普通高等教育“十一五”国家级规划教材

黎曼-芬斯勒几何基础

莫小欢 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

黎曼-芬斯勒几何基础

莫小欢 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

黎曼–芬斯勒几何基础 / 莫小欢编著. — 北京：北京大学出版社，2007.3

ISBN 978-7-301-10796-6

Ⅰ. 黎 … Ⅱ. 莫 … Ⅲ. ① 黎曼几何–研究生–教材 ② 芬斯勒空间–几何–研究生–教材 Ⅳ. O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 062030 号

书　　名:	**黎曼–芬斯勒几何基础**
著作责任者:	莫小欢　编著
责 任 编 辑:	刘　勇
标 准 书 号:	ISBN 978-7-301-10796-6/O · 0702
出　版　者:	北京大学出版社
地　　址:	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址:	http://www.pup.cn
电　　话:	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021 出版部 62754962
电 子 信 箱:	zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:	北京大学印刷厂
发　行　者:	北京大学出版社
经　销　者:	新华书店
	890 mm× 1240 mm　A5　7 印张　200 千字
	2007 年 3 月第 1 版　2007 年 3 月第 1 次印刷
印　　数:	0001—3000 册
定　　价:	17.00 元

前　言

黎曼–芬斯勒 (Riemann-Finsler) 几何 (简称芬斯勒几何) 包括其重要特例黎曼几何是现代数学中的重要前沿学科. 由芬斯勒几何发展起来的几何方法对于探索理论物理、生物数学和信息科学等其他领域提出的问题都是相当有用的.

芬斯勒几何是在其度量上无二次型限制的黎曼几何. 这种度量是由德国数学家黎曼在其有名的就职演说 "论作为几何学基础的假设" (1854 年) 中提出的. 在上个世纪初的巴黎国际数学家大会上, 数学大师希尔伯特 (Hilbert) 提出的 20 世纪 23 个著名问题中有两个和芬斯勒几何学密切相关. 在光滑情形的希尔伯特第 4 问题是寻找和刻画 n 维欧氏空间的开集上的射影平坦芬斯勒度量; 而希尔伯特第 23 问题是探索芬斯勒线素之积分的变分学.

芬斯勒几何名称是来之于 Finsler 在 1918 年完成的他的博士学位论文, 在此文中芬斯勒研究了芬斯勒曲线和芬斯勒曲面.

国内外公认的 20 世纪数学大师陈省身院士年轻时曾致力于芬斯勒几何的探索. 他在 1948 年利用外微分和活动标架法发现了芬斯勒空间上著名的联络 (现在称之为陈联络). 20 世纪 90 年代末以后, 经陈省身院士的大力倡导, 芬斯勒几何的研究在国际、国内有了很大发展, 特别是大量新的芬斯勒度量的发现和芬斯勒空间的整体性质的建立使几何界乃至数学界已逐渐开启了神秘的芬斯勒几何学的大门. 陈省身先生曾预见, 芬斯勒几何将是 21 世纪微分几何的发展方向.

本书以活动标架为工具, 以射影丛上的陈联络为基础展开芬斯勒几何的讨论. 该书系统地引入了芬斯勒流形上三类几何不变量, 介绍了这些不变量之间的内蕴关系, 分析了经典和现代芬斯勒几何的局部结果和整体结果, 给出了大量满足各种曲率条件的非平凡芬斯勒流形的例子.

本书中多数几何不变量和基本方程是位于芬斯勒流形的射影球丛上，即，它们关于切向量都是0阶正齐性的，从而内容上简明扼要. 本书通过介绍芬斯勒流形上调和映射理论与射影球丛的几何等体现现代芬斯勒几何的研究方法，故该书通俗易懂.

本书作者曾在北京大学为研究生开设过三次芬斯勒几何课程. 作者在 1995 年南开大学微分几何学术年和 2002 年 5 月杭州暑期芬斯勒几何研讨会，以及 2004 年南开芬斯勒几何讲习班上作过芬斯勒几何的系列演讲，这些便是本书取材之主要来源. 几何大师陈省身生前对该书的编写寄以厚望，也曾提出许多极其宝贵的意见，在此表示崇高的敬意.

