普通高等教育“十一五”国家级规划教材《高等数学》附册

同济大学数学系 主编

高等数学
学习辅导与习题选解

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材《高等数学》附册

高等数学
学习辅导与习题选解

同济大学数学系　主编

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是与普通高等教育“十一五”国家级规划教材、新世纪高级应用型人才培养系列教材之一《高等数学》相配套的学习辅导书，该教材和本教辅书均由同济大学应用数学系编写，主要面向使用该教材的学生，也可作为《高等数学》相关教材的学习辅导参考书. 本书包括：内容要点、例题解析和习题选解等三部分内容.

书中例题、习题选解难易结合，不仅适合新世纪高级应用型本科生参考，也可供部分高职高专生学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导与习题选解/同济大学数学系主编. —上海：同济大学出版社，2007.4

(普通高等教育“十一五”国家级规划教材.《高等数学》附册)

ISBN 978-7-5608-3485-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. 同… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 026342 号

普通高等教育“十一五”国家级规划教材《高等数学》附册

高等数学学习辅导与习题选解

同济大学数学系 主编

责任编辑 卞玉清 责任校对 谢惠云 封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021—65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 24.5

印 数 1—6000

字 数 490000

版 次 2007 年 4 月第 1 版 2007 年 4 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-3485-6/O·296

定 价 30.00 元

前　　言

本书是与普通高等教育“十一五”国家级规划教材、同济大学应用数学系主编的新世纪高级应用人才培养系列教材之一——《高等数学》相配套的学习辅导书，主要面向使用该教材的学生，也可供使用该教材的教师作教学参考之用.

本书按教材《高等数学》的章节体系编排，以便与教学需求保持同步. 每一节中包括了以下三部分内容：

一、内容要点

简要归纳并逐点列出本节的主要内容，至于具体的概念、定理、公式以及解题的基本方法等，请学生自行查阅复习.

二、例题解析

按照本节的教学要求，在教材原有例题和习题的基础之上，适当增加一定数量的例题，作出解答以及说明. 新增的例题大致上顾及以下几个方面的考虑：

1. 帮助学生更好地理解和掌握本节中的基本概念，大多采取问答题的方式. 我们根据多年的教学经验，针对学生（尤其是初学者）时常问及或常易发生理解错误的一些共同性的、较有意义的问题，设问并作分析解答.

2. 为使学生更好地掌握本节中的基本解题方法，我们新增一些例题，配合教材上的例题，希望有充足数量的例题可供学生阅读和分析.

3. 我们选择了一些所谓较难的例题，也就是启发性或综合性较强一些的例题，但绝不超过教学的基本要求. 这些例题数量不多，并且我们提供详尽的分析解答过程，帮助学生提高综合运用知识的能力.

三、习题选解

在教材列出的习题中选出具有典型性的一小部分习题（约占习题总量的三分之一，其中(A)类习题少于三分之一，(B)类习题多于三分之一），作出解答，可供师生参考. 我们尤其希望学生先努力思考和认真解答习题，然后有需要的话，去参阅解答. 习题选解中的题号都是该题在教材习题中的编号.

本书由同济大学黄珏、蒋福民和刘庆生执笔编写，黄珏主审. 编写之前我们曾收到使用本教材《高等数学》的老师们很多有益的反馈意见和建议，编写中我们参考了本系编写的《高等数学附册——学习辅导与习题选解》及本系与武汉科技学院数理系合编的《微积分学习指导书》等书籍，在此我们一并致谢.

由于编者水平有限，成书时间较为仓促，书中定有不少缺点乃至错误之处，恳请同行与读者批评指正.

