大学数学学习方法指导丛书

大学数学学习指导

Daxue Shuxue Xuexi Zhidao

石澄贤 沈京一 • 主编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学学习指导/石澄贤,沈京一主编. 一苏州:
苏州大学出版社,2004. 8
ISBN 7-81090-357-8

Ⅰ. 大… Ⅱ. ①石…②沈… Ⅲ. 高等数学 - 高等
学校 - 教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 085800 号

大学数学学习指导
石澄贤 沈京一 主编
责任编辑 周建兰

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市干将东路 200 号 邮编:215021)
宜兴文化印刷厂印装
(地址:宜兴市南漕镇 邮编:214217)

开本 720mm×940mm 1/16 印张 17.75 字数 298 千
2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 7-81090-357-8/O·20 定价:23.00 元

前　言

高等数学是高等工科院校的一门重要基础理论课.我们深感编写一本配合教材,能对学生所学概念、方法进一步深化,能解决学生学习过程中碰到的疑问和困难的指导书是非常必要的.为此,2000年我们编写了《高等数学学习指导》,该书在使用过程中受到师生的好评.这次编写的《大学数学学习指导》在保持原有突出方法指导、解决疑难特点的基础上,对典型例题、复习题进行了重新编写,更加注重了基本理论和方法,更能满足一般工科院校学生学习高等数学的需要.

本书的特点是注重基础,例题丰富,由浅入深,难度适中.适用于一般工科院校不同专业、不同水平学生的要求.

本书主要结合高等数学的具体内容和典型例题进行分析,引导学生把掌握数学内容和方法结合起来,对疑难问题、解题思路、方法和技巧进行指导,每一章的内容按"目的与要求"、"内容提要"、"错解辨析"、"典型例题"和"复习题及答案"五部分编写.

参加本书编写的人员有:石澄贤、沈京一、吴建成、黄清龙、许定亮、徐明华、赵志新、汪明瑾、阮宏顺、吴春青.

本书得到江苏工业学院教务处和常州工学院教务处的大力支持,在此一并表示感谢!

限于我们的水平和经验,对本书存在的不足和缺点,殷切希望广大师生批评指正.

编　者

2004.7

目录

第一章 函数与极限

第二章 导数与微分

第三章 中值定理与导数的应用

第四章 不定积分

第五章 定积分

第六章 定积分应用

第七章 空间解析几何与向量代数

第八章　多元函数微分学

第九章　重积分

第十章 曲线积分与曲面积分

第十一章 无穷级数

第十二章 常微分方程

第一章

函数与极限

第一节　目的与要求

1. 理解函数的概念.

2. 了解函数奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数的概念,了解反函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 根据实际问题会建立简单的函数关系式.

6. 理解极限的概念(对极限 ε-N,ε-δ 的定义,可在学习过程中逐步加深理解,对于给出 ε,求 N 或 δ 不作过高要求).

7. 掌握极限四则运算法则.

8. 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则),会用两个重要极限求极限.

9. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小求极限.

10. 理解函数在一点连续的概念.

11. 了解间断点的概念,并会判别间断点的类型.

12. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(介值定理、最大值和最小值定理).

第二节　内容提要

一、主要定义

1. 设 x 和 y 是两个变量,$\forall x\in D\subset\mathbf{R}$,变量 $y\in\mathbf{R}$,按照一定法则 f 总有确定的数值与其对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$. 称 D 为 $f(x)$的定义域,

x 叫做自变量，y 叫做因变量. 数集 $W=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

2. 函数的几种特性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.

(1) 若 $\forall x\in D$，$f(x)=f(-x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 若 $\forall x\in D$，$f(x)=-f(-x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 若存在 $T\neq 0$，$\forall x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为其周期，使等式成立的最小正值 T 称为最小正周期.

(4) 设区间 $I\subset D$. 若 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$[$f(x_1)>f(x_2)$]，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(减小)的.

(5) 设数集 $Z\subset D$. 若存在 $M>0$，使 $\forall x\in Z$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 Z 上有界，否则称 $f(x)$ 在 Z 上无界.

3. 设 $\delta>0$，点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)\xlongequal{\text{def}}\{x||x-a|<\delta\}$. 点 a 的去心邻域 $U(\hat{a},\delta)\xlongequal{\text{def}}\{x|0<|x-a|<\delta\}$.

4. 设 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，$u=\varphi(x)$ 的定义域或定义域的非空子集为 D_2，值域为 W_2，且 $W_2\subset D_1$，那么 $\forall x\in D_2$，有确定的值 y，通过 $u=\varphi(x)$ 按照规则 $y=f(u)$ 与其对应，则称此函数为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

5. 基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数.

6. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的且可用一个式子表示的函数统称为初等函数.

7. $\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限(数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a)，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

当数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在时，称 $\{x_n\}$ 发散.

8. $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$(当 $x\to x_0$).

在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，将 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，或 $f(x_0-)=A$. 类似地，在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0<x<x_0+\delta$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+)=A$.

9. $\forall \varepsilon>0, \exists X>0$,使得当$|x|>X$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称$A$为$f(x)$当$x\to\infty$时的极限,记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A$(当$x\to\infty$).

在此定义中,将$|x|>X$改成$x<-X$,则称A为$f(x)$当$x\to-\infty$时的极限,记为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

类似地,将$|x|>X$改成$x>X$,则称A为$f(x)$当$x\to+\infty$时的极限,记为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

10. 无穷大与无穷小.

