高等学校基础数学教学参考丛书·学习指导系列

概率统计学习指导

（第二版）

周概容　王健·编著

南開大學出版社

学参考丛书·学习指导系列

概率统计学习指导

（第二版）

周概容　王　健　编著

南开大学出版社
天　津

图书在版编目(CIP)数据

概率统计学习指导 /.周概容等编著.—2 版.—天津：南开大学出版社，2006.11

ISBN 7-310-00993-2

Ⅰ.概...　Ⅱ.周...　Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料

Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 078925 号

南开大学出版社出版发行

出版人：肖占鹏

地址：天津市南开区卫津路 94 号　　邮政编码：300071

营销部电话：(022)23508339　23500755

营销部传真：(022)23508542　　邮购部电话：(022)23502200

*

南开大学印刷厂印刷

全国各地新华书店经销

*

2006 年 11 月第 2 版　　2006 年 11 月第 6 次印刷

880×1230 毫米　32 开本　13.75 印张　392 千字

定价：26.00 元

如遇图书印装质量问题，请与本社营销部联系调换，电话：(022)23507125

内 容 提 要

这一套“高等学校基础数学教学参考丛书·学习指导系列”共三个分册：《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》和《概率统计学习指导》，面向高等学校经济和管理类各专业，以及理工类有关专业。这套书自1997年出版以来已经多次重印，这是这套书的第二版，是在第一版的基础上根据近年来使用的教材修订和充实的。

本册书是参照经济和管理类各专业，以及理工类非数学各专业通用的“概率论与数理统计”教材编写的。每一章由四部分构成：一、内容提要，二、典型例题分析，三、自我检测题，四、自检题答案或提示。全书针对性强，是学习“概率论与数理统计”的难得的参考书。

这一套“学习指导”的读者对象是高等学校师生，主要是经济和管理门类各专业，以及理工科（非数学）有关专业的师生；对于准备报考硕士研究生和MBA者也是一套很好的参考书。亦可供数学专业师生，以及应用概率统计的管理人员和工程技术人员参考使用。

出版说明

这一套“学习指导”，是按照高等学校经济和管理类各专业，以及理工科有关专业通用的教材编写的，是上述各专业必修的数学基础课程的教学参考书，包括《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》和《概率统计学习指导》等三个分册。这套书自1997年出版以来，已经重印了多次。考虑到近年来上述各专业的教材都有所变化或更新，特别是教材中例题和习题的题型也有所变化，出现了许多新颖的题型；而且数学（包括“微积分”、“线性代数”和“概率统计”）是“全国硕士研究生入学统一考试”的必考科目，并且在全部必考4科的总分500分中数学占150分，所以我们决定修订这一套“学习指导”。

修订版保持了原书的结构和格式，只是使每一章前面的“内容提要”更贴近现行的有关教材和“全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》”的要求。“典型例题分析”更新了大部分例题，特别注意吸纳了历年“研究生入学统一考试”试题中比较新颖且有代表性的试题，通过例题向读者演示各种解题方法和技巧，并且使读者能更深入地领会有关理论知识。

编　者

2006年3月

目 录

第一章　随机事件和概率

这一章是概率论和数理统计的基础知识：(1) 事件及其关系和运算；(2) 事件的概率；(3) 事件的独立性和独立试验.

一　内容提要

（一）事件及其关系和运算

直观上，随机现象的每一种表现或状态、随机试验的每一种结果视为“事件”. 数学上，事件是基本事件空间的子集. 事件之间可以引进与集合类似的关系和运算.