编　　者

2006 年 8 月

目　录

前言

第一章　函数、极限与连续 ………（1）

第一节　函数 …………………（1）

第二节　数列的极限 …………（7）

第三节　函数的极限…………（12）

第四节　极限的运算法则……（17）

第五节　极限存在准则与重要极限…………………（23）

第六节　无穷小的比较………（30）

第七节　函数的连续性………（35）

第八节　闭区间上连续函数的性质…………………（42）

第二章　导数与微分……………（47）

第一节　导数的概念…………（47）

第二节　求导法则……………（53）

第三节　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数相关变化率…………（58）

第四节　微分及其应用………（67）

第五节　导数在经济中的应用………………………（73）

第三章　微分中值定理与导数的应用…………………（77）

第一节　微分中值定理………（77）

第二节　导数的应用…………（83）

第三节　曲线的凹凸性与函数图形的描绘…………（89）

第四节　曲　率………………（92）

第五节　导数的其他应用……（95）

第四章　不定积分 ……………（100）

第一节　不定积分的概念与性质……………………（100）

第二节　换元积分法 ………（104）

第三节　分部积分法 ………（114）

第五章　定积分及其应用 ……（122）

第一节　定积分的概念与性质……………………（122）

第二节　微积分基本公式 …（126）

第三节　定积分的换元法与分部积分法 ……………（133）

*第四节　广义积分 …………（142）

第五节　定积分在几何问题中的应用举例 …………（146）

第六节　定积分在物理学与经济问题中的应用举例……………………（152）

第六章　常微分方程 …………（158）

第一节　微分方程的基本概念……………………（158）

第二节　可分离变量的微分方程与齐次方程 ………（162）

第三节　一阶线性微分方程……………………（169）

第四节　可降价的高阶微分方程……………………（175）

第五节　二阶线性微分方程……………………（183）

第六节　二阶常系数线性微分方程 ………………（186）

第七章　空间解析几何与向量代数 ………………………（199）

第一节　空间直角坐标系以及曲面、曲线的方程 …（199）

第二节　向量及其线性运算 ……………………（205）

第三节　向量的数量积与向量积 ……………………（208）

第四节　平面及其方程 ……（213）

第五节　空间直线及其方程 ……………………（217）

第六节　旋转曲面与二次曲面 ……………………（222）

第八章　多元函数的微分学及其应用 ……………（226）

第一节　多元函数的基本概念 ……………………（226）

第二节　偏导数 ……………（232）

第三节　全微分 ……………（239）

第四节　多元复合函数的求导法则 ………………（245）

第五节　隐函数的求导公式 ……………………（253）

第六节　多元函数微分学的几何应用 …………（261）

第七节　方向导数与梯度 …（268）

第八节　多元函数的极值问题 ……………………（273）

第九章　多元函数的积分学及其应用 ………………（284）

第一节　二重积分的概念与性质 ………………（284）

第二节　二重积分的计算法 ……………………（288）

第三节　二重积分的应用 …（297）

第四节　三重积分 …………（306）

第五节　曲线积分 …………（312）

第六节　格林公式及其应用 ……………………（321）

第七节　曲面积分 …………（333）

第八节　高斯公式与斯托克斯公式 ………………（341）

第十章　无穷级数 ……………（348）

第一节　常数项级数的概念与性质 ……………（348）

第二节　常数项级数的审敛法 ……………………（356）

第三节　幂级数 ……………（364）

第四节　函数展开成幂级数 ……………………（372）

第五节　傅里叶级数 ………（378）

第一章　函数、极限与连续

第一节　函数

一、内容要点

1. 集合的一般概念、表示法与三种基本运算.集合的并、交、余运算满足交换律、结合律、分配律及对偶律这样一些性质.

2. 区间、邻域与去心邻域是常用的几类实数集.

3. 函数的概念.本教材采用的函数定义可以称之为传统的函数定义.现在有些教材先引进映射的概念(它是函数概念的拓广,在一些方面发展了函数的概念),然后从映射出发定义函数.这样处理可使教材有些现代化的气息,更突出概念的本质是在“对应法则”上,避免既称“y 是 x 的函数”,又称“y 是与 x 的取值所对应的函数值”,容易混淆函数与函数值的缺陷.然而,我们已将“单值性”的限制加入函数的定义,于是传统的函数定义与从映射出发引进的函数定义实质上已无多大差异.况且,一方面传统的函数记号还是有其使用方便的优点,另方面我们采用传统的函数定义也使教材与中学数学教学更紧密地相衔接.

