中等专业学校教材

财经类专业通用

数学

第二册

（第二版）

财经类中专数学教材编写组编

高等教育出版社

中等专业学校教材

财经类专业通用

数　　学

第 二 册

（第 二 版）

财经类中专数学教材编写组编

高等教育出版社

(京) 112 号

本书是根据国家教育委员会1987年审定的财经类专业通用《中等专业学校数学教学大纲》编写的。全书共分四册出版。第二册内容为立体几何、直线、二次曲线、排列、组合和数列。书末附学习指导，它按教材章次对应编写，每章包括内容提要、学习辅导、自我检测题三部分。

本书由全国中专数学课程组组织审阅，并定为招收初中毕业生的中等专业学校财经类各专业使用的教材。

中等专业学校教材
财经类专业通用
数　学
第 二 册
(第 二 版)
财经类中专数学教材编写组编
*
高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
兰州新华印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32 印张 9.5 字数 198,000
1987年10月第1版
1993年4月第2版 1995年3月第6次印刷
印数 [illegible]—553 187
ISBN 7-04-004264-9/O·1203
定价 3.95 元

序　言

本教材是根据1986年国家教育委员会审定的财经类专业通用的《中等专业学校数学教学大纲(试行草案)》编写的.

本教材共分四册:

第一册　集合、函数、三角、对数;?

第二册　*立体几何、解析几何、排列组合与二项式定理,数列;

第三册　微积分;

第四册　行列式与矩阵、*投入产出简介、*线性规划、概率初步、*数理统计.

书后附有学习指导,其中包括内容提要、学习辅导及自我检查题,供学习时参考.

本教材可供招收初中毕业生财经类各专业试用,第三、四册也可供招收高中毕业生财经类各专业选用,带*的内容可供选学.

本教材是由国家教育委员会组织的财经类中专数学教材编写组编写的. 编写组由南京铁路运输学校沈清任主编,上海银行学校姚叠叁、北京供销学校贝虹任协编. 其中第一、二两册初稿由贝虹编写,第三册初稿由姚叠叁编写,第四册初稿由沈清编写. 全书由沈清统稿.

本教材由全国中专数学课程组组织审阅, 参加第二册审稿会的有任必、邵玉书、胡伯权、张又昌、李继士、陶稚筠. 参

加第二册学习指导审稿会的有张又昌、袁时中、王化久、周建和、郑先林。

本教材根据国家教委的要求对某些名词加注了英文，并在书后附有英汉词汇对照表，供参考。

由于编者的水平所限，加以编写时间仓促，错误及不当之处在所难免，恳切期望广大读者批评指正，以便今后进一步修订改进。

财经类中专数学教材编写组

一九九二年三月

目 录

*第七章　立体几何简介

我们生活在立体空间之中，所接触的物体形状都是些空间图形．空间图形由点、线、面这些基本元素组成，它的所有点不全在同一平面内．**立体几何**(solid geometry)主要研究空间图形的概念、性质及其应用．

本章将介绍立体几何的基本知识，包括平面（plane）和它的基本性质；直线（straight line）与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，它们之间所成角的定义；以及柱(cylinder)、锥(cone)、台(frustum)、球(ball)的表面积及体积的计算方法．

§7-1　平面及其基本性质

一　平面及平面图形的表示法

平面是广阔无涯无厚度的，也就是说，平面是可以无限延展的．我们日常见到的一些简单的平面图形，如黑板面、窗玻璃面、课桌面等等，都可看作平面的一部分，它们大都具有矩形的形状．当我们在适当的距离和角度观察这些矩形时，会感觉它们都象平行四边形．因此在立体几何中，通常可把平面的示意图画成平行四边形，如图 7-1 所示．由于平面是广

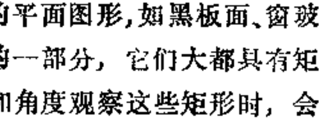
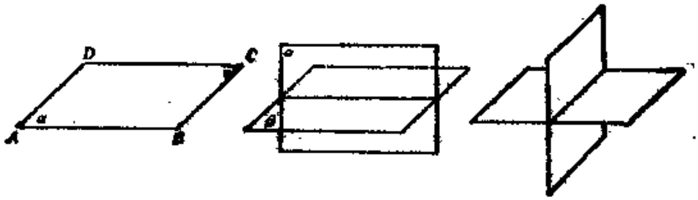


图　7-1

阔无涯的，所以平行四边形的周界线仅仅是示意，并不真实

存在，或者也可以说平行四边形只是所表示的平面的一部分。

在立体几何中通常用希腊字母 α、β、γ 等表示平面，把它们写在平行四边形的某一角的内部；有时也用平行四边形顶点的字母表示平面，如图 7-2(1)，可记作平面 $ABCD$ 或平面 α 等等．还规定，显露的部分画实线；被遮的部分画虚线或省略不画，如图 7-2(2)(3)所示．



