

高等学校基础数学教学参考丛书·学习指导系列

概率统计学习指导

(第二版)

周概容 王健·编著



南开大学出版社

O21
176:2

参考丛书·学习指导系列

概率统计学习指导

(第二版)

周概容 王 健 编著

南开大学出版社
天 津

图书在版编目(CIP)数据

概率统计学习指导 / 周概容等编著. —2 版. —天津:
南开大学出版社, 2006. 11

ISBN 7-310-00993-2

I. 概... II. 周... III. ①概率论—高等学校—教
学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料
IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 078925 号

版权所有 侵权必究

南开大学出版社出版发行

出版人: 肖占鹏

地址: 天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码: 300071

营销部电话: (022)23508339 23500755

营销部传真: (022)23508542 邮购部电话: (022)23502200

*

南开大学印刷厂印刷

全国各地新华书店经销

*

2006 年 11 月第 2 版 2006 年 11 月第 6 次印刷

880×1230 毫米 32 开本 13.75 印张 392 千字

定价: 26.00 元

如遇图书印装质量问题, 请与本社营销部联系调换, 电话: (022)23507125

内 容 提 要

这一套“高等学校基础数学教学参考丛书·学习指导系列”共三个分册：《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》和《概率统计学习指导》，面向高等学校经济和管理类专业，以及理工类有关专业。这套书自1997年出版以来已经多次重印，这是这套书的第二版，是在第一版的基础上根据近年来使用的教材修订和充实的。

本册书是参照经济和管理类专业，以及理工类非数学各专业通用的“概率论与数理统计”教材编写的。每一章由四部分构成：一、内容提要，二、典型例题分析，三、自我检测题，四、自检题答案或提示。全书针对性强，是学习“概率论与数理统计”的难得的参考书。

这一套“学习指导”的读者对象是高等学校师生，主要是经济和管理门类各专业，以及理工科（非数学）有关专业的师生；对于准备报考硕士研究生和 MBA 者也是一套很好的参考书。亦可供数学专业师生，以及应用概率统计的管理人员和工程技术人员参考使用。

出版说明

这一套“学习指导”，是按照高等学校经济和管理类各专业，以及理工科有关专业通用的教材编写的，是上述各专业必修的数学基础课程的教学参考书，包括《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》和《概率统计学习指导》等三个分册。这套书自1997年出版以来，已经重印了多次。考虑到近年来上述各专业的教材都有所变化或更新，特别是教材中例题和习题的题型也有所变化，出现了许多新颖的题型；而且数学（包括“微积分”、“线性代数”和“概率统计”）是“全国硕士研究生入学统一考试”的必考科目，并且在全部必考4科的总分500分中数学占150分，所以我们决定修订这一套“学习指导”。

修订版保持了原书的结构和格式，只是使每一章前面的“内容提要”更贴近现行的有关教材和“全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》”的要求。“典型例题分析”更新了大部分例题，特别注意吸纳了历年“研究生入学统一考试”试题中比较新颖且有代表性的试题，通过例题向读者演示各种解题方法和技巧，并且使读者能更深入地领会有关理论知识。

编 者

2006年3月

目 录

出版说明

第一章 随机事件与概率	1
一 内容提要.....	1
(一) 事件及其关系和运算.....	1
(二) 事件的概率.....	3
(三) 事件的独立性和独立试验.....	7
二 典型例题分析.....	8
(一) 事件及其关系和运算.....	8
(二) 事件概率的直接计算(古典型与几何型概率).....	15
(三) 事件概率的推算.....	23
(四) 事件的独立性和独立试验.....	34
三 自我检测题.....	40
四 自检题答案和提示.....	44
第二章 随机变量及其概率分布	46
一 内容提要.....	46
(一) 随机变量及其概率分布.....	46
(二) 随机变量的函数的分布.....	48
(三) 常用的概率分布.....	49
二 典型例题分析.....	54
(一) 随机变量及其概率分布.....	54
(二) 常用的概率分布.....	64

(三) 随机变量的函数的分布	81
(四) 单项选择题	93
三 自我检测题	97
四 自检题答案和提示	100
第三章 多维随机变量的概率分布	103
一 内容提要	103
(一) 随机变量的联合分布	103
(二) 随机变量的独立性	108
(三) 随机变量的函数的分布	110
二 典型例题分析	111
(一) 离散型联合概率分布	111
(二) 连续型联合概率密度	123
(三) 随机变量的函数的分布	141
(四) 单项选择题	154
三 自我检测题	158
四 自检题答案和提示	163
第四章 随机变量的数字特征	166
一 内容提要	166
(一) 数学期望	166
(二) 方差和标准差	167
(三) 协方差, 相关系数	168
(四) 矩和协方差矩阵	169
二 典型例题分析	171
(一) 数学期望、方差和标准差	171
(二) 协方差、相关系数和矩	189
(三) 随机变量的相关性	202