4. 有界性、单调性、奇偶性与周期性为研究函数时首先需要考察的几种简单的几何特性.

5. 反函数与复合函数的概念.反函数存在的一个充分条件是函数单调.两个函数可以复合的条件是内层函数的值域与外层函数的定义域之交集非空.

6. 初等函数的概念,双曲函数与反双曲函数,经济领域中常用的几个经济函数.

二、例题解析

例 1　设 A、B 是两个集合,证明:$A\subset B$ 的充分必要条件是 $A\cup B=B$.

证　必要性:要证若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B$.

设 $x\in A\cup B$,则或者 $x\in B$,或者 $x\in A$.由于 $A\subset B$,故当 $x\in A$ 时也有 $x\in B$.因此,$A\cup B\subset B$.反之,$B\subset A\cup B$ 是显然的.所以,$A\cup B=B$.

充分性:要证若 $A\cup B=B$,则 $A\subset B$.

设 $x\in A$,则 $x\in A\cup B$.由于 $A\cup B=B$,故有 $x\in B$,即得 $A\subset B$.

例 2　若 $f(x-1)=x^2-x$,则 $f(x)=$　　　　(　　)

(A) x^2+x (B) $x(x-1)$ (C) $(x-1)^2-(x-1)$ (D) $(x+1)(x-2)$

解 1 $f(x-1)=x^2-x=x(x-1)=[(x-1)+1](x-1)$

$$=(x-1)^2+(x-1),$$

将 $x-1$ 改为 x，得 $f(x)=x^2+x$，因此应选(A).

解 2 令 $u=x-1$，则得 $f(u)=(u+1)^2-(u+1)=u^2+u$，将 u 改为 x，得 $f(x)=x^2+x$，因此应选(A).

例 3 设 $f(x)$的定义域是$[0,3a]$，则 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域是 ( )

(A) $[-a,2a]$ (B) $[a,4a]$ (C) $[a,2a]$ (D) $[a,4a]$

解 解不等式 $0\leqslant x+a\leqslant 3a$，得 $-a\leqslant x\leqslant 2a$，即知 $f(x+a)$的定义域是$[-a,2a]$；解不等式 $0\leqslant x-a\leqslant 3a$，得 $a\leqslant x\leqslant 4a$，即知 $f(x-a)$的定义域是$[a,4a]$. 由于$[-a,2a]\cap[a,4a]=[a,2a]$，故 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域为$[a,2a]$，即应选(C).

例 4 不单调的函数是否一定不存在反函数?

解 答案是否定的，即不单调的函数也可能存在反函数. 例如函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x+1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

在区间$[-1,1]$上不单调(图 1-1(a))，但是它存在反函数(图 1-1(b))

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

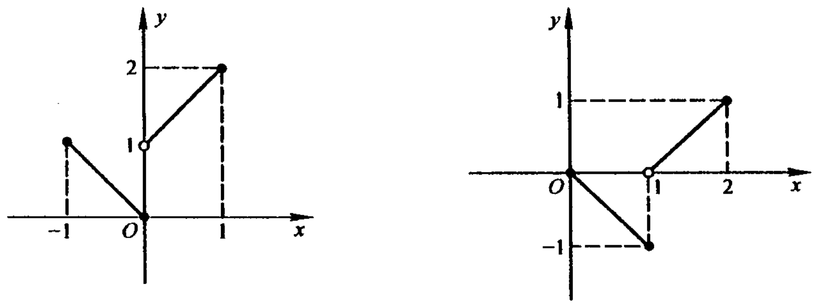

图 1-1

例 5 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[g(x)]=1-x$，且 $g(x)\geqslant 0$，求 $g(x)$的解析表达式及定义域.