在本书的写作过程中，作者得到北京大学数学科学学院、北京大学数学研究所、北京大学教材建设委员会、北京大学出版社以及国家自然科学基金 (项目号： 10471001, 10171002) 的支持和资助，作者在此表示衷心的感谢. 在本书正式出版之前，博士研究生黄利兵和余昌涛为该书做了大量具体工作，作者在此向他们表示深切的谢意. 最后，作者向编辑刘勇老师卓有成效的辛勤工作表示敬意.

莫 小 欢

2006 年 9 月于北京大学

内容简介

本书是学习黎曼–芬斯勒几何 (简称芬斯勒几何) 的入门教材. 全书共十章. 作者以较大的篇幅, 即前五章介绍了芬斯勒流形、闵可夫斯基空间 (即芬斯勒流形的切空间) 上的几何量、陈联络, 以及共变微分和第二类几何量、黎曼几何不变量和弧长的变分等基本知识和工具. 在有了上述宽广而坚实的基础以后, 论述芬斯勒几何的核心问题, 即射影球丛的几何、三类几何不变量的关系、具有标量曲率的芬斯勒流形、从芬斯勒流形出发的调和映射、局部射影平坦和非局部射影平坦的芬斯勒度量等. 它们既是当前十分活跃的研究领域, 也是作者研究成果的领域之一, 含有作者独到的见解. 本书每章内都附有一定数量的习题, 书末附有习题解答和提示, 便于读者深入学习或自学.

本书可作为综合性大学、师范院校数学系与物理系高年级本科生和研究生的教材或教学参考书, 也可供科研院所从事数学和物理学等相关学科科研人员阅读.

作者简介

莫小欢 北京大学数学科学学院教授, 博士生导师. 1991 年在杭州大学获得博士学位. 长期从事几何学的研究工作和教学工作. 研究项目 "芬斯勒流形的几何与调和映射" 获 2002 年教育部提名国家自然科学奖一等奖. 负责的几何学及其习题课程被评为 2005 年北京市精品课.

目　录

第一章 芬斯勒流形

芬斯勒几何是在其度量上无二次型限制的黎曼几何. 这种几何学在相对论、控制论、生物数学和心理学有广泛的应用 [3]. 本章我们引入芬斯勒流形的概念并讨论它与黎曼流形的关系. 此外我们给出了除黎曼流形以外其他几类有用的芬斯勒流形的例子.

§1.1 历 史 回 顾

弧长元素具有

$$\mathrm{d}s := F(x^1, \cdots, x^n; \mathrm{d}x^1, \cdots, \mathrm{d}x^n) \tag{1.1}$$

形状的几何学称之为黎曼 – 芬斯勒几何学 (简称为芬斯勒几何学), 这里 F 是定义在流形的切丛上的关于 $\mathrm{d}x^i$ 的一阶正齐性函数. 事实上, F 是在 x 点的切空间上闵可夫斯基范数 F_x (参见 §2.2) 的集合, 并且它光滑地依赖于流形上点 x 的变化. 度量 (1.1) 是德国数学家黎曼 (Riemann) 在其有名的就职演说 "论作为几何学基础的假设" (1854 年) 中提出的. 黎曼在演说中强调了具有二次型限制的特别情形, 即

$$F^2(x, \mathrm{d}x) = g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j.$$

在上个世纪初, 1900 年巴黎召开的国际数学家大会上, 希尔伯特提出了 23 个著名的数学问题, 他的最后一个问题便是探索具有线素 (1.1) 的 $\int \mathrm{d}s$ 的变分学. 他的第 4 个问题归结为在正则度量的情形, 寻找所有欧氏空间之开集上的射影平坦的芬斯勒度量.

几年以后, 芬斯勒比较系统地讨论了赋予度量 (1.1) 的曲线和曲面的几何, 以此内容完成了他的博士论文 (1918 年). 芬斯勒几何一词正是来源于此.

国内外公认的 20 世纪几何大师陈省身院士年轻时曾致力于芬斯勒流形的研究. 他利用外微分和活动标架法发现了著名的芬斯勒流形上的联络 (1948 年，现在称为陈联络). 近廿年来，陈省身教授多次极力倡导黎曼–芬斯勒几何的学习和研究，使这门几何学发展迅速，成为了国内外一门风起云涌、日新月异的学科.

