н. А. Фуфаев 在一系列论文和专著[166]中发展了导出乘子定理[235],由 Четаев[246]提出的变形的 Gauss 原理(Четаев 原理)被 Румянцев[198,199]推广,等等。已经关注并正在关注建立非完整系统运动方程的新形式并将已有形式推广到更广一类约束:Przeborski[375]将 Maggi 方程推广到非线性非完整约束;Новосёлов[169]提出 Чаплыгин 型方程和 Воронец-Hamel 型方程,这些方程对非定常非保守系统允许应用非线性约束下的 Hamel 方程[313,314];Papastavriais[370. 1995]扩充了 Boltzmann-Hamel 方程的应用范围;J. Nielsen[367],D. Mangeron 和 S. Deleanu[360],Bl. Dolaptschiew[301,302],Г. С. Погосов[182],Н. Н. Поляхов[185],М. Ф. Шульгин[255. 1950],И. М. Шульгина[256]及其他人都