高等数学

习题课教程

修订版

刘建民 主编

GAODENG SHUXUE XITIKE JIAOCHENG

NORTHWEST UNIVERSITY PRESS
西北大学出版社

高等数学习题课教程

（修订版）

主编　刘建民

编者　刘建民　常安定
　　　张凤银　马　良

西北大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题课教程/刘建民主编. —西安：西北大学出版社，2003. 8
ISBN7-5604-1207-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 高等数学-高等学校：习题课辅导-教材 Ⅳ. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 054439 号

高等数学习题课教程

刘建民 主编

西北大学出版社出版发行

（西北大学校内 邮编 710069 电话 88302590）

新华书店经销 西安市商标印刷厂印刷

850 毫米×1168 毫米 1/32 开本 11 印张 285 千字

2006 年 8 月第 2 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

ISBN7-5604-1207-6/O·110 定价：15.00 元

内容简介

本书是编者经过多年教学实践,在积累了丰富教学经验的基础上编写而成的。内容包括:函数与极限、导数与微分、积分、空间解析几何、重积分、曲线积分、曲面积分、级数与微分方程等。

书中的例题和习题都是编者精心选择的,具有一定的代表性和典型性,有些例题还给出了一题多解,有利于开阔学生的思路。每章内容由目的与要求、内容提要、典型例题、习题四部分组成。

本书可作为高等院校高等数学习题课教材,也可作为高等数学课程的辅助读物。

前　言

本教程是根据"高等数学课程教学基本要求"，参照我校教学的实际情况，综合提炼了教师多年教学实践中积累的宝贵教学经验编写而成的。我们深切地感到习题课是高等数学课程教学的一个十分重要的环节，对加深理解基本概念、基本理论，熟练掌握基本计算方法和技能技巧，培养学生分析问题和解决问题的能力，提高教学质量起着不可忽视的重要作用。本习题课教程就是根据这个目的而编写的。

本教程中每章节的内容都由四个部分组成，第一部分中的目的与要求给同学们介绍每一部分内容的掌握程度。第二部分中的内容提要是为了让同学们将学过的内容系统化，将书越读越薄。第三部分中的典型例题是本书的核心，这部分选择的典型例题针对性比较强，具有代表性、启发性、综合性，能起到揭示思维中的本质核心，促进学生举一反三，提高分析问题能力的作用；有相当一部分题做到一题多解，有助于学生开阔眼界，拓宽知识面。每一节我们都精选一定数量的习题，希望同学们能认真地练习，达到巩固、熟练掌握的目的。书后给出了习题的答案。

本书的章节安排是与同济大学应用数学系主编的《高等数学》一致的，所以配此教材使用极为方便，讲课教师可依据教学内容进度来安排每次习题课。

本教程的编写也给广大青年教师提供了方便，使他们省去了大量找习题的时间，也有益于保证高等数学习题课的教学质量。

本书由刘建民（第一、二、三章）、常安定（第四、五、六章）、张风

银(第七、八、十二章)、马良(第九、十、十一章)编写,刘建民负责统一整理和组织编写工作。

由于时间仓促,加之教学经验和教学水平有限,本书可能有错漏谬误,请读者批评指正。

编　者

2003 年 5 月

修订版前言

本书第一版出版后，我们经过多次的教学实践，在广泛征求了任课教师和学生意见和建议的基础上，对原书做了进一步的修订。本次修订主要做了以下工作：

(1)改正了第一版中的排印错误；

(2)删去了第一版中部分难度较大的习题；

(3)增加了部分例题的分析思路。

本书第一、二、三章由刘建民修订，第四、五、六章由常安定修订，第七、八、十二章由张凤银修订，第九、十、十一章由马良修订，全书由刘建民统稿与整理。最后，编者对使用本书并提出宝贵意见的任课教师表示衷心感谢。

编　者

2006 年 6 月

目 录

第一章　函数与极限

第一节　函数与极限

一、目的与要求

1. 理解映射与函数的概念.

2. 了解函数奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数的概念,了解反函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 会建立简单实际问题中的函数关系式.

6. 理解极限的概念(对极限的 $\varepsilon-N$、$\varepsilon-\delta$ 定义可在学习过程中逐步加深理解,对于给出 ε 求 N 或 δ 不作过高要求).

7. 掌握极限四则运算法则.

8. 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则),会用两个重要极限求极限.

9. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念.会用等价无穷小求极限.