1. **随机试验和事件**　我们把对随机现象的观测称做随机试验，简称为试验；随机抽样也视为一种随机试验. 试验的最基本结局称做**基本事件**；一切基本事件的集合称做**基本事件空间**或**样本空间**. 可以把基本事件空间 $\Omega=\{\omega\}$ 看成一个点集，把基本事件 ω 看成 $\Omega=\{\omega\}$ 中的一个点. 试验的每一种可能的结果称做**事件**；每次试验中都肯定出现的事件称做**必然事件**，记为 Ω；任何一次试验中都不会出现的事件称做**不可能事件**，记为 $\varnothing$；每次试验中既可能出现也可能不出现的事件称做**随机事件**，简称为事件. 习惯上，用前面几个大写拉丁字母 $A,B,\cdots$ 表示事件. 有时用 {……} 表示事件：大括号内用文字或式子表示事件的内容. 可以把事件 A 视为 Ω 的子集，即 $A\subset\Omega$；$\omega\in A$ 表示事件 A 出现了；$\omega\notin A$ 表示事件 A 未出现.

2. **事件的关系和运算** **关系**：包含、相等、不相容、对立；**运算**：和（并）、差、交.

(1) **包含** $A \subset B$ 表示“每当 A 出现 B 也一定出现”，读做“事件 B 包含事件 A”、“A 是 B 的特款”或“A 导致 B”.

(2) **相等** $A = B$ 表示“$A \subset B$ 且 $B \supset A$”，读做“事件 A 等于事件 B”.

(3) **和** $A \bigcup B$ 或 $A + B$ 表示“事件 A 与 B 至少出现一个”，称做“事件 A 与 B 的**和或并**”；特别，

$$\bigcup_i A_i \quad 或 \quad \sum_i A_i$$

表示事件“$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 至少出现一个”.

(4) **差** $A \setminus B$ 或 $A - B$ 表示“事件 A 出现但是事件 B 不出现”，称做“A 与 B 的**差**”，或“A 减 B”.

(5) **交** $A \bigcap B$ 或 AB 表示“事件 A 与 B 同时出现”，称做“A 与 B 的**交**”；特别，

$$\bigcap_i A_i \quad 或 \quad A_1 A_2 \cdots A_n \cdots$$

表示“事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时出现”.

(6) **不相容** 若 $AB = \varnothing$，则称“事件 A 与 B 不相容”；若 $AB \neq \varnothing$，则称“事件 A 和 B 相容”；

(7) **对立事件** 称事件 A 和 $\overline{A}$ 互为对立事件，若 $A + \overline{A} = \Omega$，$A\overline{A} = \varnothing$，即 $\overline{A} = \{A 不出现\}$.

(8) **完全事件组** 称事件 $H_1, H_2, \cdots, H_n, \cdots$ 构成完全事件组，若

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_n + \cdots = \Omega, \ H_i H_j = \varnothing \ (i \neq j).$$

换句话说，如果有限个或可数个事件 $H_1, H_2, \cdots, H_n, \cdots$ 两两不相容，并且“所有事件的和”是必然事件，则称它们构成完全（备）事件组.

3. **事件运算的基本性质** 对于任意事件 A,B,C，$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

(1) **交换律** $A+B=B+A$；$AB=BA$.

(2) **结合律** $A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C$，

$$ABC=A(BC)=(AB)C.$$

(3) **分配律** $A(B+C)=AB+AC$； $(A+C)(B+C)=AB+C$；

$$A(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=AA_1+AA_2+\cdots+AA_n+\cdots.$$

(4) **对偶律** $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$； $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$；

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n\cdots;$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n\cdots}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\cdots+\overline{A}_n+\cdots.$$

（二）事件的概率

概率——事件在试验中出现可能性大小的数值度量，是与长度、面积、体积、质量……类似的度量. 通常用 $\mathbf{P}(A)$ 表示事件 A 的概率. 假如用$\{\cdots\cdots\}$表示事件，则以 $\mathbf{P}\{\cdots\cdots\}$ 表示其概率，其中大括号内用文字或式子表示事件的内容. 大致有以下几种确定事件的概率的途径：(1) 直接计算：古典概型和几何概型；(2) 用频率估计概率；(3) 概率的推算：利用概率的性质和公式，由较简单事件的概率推算较复杂事件的概率.