§1.2　芬斯勒流形

设 M 是一个 n 维光滑流形. 以 T_xM 表示 M 在 x 点的切空间. 设 TM 是 M 的切丛，即

$$TM := \bigcup_{x\in M} T_xM = \{(x,y)|x\in M, y\in T_xM\}.$$

用 $\pi : TM \to M$ 表示切丛的自然投影 (见图 1.1), 即

$$(x,y) \xrightarrow{\pi} x.$$

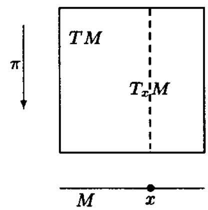

图　1.1

设 (φ, x^i) 是 M 的开子集 U 上的局部坐标卡，即

$$\varphi(x) = (x^1, \cdots, x^n), \quad \forall x \in U.$$

对 $i = 1, \cdots, n$, 我们取 U 上的曲线

$$\gamma_i(t) = \varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^{i-1}, x^i + t, x^{i+1}, \cdots, x^n),$$

这样 $\gamma_i'(0)$ 便是 T_xM 的一组基，即

$$T_xM = \mathrm{Span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_x, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_x \right\},$$

其中 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x := \gamma_i'(0)$. 对于 T_xM 中的切向量 y, 它具有如下线性表示

$$y = y^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x. \tag{1.2}$$

因而 x^i 诱导了 TM 的开子集 $\pi^{-1}(U)$ 上的局部坐标 $(x^1, \cdots, x^n; y^1, \cdots, y^n)$. 为了方便起见，我们常常不区分 (x, y) 和其坐标表示 (x^i, y^i). 把切丛 TM 上的函数 H 常常局部表示为

$$H(x^1, \cdots, x^n; y^1, \cdots, y^n),$$

且以 $H_{y^i}, H_{y^iy^j}, \cdots$ 等表示函数 H 关于坐标 y^k 的偏导数. H 关于坐标 x^i 的偏导数也采用类似记号. 下面引理表明当切丛的坐标系变化时，函数关于坐标分量之偏导数的变化规律.

引理 1.2.1 设 V 是流形 M 的开子集，它满足 $U \bigcap V \neq \emptyset$, 而 $(\tilde{x}^i, \tilde{y}^i)$ 是切丛 TM 在开子集 $\pi^{-1}(V)$ 上的局部坐标系. 则

(i) $H_{\tilde{y}^j} = \dfrac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} H_{y^i};$ (1.3)

(ii) $H_{\tilde{x}^j} = \dfrac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} H_{x^i} + \tilde{y}^k \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^k} H_{y^i}.$ (1.4)

证明 由 (1.2) 式我们有

$$y^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \tilde{y}^j, \tag{1.5}$$

于是可得

$$\frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^j} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}. \tag{1.6}$$

利用 (1.5), (1.6) 式和复合函数的求导法则可得 (1.3) 和 (1.4) 式. □

定义 1.2.2 $F: TM \to [0, \infty)$ 若满足:

(i) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$;

(ii) $F|_{TM\backslash\{0\}}$ 是 C^∞ 的;

(iii) 矩阵 $\left[\frac{1}{2}(F^2)_{y^iy^j}\right]$ 在 $TM\backslash\{0\}$ 上是正定的,

则称 F 是流形 M 上的**芬斯勒结构**或**芬斯勒度量**, 赋予芬斯勒结构

F 的光滑流形 M 称为**芬斯勒流形**, 记为 (M, F).

§1.3 基本例子

1.3.1 黎曼流形

光滑流形 M 上的**黎曼度量**是 M 上的一族内积 $\{g_x\}_{x\in M}$, 这些内积满足

$$g_{ij}(x) := g\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)$$

是光滑的. 黎曼流形上的芬斯勒结构满足

$$F(x,y) = \sqrt{g_{ij}(x)y^iy^j}.$$

此时, $\frac{1}{2}(F^2)_{y^iy^j} = g_{ij}(x)$, 它与切向量无关. 由此可见黎曼流形是有二次型限制的芬斯勒流形.