(1)　　(2)　　(3)

图 7-2

在水平平面内画平面图形，按画法几何的规定，一般不画它的真实形状，例如矩形往往画成一个锐角为 45° 的平行四边形，其中，水平的一边方向不变并保持原长度，竖直的边则偏转 45° 并缩为原长的一半；其它的平面图形也可类似地画出，这就得到了平面图形在水平平面内的示意图，如图 7-3 所示．

二　平面的基本性质

通过长期的实践，人们总结出关于平面的三条基本性质，把它们作为公理，这些公理是研究立体几何的理论基础．

公理 1　如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线上的所有点也都在这个平面内．

如图 7-4 所示，已知直线 l 上有两个点 A 和 B 在平面 α

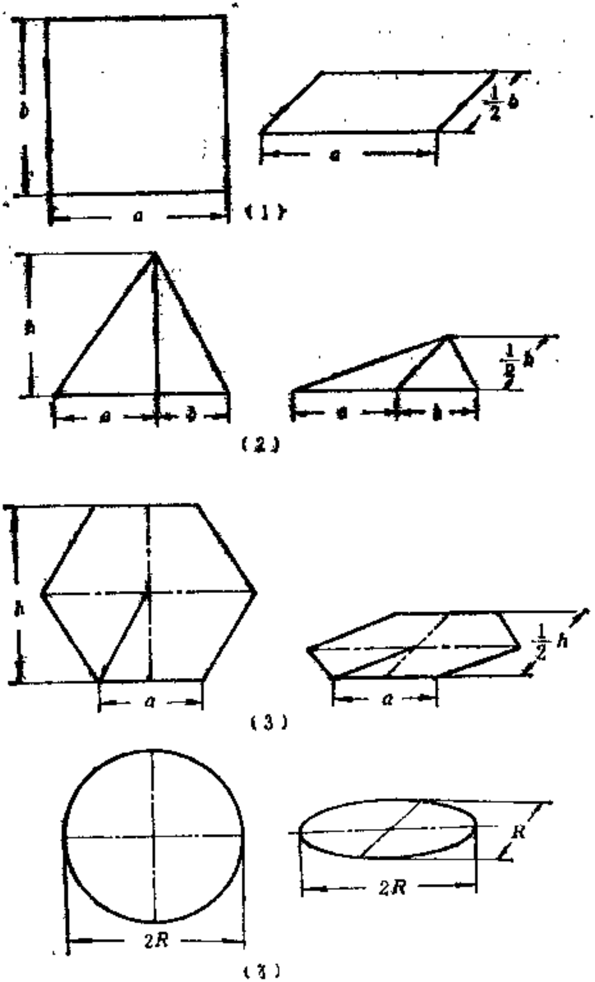


图 7-3

内，则直线 l 上所有的点都在平面 α 内.

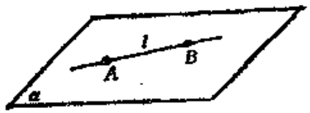


图 7-4

这种情况我们叫做直线 l 在平面 α 内或平面 α 经过直线 l.

例如把一根直尺边缘上的任意两点放在平的桌面上，可以看到直尺的边缘全部落到桌面上.

为了叙述的方便，在研究点、线、面位置关系时，可以使用集合的符号和术语. 通常可以认为点是元素，而直线和平面都可以看成点的集合，因此有以下写法：

点 A 在直线 l 上，即直线 l 通过点 A，记作 $A\in l$;

点 A 不在直线 l 上，即直线 l 不通过点 A，记作 $A\notin l$;

点 A 在平面 α 内，即平面 α 通过点 A，记作 $A\in\alpha$;

点 A 不在平面 α 内，即平面 α 不通过点 A，记作 $A\notin\alpha$.

直线 l 在平面 α 内，即平面 α 通过直线 l，记作 $l\subset\alpha$ 或 $\alpha\supset l$.

于是公理 1 可表示为：如果 α 为平面，点 $A\in\alpha$，点 $B\in\alpha$，那么直线 $AB\subset\alpha$.

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这点的一条直线.

如图 7-5 所示，如果点 A 是平面 α 与平面 β 的一个公共点，那么平面 α 与平面 β 就相交于过点 A 的一条直线 a. 这时我们说平面 α 与平面 β 相交于直线 a.