解 由复合函数的定义及已知条件，得

$$f[g(x)]=1-x=\mathrm{e}^{g^2(x)}.$$

又由 $g(x)\geqslant 0$，从而可得

$$g(x)=\sqrt{\ln(1-x)}.$$

它的定义域通过解不等式 $\ln(1-x)\geqslant 0$，易得为 $D=\{x\mid x\leqslant 0\}$.

例 6 $f(x)$、$g(x)$ 都在 $\mathbf{R}$ 上定义，$f(x)$ 是单调增加函数，对任何 $x\in\mathbf{R}$，又有 $f(x)\leqslant g(x)$. 证明：$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]$ 对任何 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

证 对任何 $x\in\mathbf{R}$，由已知条件，有

$$f[f(x)]\leqslant f[g(x)].$$

在 $f(x)\leqslant g(x)$ 中以数值 $g(x)$ 代替 x，又有

$$f[g(x)]\leqslant g[g(x)].$$

综合以上两个不等式，即得 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]$ 对任何 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

例 7 证明：两个奇函数之积是偶函数；两个偶函数之积是偶函数；一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

证 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是定义在 D 上的奇函数. 记

$$F(x)=f(x)\cdot g(x),\quad x\in D.$$

对于每一个 $x\in D$，有

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=[-f(x)]\cdot[-g(x)]=f(x)\cdot g(x)=F(x),$$

所以 $F(x)$ 是定义在 D 上的偶函数，即两个奇函数之积是偶函数.

类似可以证明其他两个结论.

例 8 设函数 $f(x)$ 满足：(1) $f(0)=0$；(2) $x\neq 0$ 时，$af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，其中 a,b,c 为常数，且 $|a|\neq|b|$. 证明：$f(x)$ 是奇函数.

证 先求出 $f(x)$ 的解析表达式. 当 $x\neq 0$ 时，以 $\dfrac{1}{x}$ 代换条件(2)等式中的 x，得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx.$$

解联立方程组

$$\begin{cases} af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}, \\ af\left(\dfrac{1}{x}\right)+bf(x)=cx, \end{cases}$$

得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)\quad(x\neq 0),$$

故
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{ac}{x}-bcx\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

对于任何 $x\neq 0$,有

$$f(-x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{ac}{-x}-bc(-x)\right]=\frac{-1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)=-f(x),$$

又 $f(0)=0$,故 $f(x)$是奇函数.

例 9 设 $f(x)=\ln x$,而 $g(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x^2}, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f\circ g(x)$与 $g\circ f(x)$.

解
$$f\circ g(x)=f[g(x)]=\begin{cases}2\ln|x|, & 0<|x|\leqslant 1,\\ -2\ln|x|, & |x|>1.\end{cases}$$

$$g\circ f(x)=g[f(x)]=\begin{cases}\ln^2 x, & |\ln x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\ln^2 x}, & |\ln x|>1\end{cases}=\begin{cases}\ln^2 x, & \dfrac{1}{\mathrm{e}}\leqslant x\leqslant \mathrm{e},\\ \dfrac{1}{\ln^2 x}, & 0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}\text{或 }x>\mathrm{e}.\end{cases}$$

三、习题选解

(A)

3. 求下列函数的定义域:

(6) $y=\arccos\dfrac{x+1}{2}+\ln(1-3x)$;　　(7) $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$.

解 (6) 解不等式组
$$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1,\\ 1-3x>0,\end{cases}$$

得 $-3\leqslant x<\dfrac{1}{3}$,所以函数的定义域为 $\left[-3,\dfrac{1}{3}\right)$.