我们用 $|\cdot|$ 和 $\langle\ ,\ \rangle$ 分别表示 $\mathbb{R}^n$ 上的标准欧氏范数和内积. $\mathbb{B}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球. 考虑下列经典的芬斯勒结构

$$F = \sqrt{\frac{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)}{1-|x|^2}}, \tag{1.7}$$

$$F = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)}}{1-|x|^2}. \tag{1.8}$$

对于 (1.7) 式, 易求得

$$\begin{aligned} g_{ij} &:= (F^2/2)_{y^iy^j} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{y^ky^l\delta_{kl}(1-|x|^2) + \Big(\sum\limits_k x^ky^k\Big)^2}{1-|x|^2}\right]_{y^iy^j} \\ &= \frac{\delta_{ij}(1+|x|^2) + x^ix^j}{1-|x|^2} = g_{ij}(x). \end{aligned}$$

这样, 结构 (1.7) 是一个黎曼度量的芬斯勒结构. 类似可证由 (1.8) 式定义的芬斯勒结构也是黎曼的.

上述黎曼度量有特殊的曲率性质. 定义在 (1.7) 式中的黎曼度量具有常曲率 1. 而度量 (1.8) 具有常曲率 -1, 我们称之为 **Klein 度量**.

1.3.2 闵可夫斯基流形

定义 1.3.1 设 (M,F) 是一个芬斯勒流形. 若对 M 上所有坐标卡 (U,x^i), $g_{ij}(x,y)=g_{ij}(y)$, 我们称 (M,F) 为**局部闵可夫斯基流形**; 特别, 当 M 是一个向量空间时, (M,F) 称为**(整体) 闵可夫斯基流形**.

例 1.3.2[9] 对 $\mathbb{R}^2$, $T_x\mathbb{R}^2\cong\mathbb{R}^2$, 其中 $x\in\mathbb{R}^2$. 我们记 $y=(p,q)$. 定义

$$F_{\lambda,k}(x,y):=F_{\lambda,k}(y)=\sqrt{p^2+q^2+\lambda(p^{2k}+q^{2k})^{1/k}},$$

其中 $\lambda\in[0,\infty)$, $k=\{1,2,\cdots\}$. 当 $\lambda=0$ 时, $F_{0,k}$ 是黎曼度量的芬斯勒结构. 事实上, 此黎曼度量是欧氏度量. 易证 $F_{\lambda,k}$ 在 $T\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ 上是光滑的. 进一步,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2F_{\lambda,k}^2}{\partial p^2}=1+\lambda\omega p^{2(k-1)}[p^{2k}+(2k-1)q^{2k}]>0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2F_{\lambda,k}^2}{\partial p\partial q}=2\lambda(1-k)\omega(pq)^{2k-1},$$

其中 $\omega=(p^{2k}+q^{2k})^{\frac{1}{k}-2}$. 于是我们得到

$$\det\left(\frac{\partial^2F_{\lambda,k}^2}{\partial y^i\partial y^j}\right)>0. \tag{1.9}$$

故 $(\mathbb{R}^2,F_{\lambda,k})$ 是一个闵可夫斯基流形.

1.3.3 Randers 流形

定义 1.3.3 设 $\alpha:=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ 是微分流形 M 上的黎曼度量, $\beta:=b_i(x)y^i$ 是 M 上的 1 形式. 设

$$\|\beta\|_\alpha:=\sqrt{a^{ij}b_ib_j}<1,$$

其中 $(a^{ij})=(a_{ij})^{-1}$. 考虑 $F:=\alpha+\beta$, 此时 F 是 (正定的) 芬斯勒结构, 称 F 为 **Randers 结构**或 **Randers 度量**. 这种度量是由物理学家从广义相对论的观点引入的 [31].

例 1.3.4　下面的 Randers 度量是由 Klein 度量 (1.8) 形变而得的:

$$F=\frac{\sqrt{|y|^2-(|x|^2|y|^2-\langle x,y\rangle^2)}}{1-|x|^2}\pm\frac{\langle x,y\rangle}{1-|x|^2}, \tag{1.10}$$

这里 x 取自于单位球 $\mathbb{B}^n$ 内, 而

$$y\in T_x\mathbb{B}^n\cong T_x\mathbb{R}^n.$$

易证得

(i) $\beta:=\dfrac{\langle x,y\rangle}{1-|x|^2}$ 是一个恰当形式 (因而, β 是闭形式);

(ii) $\|\beta\|_\alpha<1$.

由 (1.10) 式确定的芬斯勒度量称为单位球上的 **Funk 度量**.