二、内容提要

1. 函数

(1) 映射与函数的概念

① 映射的概念

设X、Y是两个非空集合，如果存在一个法则f，使得对X中每个元素x，按法则f在Y中有唯一确定的元素y与之对应，则称f为从X到Y的映射，记作

$$f:X\to Y$$

其中y称为元素x(在映射f下)的像，并记作$f(x)$，即

$$y=f(x)$$

而元素x称为元素y(在映射f下)的一个原像，集合X称为映射f的定义域，记作D_f，即$D_f=X$；X中所有元素的像所组成的集合称为f的值域，记作R_f或$f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\,|\,x\in X\}$$

若$R_f=Y$，即Y中任一元素y都是X中某元素的像，则称f为X到Y上的映射或满射，若对X中任意两个不同元素$x_1\neq x_2$的像$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称f为X到Y的单射；若映射f既是单射又是满射，则称f为一一映射(或双射).

② 逆映射

设f是X到Y的单射，则由定义，对每个$y\in R_f$有唯一的$x\in X$适合$f(x)=y$，于是，我们可定义一个从R_f到X的新映射g，即

$$g:R_f\to X$$

对每个$y\in R_f$，规定$g(y)=x$，x满足$f(x)=y$，这个映射g称为f的逆映射，记作f^{-1}，其定义域$D_{f^{-1}}=R_f$，值域$R_{f^{-1}}=X$.

③ 复合映射

设有两个映射

$$g:X\to Y_1\qquad f:Y_2\to Z$$

其中$Y_1\subset Y_2$，则由映射g和f可以定出一个X到Z的对应法则，它将每个$x\in X$映射成$f[g(x)]\in Z$，这个对应法则确定了一个从X到Z的映射，这个映射称为映射g和f构成的复合映射，记作$f\circ g$，即

$$f\circ g : X \to Z$$
$$(f\circ g)(x) = f[g(x)], x \in X$$

④ 函数的概念

设数集 $D \subset R$，则称映射 $f:D \to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$.

⑤ 反函数

设函数 $f:D \to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}, f(D) \to D$，称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数.

⑥ 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D) \subset D_1$，则由下式确定的函数 $y = f[g(x)], x \in D$ 称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量.

(2) 函数的几种特性

① 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在正数 M，使得 $|f(x)| \leqslant M$，对任一 $x \in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

② 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，如果对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(单调减少的).

③ 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，关于原点对称，如果对于任一 $x \in D$，$f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) 恒成立，则称 $f(x)$ 为

偶(奇)函数.

④ 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个正数 L,使得对于任一 $x \in D$ 上有 $(x \pm L) \in D$,且 $f(x \pm L) = f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,L 称为 $f(x)$ 的周期.

(3) 初等函数

① 基本初等函数

基本初等函数是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的统称.

② 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

2. 极限

(1) 数列的极限

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$、$\exists$正整数 N,只要 $n > N$,就有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

(2) 函数的极限

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$,只要 $0 < |x - x_0| < \delta$,就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ X > 0$,只要 $|x| > X$,就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

左极限　$f(x_0 - 0) \triangleq \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$,只要 $0 < x_0 - x < \delta$,就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

右极限　$f(x_0 + 0) \triangleq \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$,只要 $0 < x - x_0 < \delta$,就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(3) 无穷小与无穷大

①$\alpha(x)$ 为某过程中的无穷小 $\Leftrightarrow \lim\alpha(x)=0$.

②$f(x)$ 为某过程中的无穷大 $\Leftrightarrow \lim f(x)=\infty$.

③ 无穷小的比较，设 $\lim\alpha=0, \lim\beta=0$

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=L\neq 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\beta\sim\alpha$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=L\neq 0(k>0)$，则称 β 为 α 的 k 阶无穷小.

④ 常用的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x, \tan x\sim x, \arcsin x\sim x, \arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x, e^x-1\sim x, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2, \sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$.

(4) 性质

① 极限存在必唯一.

② 有极限的变量必有界.

③ 保号性，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且 $A>0$（或 $A<0$），则存在着 x_0 的某一去心邻域，当 x 在该邻域内时，就有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

④ 极限的四则运算法则

若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,$$

$$\lim f(x)g(x)=AB,$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

(5) 极限存在准则及两个重要极限.

极限存在准则 Ⅰ　　单调有界数列必有极限.

极限存在准则 Ⅱ　　夹逼准则.