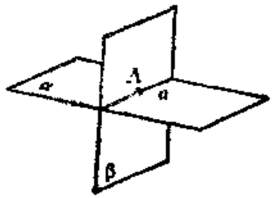


图 7-5

例如天花板与墙壁的交线是一条直线；折纸的折痕是两个平面的交线，也是一条直线.

平面α与平面β相交于直线l，可记作

$$\alpha\cap\beta=l.$$

于是公理2可表示为：如果点$A\in\alpha$，点$A\in\beta$，那么$\alpha\cap\beta=l$，其中$A\in l$.

公理3 过不在一条直线上的任意三点，存在且仅存在一个平面.

如图7-6所示，如果A、B、C是不在同一直线上的三个点，那么经过这三点，存在且仅存在一个平面α.

图 7-6

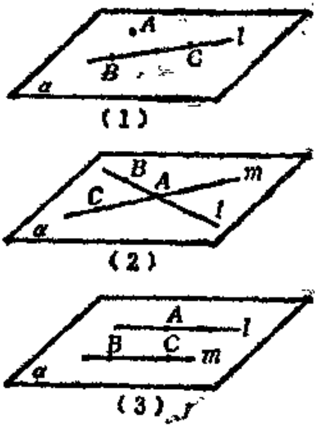


图 7-7

公理3可以简单地说成“不在同一直线上的三点确定一个平面”. 其中，“确定一个平面”是指“存在且仅存在一个平面”的意思.

例如把一扇门上的两个合页和一把锁看作是不在同一条

直线上的三个点，那么锁上门后，门所在的平面就被确定，于是门就固定不动了.

根据公理1和公理3，还可以得到确定一个平面的三个推论.

推论1 一条直线和这条直线外的一点可确定一个平面.

如图7-7(1)所示，设A是直线l外的一点，在l上取B、C两点，则点A、B、C不在同一条直线上，它们可以确定平面α；而直线上有两个点B、C在平面α内，则直线l也在平面α内. 所以这样的平面α仅有一个.

推论2 两条相交直线可以确定一个平面.

如图7-7(2)所示，设直线l与m相交于点A，除点A外在直线l与m上分别取点B和C，则点A、B、C不在同一直线上，所以它们可以也仅可以确定一个平面.

推论3 两条平行直线可以确定一个平面.

如图7-7(3)所示，根据不在同一条直线上的三点及平行直线的意义，它们可以也仅可以确定一个平面.

习　题　7-1

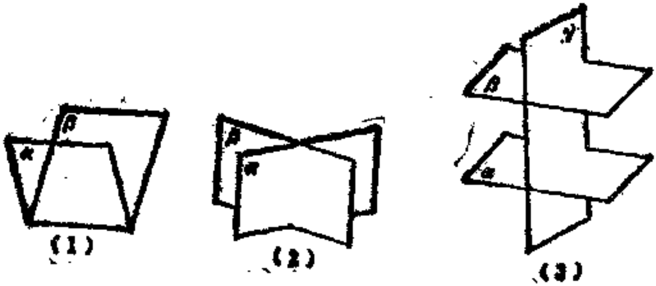
1. 仿照图7-3在水平平面上画出三角形、正方形、梯形、正六边形及圆的示意图.

2. 试判断下面所画的平面与平面相交的图形是否正确，并给以改正.(见第7页图)

3. 回答下列问题:

(1) 四点中有三点在一条直线上，则这四点的位置如何？过这四点可以确定几个平面？

(2) 一条直线分别与两条平行直线平行，这三条直线必在同一平面



(第2题图)

内吗?

(3) 过一点任作三条直线,它们是否在同一平面内?

(4) 一条直线与两条平行直线分别相交，这三条直线是否在同一平面内?若与两条相交直线分别相交,这三条直线是否在同一平面内?

§7-2 直线与直线的位置关系 异面直线所成的角

一 直线与直线的位置关系

本章所说的两条直线，通常指不重合的两条直线. 我们知道在同一平面内的两条直线的位置关系只有两种：平行或相交. 但在空间,两条直线还存在着另外一种位置关系. 例如,教室中黑板的下沿与窗框的上沿所在的两条直线；电车的输电线与路旁的电线杆所表示的两条直线，它们不在同一平面内,既不平行也不相交，对于具有这种位置关系的直线，给出以下定义:

定义 不在同一平面内的两条直线叫做异面直线.

于是空间两条直线的位置关系有以下三种:

(1) 平行直线——没有公共点，
(2) 相交直线——有且仅有一个公共点，

以上两种：在同一平面内；

(3) 异面直线——没有公共点，不在同一平面内.

画异面直线时，要把两条直线画在不同的平面内，如图 7-8(1)、(2)、(3)的画法就比较直观，而图 7-8(4)、(5)的画法不能显示出异面直线的特点，应该避免.