例 1.3.5　对 $\mathbb{R}^2$ 的黎曼度量

$$\alpha=\frac{(1-\varepsilon^2)\langle x,y\rangle^2+\varepsilon|y|^2(1+\varepsilon|x|^2)}{1+\varepsilon|x|^2}$$

和 1 次形式

$$\beta=\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\langle x,y\rangle}{1+\varepsilon|x|^2},$$

其中 $x\in\mathbb{R}^2, y\in T_x\mathbb{R}^2$, $\varepsilon\in(0,1)$, 则 $F:=\alpha+\beta$ 是 Randers 度量. 其一般情形我们将在例 4.4.4 中作详细讨论.

§1.4　基本不变量

1.4.1　基本张量

首先我们给出向量空间上齐性函数的性质以及它在芬斯勒结构上的应用.

引理 1.4.1 设 V 是一个向量空间, $H:V\to\mathbb{R}$ 具有 r 阶正齐性, 即对一切 $\lambda>0$, 我们有

$$H(\lambda y)=\lambda^r H(y), \tag{1.11}$$

则

$$y^i\frac{\partial H}{\partial y^i}=rH(y). \tag{1.12}$$

证明 设 $H:V\to\mathbb{R}$ 满足 (1.11) 式. 固定 y, 对 (1.11) 式关于 λ 求导便有

$$y^i\frac{\partial H}{\partial y^i}=r\lambda^{r-1}H(y),$$

令 $\lambda=1$ 我们得到 (1.12) 式. □

推论 1.4.2 设 (M,F) 是一个芬斯勒流形. 则其芬斯勒结构 F 满足

$$y^iF_{y^i}=F, \tag{1.13}$$

$$y^jF_{y^iy^j}=0, \tag{1.14}$$

$$y^kF_{y^iy^jy^k}=-F_{y^iy^j}. \tag{1.15}$$

证明 依次将 $F,F_{y^i},F_{y^iy^j}$ 作为上述 H, 并注意 $F,F_{y^i},F_{y^iy^j}$ 关于 y 分别是 1 阶、0 阶和 -1 阶齐性函数. □

对于芬斯勒流形 (M,F), 我们令

$$g:=g_{ij}(x,y)\,\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j,$$

其中

$$g_{ij}:=\frac{1}{2}(F^2)_{y^iy^j}=FF_{y^iy^j}+F_{y^i}F_{y^j}. \tag{1.16}$$

用引理 1.2.1 易证二阶对称共变张量 g 内蕴地定义在切丛 TM 上. 我们称 g 为 F 的**基本张量**.

引理 1.4.3 基本张量 g 的分量具有下列性质:

(i) $y^ig_{ij}=FF_{y^j}$; (1.17)

(ii) $y^i y^j g_{ij} = F^2$; (1.18)

(iii) $y^i \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = y^j \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = y^k \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = 0.$ (1.19)

证明　利用 (1.13), (1.14) 和 (1.15) 式易得性质 (i) 和 (ii). 将 g_{ij} 作为引理 1.4.1 中的 H, 并注意 g_{ij} 关于切向量是零阶正齐性函数, 我们便有性质 (iii). □

1.4.2　希尔伯特形式

设 M 是一个光滑流形, 对 $y \in T_xM$, 令 $[y] = \{\lambda y | \lambda \in \mathbb{R}^+\}$. 我们称

$$\{(x, [y]) | (x, y) \in TM \backslash \{0\}\}$$

为 M 的**射影球丛**, 记做 SM, 记其自然投影为 $p : SM \to M$. 即 $p(x, [y]) = x$. 此时在 x 处的**射影球** $S_xM := p^{-1}(x) \approx S^{n-1}$, 其中 "$\approx$" 表示同胚, $n = \dim M$ (见图 1.2).

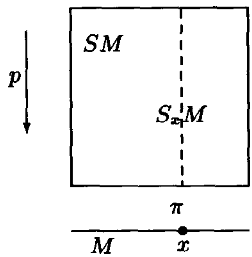

图　1.2

考虑芬斯勒空间 (M, F), 设 (x^i, y^i) 为其切丛 TM 上的局部坐标. 令 $\omega := F_{y^i} \mathrm{d}x^i$, 那么我们有

引理 1.4.4　ω 是射影球丛 SM 上整体定义的一次微分形式.

证明　如同引理 1.2.1, 我们取 TM 上另一个局部坐标系. 利用 (1.3) 式便知

$$F_{\tilde{y}^i} \mathrm{d}\tilde{x}^i = F_{y^i} \mathrm{d}x^i,$$

它表明 ω 是整体定义的. 进一步, 我们容易验证