(7) $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$,所以函数的定义域为

$$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{x\,\middle|\,k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

7. 讨论下列函数的奇偶性:

(4) $y=\tan x+\cos 3x$;　　(6) $y=(1+x)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解 (4) 函数的定义域为$\left\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，关于原点对称. 但是，对于 $x=\frac{\pi}{4}$，有

$$y\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\tan\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=1-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y\Big|_{x=-\frac{\pi}{4}}=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-1-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

可见函数非奇非偶.

(6) 解不等式$\frac{1-x}{1+x}\geqslant 0$，得$-1<x\leqslant 1$，即知函数定义域为$(-1,1]$. 由于其并不关于原点对称，故函数不可能成为奇函数或偶函数，即函数非奇非偶.

9. 下列函数中，哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(6) $y=x-[x]$.

解 由$[x]$的定义，有$[x+1]=[x]+1$ 对任何 $x\in\mathbf{R}$ 成立，因此对任何 $x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x),$$

这说明 $f(x)=x-[x]$是周期函数，1 是它的一个周期.

又由$[x]$的定义，对任意固定的 $0<a<1$，对任何 $x\in\mathbf{R}$ 都有$[x+a]\neq[x]+a$，所以

$$f(x+a)=(x+a)-[x+a]\neq(x+a)-[x]-a=x-[x]=f(x),$$

这说明任意的 $0<a<1$ 都不是 $f(x)=x-[x]$的周期. 因此，1 是这个函数的最小正周期，即我们通常所说的周期函数的周期.

15. 已知 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，求 $f\circ f(x)$.

解 $$f\circ f(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x},$$

由 $1-x\neq 0$ 且 $1-\frac{x}{1-x}\neq 0$，得复合函数的定义域是$\left\{x \,\middle|\, x\in\mathbf{R}, x\neq 1 \text{ 且 } x\neq\frac{1}{2}\right\}$，

故 $$f\circ f(x)=\frac{x}{1-2x},\quad x\neq\frac{1}{2}\text{ 且 } x\neq 1.$$

注 我们不但要求得复合函数的简化后的解析表达式，而且还须求出复合函数的定义域.

(B)

2. (1) 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义. 证明:$f(x)+f(-x)$是偶函数;$f(x)-f(-x)$是奇函数;

(2) 证明:在$[-a,a]$$(a>0)$上有定义的任何一个函数都可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

证 (1) 记 $F(x)=f(x)+f(-x)$,则 $F(x)$的定义域亦为$(-\infty,+\infty)$,且对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$F(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(-x)+f(x)=F(x),$$

所以 $F(x)=f(x)+f(-x)$是偶函数.

另一结论可以类似证明.

(2) 设 $f(x)$是在$[-a,a]$上定义的函数. 令

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\quad \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

则类似于(1),可证 $\varphi(x)$、$\psi(x)$分别是定义在$[-a,a]$上的偶函数与奇函数. 又显然

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x),$$

故结论成立.

3. 求分式线性函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$$(ad-bc\neq0)$的反函数,并问:在什么条件下,反函数与直接函数相同?

解 设 $x_1\neq x_2$,且 x_1,x_2 都属于函数的定义域,即 $cx_1+d\neq0$,$cx_2+d\neq0$,则

$$y_1-y_2=\frac{ax_1+b}{cx_1+d}-\frac{ax_2+b}{cx_2+d}=\frac{(ad-bc)(x_1-x_2)}{(cx_1+d)(cx_2+d)}\neq0,$$

即 $y_1\neq y_2$. 这说明反函数存在(依反函数的定义).

视 x 为未知量,解 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$,得 $x=\dfrac{dy-b}{-cy+a}$,将 x 与 y 互换,即得反函数为

$$y=\frac{dx-b}{-cx+a}.$$

由于两函数相同首先须定义域相同,故当 $c\neq0$ 时,须有

$$-\frac{d}{c}=\frac{a}{c},$$

即须有 $a+d=0$. 在此条件下可以验证对任何 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{d}{c}\right)\cup\left(-\dfrac{d}{c},+\infty\right)$,有

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{dx-b}{-cx+a},$$

即对应法则亦相同. 因此,当 $c\neq0$ 时,若 $a+d=0$,则反函数与直接函数相同.