(1) $\forall M>0, \exists \delta>0$(或$X>0$),使得当$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)时,恒有$|f(x)|>M$,则称$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时为无穷大,记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$).

(2) $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$(或$X>0$),使得当$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)时,恒有$|f(x)|<\varepsilon$,则称$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时为无穷小,记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$).零可作为无穷小的惟一常数(函数).

注: 在下面的讨论中,当定理对$x\to x_0$及$x\to\infty$都成立时,则省略"lim"下面自变量的变化过程,简记为lim.

11. 无穷小的比较:以下$\alpha(x)$及$\beta(x)$都是在同一个自变量变化过程中的无穷小,$\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$也是在这个变化过程中的极限.

当$\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$时,若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小,记为$\alpha(x)=o(\beta(x))$;若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小;若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq0)$,则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小;若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小,记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

12. 设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义,若$y=f(x)$在x_0处有

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称$f(x)$在x_0处连续.

13. 设$f(x)$在x_0的某邻域内有定义(x_0可除外),若$f(x)$满足下列条件之一,则称$f(x)$在点x_0处不连续,x_0称为不连续点或间断点.

(1) $f(x)$在$x=x_0$处无定义.

(2) 虽在 $x=x_0$ 处有定义,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(3) 虽在 $x=x_0$ 处有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

具有左、右极限的间断点称为第一类间断点,否则称为第二类间断点,极限存在的间断点称为可去间断点.

二、主要定理与公式

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则数列 $\{x_n\}$ 有界.

2. 极限存在则必惟一.

3. 若 $\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则有

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,$$
$$\lim[f(x)g(x)]=AB,$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

4. 极限存在判别准则.

(1) 单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼准则:若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$(此夹逼准则对函数极限也成立).

5. 在同一变化过程中的有界变量与无穷小的乘积是无穷小;有限个无穷小的和是无穷小.

6. 等价无穷小具有传递性:设 α,β,γ 为同一过程的无穷小,若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$,则 $\alpha\sim\gamma$.

7. 求极限过程中可用等价无穷小替换.例如,在同一过程中,若 $\alpha\sim\bar{\alpha},\beta\sim\bar{\beta}$,且 $\lim\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ 存在,则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$.

8. $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$. 这里 $\lim\alpha(x)=0$.

9. 两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

10. 若在 $U(\hat{x}_0,\delta)$ 内 $f(x)\geqslant 0[f(x)\leqslant 0]$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $A\geqslant 0(A\leqslant 0)$.

11. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0(A<0)$,则必存在 $U(\hat{x}_0,\delta)$,使在此邻域内 $f(x)>0[f(x)<0]$.

12. 初等函数在其定义区间上连续.

13. 闭区间上的连续函数有下列性质:

(1) 函数有最大值与最小值.

(2) 函数有界.

(3) 函数满足介值定理: 任取介于最大值与最小值之间的数,必有与之相等的函数值. 特别地,函数满足零点定理: 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则必有 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

三、结论补充

1. 当 $x\to 0$ 时, $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

注: x 可用无穷小代替. 如 $\lim\varphi(x)=0$,则 $\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)(\varphi(x)\to 0)$.

2. 不为零的无穷小的倒数为无穷大,无穷大的倒数为无穷小.

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n>m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

4. $f(x)$在 x_0 处连续$\Leftrightarrow f(x_0)$, $f(x_0-)$, $f(x_0+)$存在且相等.

5. 若 $f(x)$在 x_0 处连续,则$|f(x)|$在 x_0 处也连续;反之不成立.

6. 关于极限存在的命题.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0+)=f(x_0-)=A$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

(3) 若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$;反之不然.

注: 利用此命题在第三章中可将数列极限转化为函数极限,用罗必塔法则求解.

7. 若存在数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$(其中 $x_n,y_n\in D$, $n=1,2,\cdots$), $x_n\to x_0$, $y_n\to x_0$,使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在,亦不可能是无穷大量.

第三节 错解辨析

例 1 因为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调增加，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，所以 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

分析：两个单调增加的函数的积不一定为单调增加的，如 $f(x)=-\dfrac{1}{x}$，$g(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上它们的积不是单调增加的.

例 2 当 $n\to\infty$ 时，由 $|x_n|\to 0$，可推出 $x_n\to 0$，所以由 $|x_n|\to A$ 可推出 $x_n\to A$.

分析：$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$ 是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 成立的充分必要条件，但 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=A$ 不是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 成立的充分必要条件. 例如，如 $x_n=(-1)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

例 3 因为极限存在必有界，所以若 $\lim f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必为有界的.

分析：极限存在必有界是对数列而言的，对于函数而言此结论不成立，如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，但 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界.

例 4 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1.$

分析：错误地利用了公式 $\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$. 只有当 $\varphi(x)\to 0$ 时才有 $\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}\to 1$.

正确解法如下：

因为 x 为无穷小，$\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界量，所以 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

例 5 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\ \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0.$

分析：第一个等号不成立. 等式 $\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\lim g(x)$ 只有当两个函数极限都存在时才能成立，否则不成立. 第二个等号后的运算无意义，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 是无意义的量，正确的解法见例 4.

例 6 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{ax}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}ax}=1^{\infty}=1.$