1. **概率的直接计算**

(1) **古典型概率** 假设试验的基本事件空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N\}$ 含有 N 个等可能基本事件，事件 A 含有 M 个基本事件：$A=\{\omega_{j_1},\omega_{j_2},\cdots,\omega_{j_M}\}$，则

$$\mathbf{P}(A)=\frac{A\text{所含基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}=\frac{M}{N}. \tag{1.1}$$

【自有限总体的随机抽样】 计算古典型概率，需要计算基本事件的总数和事件所包含基本事件的个数. 自有限总体的随机抽样的模型常有助于完成运算. 考虑自含 N 个元素的总体 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N\}$ 的抽样，假设每个元素被抽到的可能性都相同. 抽样区分“还原与非还原”、“有序与无序”，各种情形的组合产生表 1.1 所列的四种不同的抽样方式.

表 1.1　四种抽样方式下不同抽法的总数

	抽样方式		不同抽法的总数
自含 N 个元素总体 Ω 的 n 次简单随机抽样	还　原	有　　序	N^n
		无　　序	C_{N+n-1}^n
	非还原	有　　序	$P_N^n=N(N-1)\cdots(N-n+1)$
		无　　序	$C_N^n=P_N^n/n!$

【随机分配】 将 n 个质点随机地分配到 N 个盒中，区分每盒最多可以容纳一个和可以容纳任意多个质点，以及质点可辨别和不可辨别等四种情形，对应四种分配方式. 各种分配方式下不同分法的总数列入表 1.2.

表 1.2　四种分配方式下不同分法的总数

	分配方式		不同分法的总数
将 n 个质点随机地分配到 N 个盒中	每盒可容纳任意个质点	质点可辨	N^n
		质点不可辨	C_{N+n-1}^n
	每盒最多容纳一个质点	质点可辨	$P_N^n=N(N-1)\cdots(N-n+1)$
		质点不可辨	$C_N^n=P_N^n/n!$

自有限总体 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N\}$ 的 n 次简单随机抽样，相当于将 n 个质点随机地分配到 N 个盒中：每一个质点在 N 个盒中“任意选择一个盒子”；“还原”相当于“每盒可以容纳任意多个质点”，“非还原”

相当于“每盒最多可以容纳一个质点”;“有序”相当于“质点可辨别”,“无序”相当于“质点不可辨别”(见例 1.16 解法 3).

(2) **几何型概率** 假设 Ω 是一线段或平面或空间的有界区域,$L(\Omega)$ 表示其几何度量. 考虑随机试验:向 Ω 上投掷一质点,假设:1) 质点落到 Ω 中的任何点都是可能的,但不可能落到 Ω 之外;2) 质点的落点在 Ω 中分布均匀:质点落入 Ω 中的任何区域 A 的可能性只与其几何度量 $L(A)$ 有关,并与之成正比. 简称这样的随机试验为“**向区域 Ω 上均匀地掷随机点**”. 对于 Ω 中的任何区域 $A \subset \Omega$,考虑事件 A={质点落入区域 A},则

$$\mathbf{P}(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}. \tag{1.2}$$

2. **用频率估计概率** 事件 A 在 n 次重复试验中出现的次数 $\nu_n=\nu_n(A)$,称做 A 在这 n 次试验中出现的频数;而

$$f_n=f_n(A)=\frac{\nu_n(A)}{n}$$

称做 A 在这 n 次试验中出现的**频率**. 当试验次数 n 充分大时可以用事件的频率估计它的概率.

3. **概率的公理** 经实践证实而无需逻辑证明的概率的基本性质,定为公理:

公理 1 非负性 任何事件 A 的概率都是非负的:$\mathbf{P}(A)\geqslant 0$;

公理 2 规范性 必然事件的概率等于 1:$\mathbf{P}(\Omega)=1$;

公理 3 完全可加性 对于任意可数个两两不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ $(A_iA_j=\varnothing,\ i\neq j)$,它们之和的概率等于各个事件的概率之和,即

$$\mathbf{P}(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\cdots+\mathbf{P}(A_n)+\cdots.$$

4. **概率的基本公式和运算法则** 由概率的公理可以证明下列公式和法则.