两个重要极限　　若 α 为某个过程中的无穷小，则

$$①\lim\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;\quad ②\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}.$$

三、典型例题

例 1　设映射 $f:X\to Y$，若存在一个映射 $g:Y\to X$，使 $gof=I_X$，$fog=I_Y$，其中 I_X、I_Y 分别是 X、Y 上的恒等映射，即对于每一个 $x\in X$ 有 $I_Xx=x$、对于每一个 $y\in Y$，有 $I_Yy=y$. 证明：f 是双射，且 g 是 f 的逆映射 $g=f^{-1}$.

分析　欲证 f 是双射，只要证明 f 既是满射又是单射即可，后者按定义易得证

证明　我们先证明 f 是满射，设 $y\in Y$

令　$g(y)=x\in X$

由于　$fog=I_y$

所以　$f(x)=f(g(y))=I_Y(y)=y$

即　f 是满射

再证 f 单射

设　x_1、$x_2\in X$，而 $f(x_1)=f(x_2)$

由于 $gof=I_X$

所以 $x_1=I_X(x_1)=g(f(x_1))=g(f(x_2))=I_X(x_2)=x_2$

这就证明了 f 是单射，因此 f 是双射.

下面再证 g 是 f 逆映射，按逆映射的定义，对于每个 $y\in R_f$，由 f 是 X 到 Y 的双射，有唯一的 $x\in X$ 适合 $f(x)=y$，再由 $g(y)=g(f(x))=x$，按定义得 g 是 f 的逆映射，即 $g=f^{-1}$.

例 2　设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -2\leqslant x<0\\ 2^x, & 0\leqslant x<1\\ x^2+1, & 1\leqslant x<2\end{cases}$，求 $f(x)$ 的反函数 $\phi(x)$.

解　当 $-2\leqslant y<0$ 时，记 $x=2y+1$，则

$$y=\frac{x-1}{2},\quad -3\leqslant x<1$$

当 $0\leqslant y<1$ 时，记 $x=2^y$，则

$$y=\log_2 x,\quad 1\leqslant x<2$$

当 $1\leqslant y<2$ 时，记 $x=y^2+1$，则

$$y=\sqrt{x-1},\quad 2\leqslant x<5$$

故得 $\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}, & -3\leqslant x<1\\ \log_2 x, & 1\leqslant x<2\\ \sqrt{x-1}, & 2\leqslant x<5.\end{cases}$

例 3　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1\end{cases}$　$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解　$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|<1\\ 0, & |g(x)|=1\\ -1, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

例 4　用数列极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+n+3}}{n}=\sqrt{2}$.

证明　任给 $\varepsilon>0$

由于 $\left|\dfrac{\sqrt{2n^2+n+3}}{n}-\sqrt{2}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{2n^2+n+3}-\sqrt{2}\,n}{n}\right|$

$$=\frac{n+3}{n(\sqrt{2n^2+n+3}+\sqrt{2}\,n)}<\frac{4n}{n2\sqrt{2}\,n}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{n}<\frac{2}{n}$$

令$\frac{2}{n}<\varepsilon$得$n>\frac{2}{\varepsilon}$,取$N=[\frac{2}{\varepsilon}]$,于是对任意给定的$\varepsilon>0$,可找到$N=[\frac{2}{\varepsilon}]$使当$n>N$时,恒有

$$\left|\frac{\sqrt{2n^2+n+3}}{n}-\sqrt{2}\right|<\varepsilon$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+n+3}}{n}=\sqrt{2}$.

例 5 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(A\neq 0)$,试证明必有$x_0$的某个去心邻域存在,使得在该邻域内$\frac{1}{f(x)}$有界.

证明 由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(A\neq 0)$,取$\varepsilon_1=\frac{|A|}{2}>0$必存在$\delta>0$,使当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\frac{1}{2}|A|$成立.

因为 $|A|-|f(x)|\leqslant|f(x)-A|$

所以 $|f(x)|>\frac{1}{2}|A|$

故 $\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\frac{2}{|A|}$

即当x满足$0<|x-x_0|<\delta$时$\frac{1}{f(x)}$有界.

例 6 用无穷大定义证明$\lim\limits_{x\to 0+0}\ln x=-\infty$.

证明 由$x\to 0+0$,不妨设$0<x<1$

$|\ln x|=-\ln x=\ln\frac{1}{x}$,任给$M>0$

令 $\ln x<-M$ 即$\ln\frac{1}{x}>M$

解得 $0<x<\frac{1}{e^M}$,取$\delta=\frac{1}{e^M}$

当$0<x<\delta$时,恒有$\ln x<-M$成立.

故$\lim\limits_{x\to 0+0}\ln x=-\infty$.