容易验证,当 $c=0$ 时,若 $b\neq0$,则反函数与直接函数相同的条件也是 $a+d=0$,而若 $b=0$,则反函数与直接函数相同的条件放宽为 $|a|=|d|$.

9. 把半径为 R 的一圆形铁皮剪去一个中心角为 α 的圆扇形,然后将剩余部分做成一个无底的圆锥形容器,将这个容器的体积 V 表示为 α 的函数.

解 当半径为 R 的圆形铁皮剪去中心角为 α(弧度)的圆扇形后,剩余部分也是圆扇形,其圆弧长为 $(2\pi-\alpha)R$. 由题意,若设圆锥形容器的底面半径为 r,高为 h,则有

$$(2\pi-\alpha)R=2\pi r,\quad h=\sqrt{R^2-r^2},$$

故有

$$r=\frac{(2\pi-\alpha)R}{2\pi},\quad h=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}.$$

于是有

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}.$$

显然,函数的定义域应为 $0<\alpha<2\pi$.

第二节　数列的极限

一、内容要点

1. 数列极限的概念.

2. 收敛数列的性质:极限的唯一性,收敛数列的有界性,收敛数列的保号性.

*3. 数列极限的严格定义.

二、例题解析

例 1 有人说,数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示随着 $n\to\infty$,x_n 越来越接近于 a. 这种说法对吗?

解 这种说法欠妥. 因为"x_n 越来越接近于 a"一般理解为数列 $\{x_n\}$ 中后一项比前一项更接近于 a,即在数轴上,点 x_n 与点 a 的距离单调地减少. 是否距离就无限接近于零呢? 从文字角度来看,没有这样的含义. 例如数列 $\{x_n\}$,其中 $x_n=1+\dfrac{1}{n}$,$n=1,2,\cdots$,我们说随着 $n\to\infty$,它的项 x_n 越来越接近于零也是没有什么问题的. 但是我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq0$. 在数列极限的定义中,只要求当 $n\to\infty$ 时,数列 $\{x_n\}$ 的项 x_n 无限接近于 a,并不要求数列 $\{x_n\}$ 的项 x_n 单调地,并且无限地接近于 a. 例如数列 $\{x_n\}$,其中 $x_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}$,$n=1,2,\cdots$,它的项随 $n\to\infty$ 而无

限接近于零，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，但是它的项并非单调地无限接近于零. 关于数列$\{x_n\}$的极限为$a$妥当的说法应该是“只要$n$充分大，$x_n$与$a$就可以接近到预先任意指定的程度”.

*例2 数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的严格定义中，$N$是不是$\varepsilon$的函数?

解 N与ε有关，但是不能说N是ε的函数. 因为对任意给定的正数ε，如果存在一个满足定义要求的正整数N_0，那么任何一个大于N_0的正整数都可以作为定义所要求的N. 这就是说N的值并不是由ε的值所唯一确定，因此由函数的定义，N不是ε的函数.

例3 有人说，如果从某一项起数列$\{x_n\}$的项都是正的，并且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，那么$a>0$. 这种说法对不对?

解 这种说法是不对的. 例如$x_n=\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$，数列$\{x_n\}$的各项都是正的，但是我们已经知道$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 正确的说法是“$a\geqslant 0$”.

例4 给出数列$\{x_n\}$的一般项如下，考察这些数列的敛散性. 若收敛，指出其极限.

(1) $x_n=\dfrac{n^2}{2n^2+1}$；　　(2) $x_n=\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}$；

(3) $x_n=\left[1+\dfrac{(-1)^n}{2}\right]^n$；　　(4) $x_n=(-1)^n+\left[\dfrac{1+2\cdot(-1)^n}{4}\right]^n$.