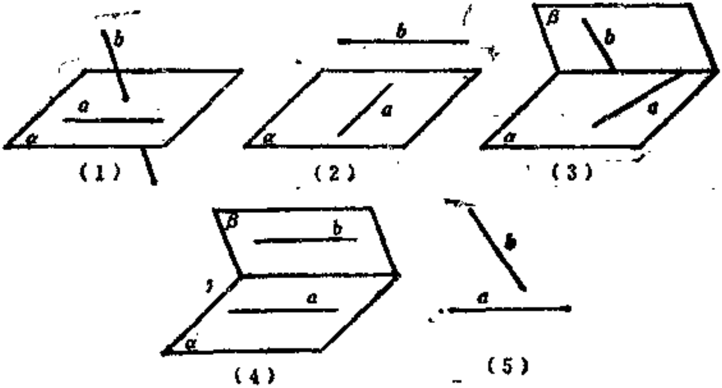


图 7-8

我们知道，在同一平面内，平行于同一条直线的两条直线一定平行，在空间也有类似的结论.

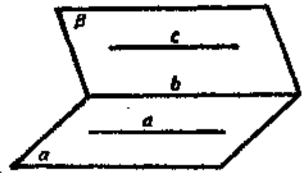


图 7-9

定理 1(三线平行定理) 空间三条直线，如果其中两条直线都平行于第三条直线，那么这两条直线也相互平行.（证明从略）

如图 7-9 所示，若直线 $a \parallel b$，$c \parallel b$，则 $a \parallel c$.

例如挂在墙上的矩形镜框，已知镜框的上沿平行于下沿，所以悬挂时只要使下沿线与地板缝平行，就可知上沿线一定也和地板缝平行.

例 1 四个顶点不在同一平面内的四边形叫做空间四边形. 如图 7-10 所示，已知空间四边形 $ABCD$, E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点.

求证 $EFGH$ 是平行四边形.

证 连结线段 BD(它是空间四边形 $ABCD$ 的一条对角线)，则线段 AB、BD、DA 组成 $\triangle ABD$, EH 是它的中位线，所以

$$EH \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2} BD.$$

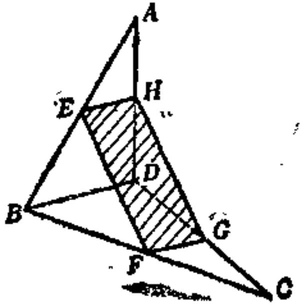


图 7-10

同理线段 BC、CD、DB 组成 $\triangle BCD$, FG 是它的中位线，所以

$$FG \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2} BD.$$

由三线平行定理可知

$$EH \perp\!\!\!\!= FG,$$

因此 $EFGH$ 是一个平行四边形.

利用与同一条直线平行的关系可以推出空间许多直线彼此相互平行. 如图 7-11 所示，把一张长方形的纸对折两次，所得到的折痕都是相互平行的.

此外，类似于平面几何中对应边平行且方向相同的两个角相等，空间也有这样的定理.

定理 2 不在同一平面内的两个角，如果其中一个角的

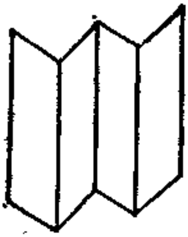


图 7-11

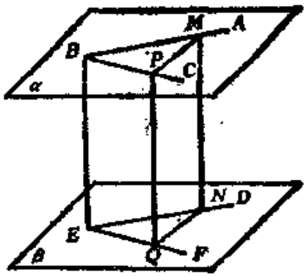


图 7-12

两边与另一个角的两边分别平行且方向相同，那么这两个角相等．

已知 $\angle ABC$ 在平面 α 上，$\angle DEF$ 在平面 β 上，其中 $AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$，并且方向相同，如图 7-12 所示．

求证 $\angle ABC = \angle DEF$．

证 在两个角的对应边 BA 与 ED 上分别截取 $BM = EN$，在 BC 与 EF 上分别截取 $BP = EQ$，连结 BE、MN、PQ、MP 和 NQ．

因为 $BM \mathrel{\underline{\parallel}} EN$，所以 $BMNE$ 是平行四边形，于是它的另一组对边 $BE \mathrel{\underline{\parallel}} MN$．

同理可证 $BE \mathrel{\underline{\parallel}} PQ$，

因此 $MN \mathrel{\underline{\parallel}} PQ$，

即 $MPQN$ 也是平行四边形，则有

$$MP \mathrel{\underline{\parallel}} NQ.$$

于是 $\triangle MBP \cong \triangle NEQ$，从而 $\angle MBP = \angle NEQ$，即

$$\angle ABC = \angle DEF.$$