(1) **不可能事件** 不可能事件的概率 $\mathbf{P}(\varnothing)=0$.

(2) **对立事件** 对立事件的概率 $\mathbf{P}(\overline{A})=1-\mathbf{P}(A)$.

(3) **减法公式** 对于任意二事件 A 和 B，有

$$\mathbf{P}(A-B)=\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(AB). \tag{1.3}$$

特别，若 $B\subset A$,则

$$\mathbf{P}(A-B)=\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(B). \tag{1.4}$$

(4) **加法公式** 对于任意事件 A,B，有

$$\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB); \tag{1.5}$$

(5) **一般加法公式** 对于可数个任意事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1+A_2+A_3)&=\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\mathbf{P}(A_3)\\&\quad-\left[\mathbf{P}(A_1A_2)+\mathbf{P}(A_1A_3)+\mathbf{P}(A_2A_3)\right]+\mathbf{P}(A_1A_2A_3).\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)&=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)-\sum_{i<j}\mathbf{P}(A_iA_j)\\&\quad+\sum_{i<j<k}\mathbf{P}(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n+1}\mathbf{P}(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned} \tag{1.7}$$

(6) **概率的半可加性** 设 $A_1,A_2,\cdots$ 是任意有限或可数个事件，则

$$\mathbf{P}(A_1+A_2+\cdots)\leqslant\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\cdots. \tag{1.8}$$

5. 条件概率和概率的三个基本公式

【条件概率定义】 设 A 和 B 是任意二事件，其中 $\mathbf{P}(A)>0$，则称

$$\mathbf{P}(B\mid A)=\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \tag{1.9}$$

为“事件 B 在事件 A 出现的条件下的**条件概率**”，简称“事件 B 关于事件 A 的条件概率”. 对于给定的事件 A，条件概率 $\mathbf{P}(B\mid A)$ 具有（无条件）概率的一切性质.

(1) **乘法公式** 对于概率不为 0 的任意二事件 A 和 B，有

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B\mid A)=\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A\mid B)\,; \tag{1.10}$$

一般乘法公式 对于任意 m 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$，若 $\mathbf{P}(A_1A_2\cdots A_{m-1})>0$，则有

$$\mathbf{P}(A_1A_2\cdots A_m)=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2\mid A_1)\mathbf{P}(A_3\mid A_1A_2)\cdots\mathbf{P}(A_m\mid A_1A_2\cdots A_{m-1}). \tag{1.11}$$

(2) **全概率公式** 设 $\{H_1,H_2,\cdots,H_k,\cdots\}$ 是完全事件组，且 $\mathbf{P}(H_k)>0$，则

$$\mathbf{P}(A)=\sum_k\mathbf{P}(AH_k)=\sum_k\mathbf{P}(H_k)\mathbf{P}(A\mid H_k)\,. \tag{1.12}$$

(3) **贝叶斯公式** 设 $\{H_1,H_2,\cdots,H_k,\cdots\}$ 是完全事件组，且 $\mathbf{P}(H_k)>0$，则

$$\mathbf{P}(H_k\mid A)=\frac{\mathbf{P}(AH_k)}{\mathbf{P}(A)}=\frac{\mathbf{P}(H_k)\mathbf{P}(A\mid H_k)}{\sum_j\mathbf{P}(H_j)\mathbf{P}(A\mid H_j)}\quad(k=1,2,\cdots). \tag{1.13}$$

（三）事件的独立性和独立试验

1. **独立性** 两个事件独立，指一个事件出现与否不影响另一个事件出现的可能性.

(1) **二事件的独立性** 称二事件 A 和 B 相互独立，如果 $\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$，否则称二事件 A 和 B 相依.

(2) **多事件的独立性** 称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，如果它们之中任意 $m\,(2\leqslant m\leqslant n)$ 个事件同时出现的概率，等于这 m 个事件概率的乘积；称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立，如果它们之中任意两个事件独立.