解 (1) 因为$x_n=\dfrac{n^2}{2n^2+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(2n^2+1)}$，当$n\to\infty$时，$\dfrac{1}{2(2n^2+1)}$无限接近于零，所以$x_n$就无限接近于$\dfrac{1}{2}$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}.$$

(2) 因为$x_n=\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}=\dfrac{(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}$，当$n\to\infty$时，$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}$无限接近于零，所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

(3) $\{x_n\}$中的偶数项为$x_{2k}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2k}=\left(\dfrac{9}{4}\right)^k$. $n\to\infty$时，$k\to\infty$，此时数列$\{x_n\}$中的这部分项x_{2k}的值无限地增大，不会接近于任何一个确定的常数，所以数列$\{x_n\}$的项x_n不可能无限接近于任何一个确定的常数，即知

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ 不存在.}$$

(4) $\{x_n\}$中的偶数项为 $x_{2k}=1+\left(\frac{3}{4}\right)^{2k}=1+\left(\frac{9}{16}\right)^k$. $n\to\infty$时,$k\to\infty$,此时 $\left(\frac{9}{16}\right)^k\to 0$,从而 $x_{2k}\to 1$;数列$\{x_n\}$中的奇数项为 $x_{2k-1}=-1+\left(-\frac{1}{4}\right)^{2k-1}=-1-4\times\left(\frac{1}{16}\right)^k$. $n\to\infty$时,$k\to\infty$,此时$\left(\frac{1}{16}\right)^k\to 0$,从而 $x_{2k-1}\to -1$. 数列$\{x_n\}$中的这两部分项当$n\to\infty$时有不同的变化趋势,一部分项无限接近于 1,另一部分项无限接近于-1,从而它的项不可能无限接近于任何一个确定的常数,于是

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ 不存在.}$$

这个例题告诉我们:① 为了容易看出 $n\to\infty$时数列的变化趋势,可以先对数列一般项的表达式加以适当的恒等变形. 如本例中的第(1),(2)两个小题;② 如果我们发现数列中的一部分项当 $n\to\infty$时不可能无限接近于任何一个确定的常数,那么这个数列就一定不存在极限. 数列中的这一部分无穷多项依它们在原数列中的顺序组成一个新的数列,称为原数列的一个子数列,简称子列. 以上所述利用子列这个概念便可以叙述为:若数列中有一个子列发散,则这个数列必发散. 本例中的第(3)小题便是这种情况;③ 如果我们发现数列中的两个不同的部分项当 $n\to\infty$时分别无限接近于两个不同的常数,那么这个数列也一定不存在极限,即数列有两个不同的子列收敛于不同的极限,则这个数列必发散. 本例中的第(4)小题,教材中例 1 的第(3)小题便是这种情况.

以上所述的都是观察数列的变化趋势以判断其敛散性的有效方法.

* **例 5** 试用数列极限的严格定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+3}=\frac{3}{2}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{2n^2+3}=0$.

证 (1) $|x_n-a|=\left|\frac{3n+2}{2n+3}-\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2(2n+3)}$,为了使$|x_n-a|$小于任意给定的正数 ε,只要$\frac{5}{2(2n+3)}<\varepsilon$,解得 $n>\frac{1}{4}\left(\frac{5}{\varepsilon}-6\right)$,所以,$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{4}\left(\frac{5}{\varepsilon}-6\right)\right]$,则当 $n>N$ 时,就有$\left|\frac{3n+2}{2n+3}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+3}=\frac{3}{2}$.

(2) $|x_n-a|=\left|\frac{\sin n}{2n^2+3}-0\right|=\frac{|\sin n|}{2n^2+3}\leqslant\frac{1}{2n^2+3}<\frac{1}{2n^2}<\frac{1}{n}$,于是,对于任意给定的正数 ε,要使$\left|\frac{\sin n}{2n^2+3}-0\right|<\varepsilon$,只要 n 满足条件:$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$就可以了. 所以,$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有$\left|\frac{\sin n}{2n^2+3}-0\right|<\varepsilon$. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{2n^2+3}=0$.

第(2)小题的证明中没有直接去解不等式:$\left|\frac{\sin n}{2n^2+3}\right|<\varepsilon$,而是先将$\left|\frac{\sin n}{2n^2+3}\right|$逐步放大

为$\frac{1}{n}$,然后几乎是不用解不等式,就得到了N,找N的过程就大大简化了.这是根据数列极限的严格定义,或者说是由例2中的说明而得到的一种技巧.(事实上,不等式$\left|\frac{\sin n}{2n^2+3}\right|<\varepsilon$是难以直接求解的.)

三、习题选解

(A)

1. 给出数列的一般项如下,观察每一个数列的变化趋势,判断哪些数列收敛,哪些数列发散;如果数列收敛,指出其极限.

(7) $x_n=\sin\frac{n\pi}{3}$;　　(10) $x_n=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

解 (7) $\{x_n\}$是

$$\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cdots,$$

由此可见当$n\to\infty$时,x_n不可能无限地接近于任何一个确定的常数,所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n \text{ 不存在.}$$

本题也可以这样解:$\{x_n\}$中的项$x_{3k}(k=1,2,\cdots)$为　$x_{3k}=\sin k\pi=0$,所以这部分项当$n\to\infty$(这时$k\to\infty$)时无限接近于0;$\{x_n\}$中的项$x_{6k-5}(k=1,2,\cdots)$为$x_{6k-5}=\sin\left(2k\pi-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以这部分项当$n\to\infty$(这时$k\to\infty$)时又无限接近于$\frac{\sqrt{3}}{2}$.由此可见x_n当$n\to\infty$时不可能无限接近于任何一个确定的常数,所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n \text{ 不存在.}$$

(10) 由于

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\cdots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\\&=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\end{aligned}$$

$=\sqrt{n+1}-1$,

所以当 $n\to\infty$ 时, x_n 无限地增大,不可能无限接近于任何一个确定的常数,故

$$\lim_{n\to\infty}x_n \text{ 不存在}.$$

2. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,是否必有$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$? 反之,如果$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$,是否必有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$?

解 第一个问题的答案是肯定的. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,所以当 $n\to\infty$ 时, x_n 无限接近于确定的常数 a,于是$|x_n|$无限接近于$|a|$,因此有

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|.$$

第二个问题的答案是否定的. 例如数列$\{x_n\}$,其中 $x_n=(-1)^n$,已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在,但是$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$.

3. 如果数列$\{x_n\}$有界,而$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 试问是否必有$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$? 说明你的理由.

解 答案是肯定的. 设$|x_n|\leqslant M$, M 是一个正的常数. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,故当 $n\to\infty$ 时, y_n 无限接近于零,即知 My_n 也无限接近于零,亦即 $M|y_n|$无限接近于零. 由于

$$0\leqslant|x_ny_n-0|\leqslant M|y_n|,$$

故$|x_ny_n-0|$也无限接近于零,即知 x_ny_n 无限接近于零. 这说明

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0.$$

4. 如果$|x_n|\leqslant y_n(n\in\mathbf{N}^+)$,而$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,是否必有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$? 说明你的理由.

解 答案是肯定的. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,故当 $n\to\infty$ 时, y_n 无限接近于零. 由于

$$|x_n-0|=|x_n|\leqslant y_n=|y_n-0|,$$

故 x_n 也无限接近于零. 这说明

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

(B)

2. 设数列$\{x_n\}$是正数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}$. 试证明:数列$\{x_n\}$从某一项起一定单调减少(即从该项起有 $x_{n+1}<x_n$).

证 1 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}$,所以当 $n\to\infty$ 时,数列$\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$的项无限地接近于