(四) 矩	208
三 自我检测题	210
四 自检题答案和提示	216
第五章 中心极限定理和大数定律	219
一 内容提要	219
(一) 中心极限定理	219
(二) 依概率收敛和大数定律	222
二 典型例题分析	223
(一) 中心极限定理	223
(二) 依概率收敛和大数定律	245
三 自我检测题	253
四 自检题答案和提示	257
第六章 数理统计的基本概念和抽样分布	259
一 内容提要	259
(一) 总体、样本和统计量	259
(二) 正态总体的常用抽样分布	261
(三) 极限抽样分布	263
二 典型例题分析	265
(一) 总体、样本和统计量	265
(二) 正态总体的常用抽样分布	275
(三) 极限抽样分布	287
三 自我检测题	289
四 自检题答案和提示	294
第七章 参数估计	297
一 内容提要	297
(一) 参数估计的一般问题	297

(二) 求估计量的方法	299
(三) 正态总体参数的估计	301
(四) 比率的估计	303
二 典型例题分析	304
(一) 参数估计的一般问题	304
(二) 求估计量的方法	314
(三) 区间估计	334
三 自我检测题	348
四 自检题答案和提示	352
第八章 假设检验与比较	354
一 内容提要	354
(一) 假设检验的基本概念和原理	354
(二) 正态总体参数的显著性检验	355
(三) 比率的检验	358
(四) 非参数假设的检验	360
二 典型例题分析	366
(一) 假设检验的两类错误	366
(二) 正态总体参数的显著性检验	374
(三) 比率的检验	389
(四) 非参数假设的检验	393
三 自我检测题	400
四 自检题答案和提示	406
附录 概率统计常用数值表	408
附表 1 标准正态分布函数 $\Phi(x)$	408
附表 2 标准正态分布密度 $\phi(x)$	409

附表 3	标准正态分布双侧分位数 u_{α}	410
附表 4	t 分布双侧分位数 $t_{\alpha, \nu}$	411
附表 5	χ^2 分布上侧概率 $p = \mathbf{P}\{\chi^2 \geq c\}$	412
附表 6	χ^2 分布上侧分位数 $\chi_{\alpha, \nu}^2$	413
附表 7	F 分布上侧分位数 $F_{\alpha}(f_1, f_2)$	415
附表 8	秩和检验的临界值 $w_{\alpha}(m, n)$	420
附表 9	游程总数的下和上临界值 $R_{\alpha}(m, n)$ 和 $R'_{\alpha}(m, n)$	423
附表 10	符号检验临界值 $S_{\alpha, N}$	426
附表 11	样本相关系数 $\hat{\rho}$ 的临界值 $r_{\alpha, \nu}$	427
参考书目		428

第一章 随机事件和概率

这一章是概率论和数理统计的基础知识：(1) 事件及其关系和运算；(2) 事件的概率；(3) 事件的独立性和独立试验。

一 内容提要

(一) 事件及其关系和运算

直观上，随机现象的每一种表现或状态、随机试验的每一种结果视为“事件”。数学上，事件是基本事件空间的子集。事件之间可以引进与集合类似的关系和运算。

1. **随机试验和事件** 我们把对随机现象的观测称做随机试验，简称为试验；随机抽样也视为一种随机试验。试验的最基本结局称做**基本事件**；一切基本事件的集合称做**基本事件空间**或**样本空间**。可以把基本事件空间 $\Omega = \{\omega\}$ 看成一个点集，把基本事件 ω 看成 $\Omega = \{\omega\}$ 中的一个点。试验的每一种可能的结果称做**事件**；每次试验中都肯定出现的事件称做**必然事件**，记为 Ω ；任何一次试验中都不会出现的事件称做**不可能事件**，记为 $\emptyset$ ；每次试验中既可能出现也可能不出现的事件称做**随机事件**，简称为事件。习惯上，用前面几个大写拉丁字母 $A, B, \dots$ 表示事件。有时用 $\{\dots\}$ 表示事件：大括号内用文字或式子表示事件的内容。可以把事件 A 视为 Ω 的子集，即 $A \subset \Omega$ ； $\omega \in A$ 表示事件 A 出现了； $\omega \notin A$ 表示事件 A 未出现。

2. 事件的关系和运算 **关系:** 包含、相等、不相容、对立; **运算:** 和 (并)、差、交.

(1) **包含** $A \subset B$ 表示“每当 A 出现 B 也一定出现”, 读做“事件 B 包含事件 A ”、“ A 是 B 的特款”或“ A 导致 B ”.

(2) **相等** $A = B$ 表示“ $A \subset B$ 且 $B \supset A$ ”, 读做“事件 A 等于事件 B ”.

(3) **和** $A \cup B$ 或 $A + B$ 表示“事件 A 与 B 至少出现一个”, 称做“事件 A 与 B 的**和或并**”; 特别,

$$\bigcup_i A_i \quad \text{或} \quad \sum_i A_i$$

表示事件“ $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 至少出现一个”.

(4) **差** $A \setminus B$ 或 $A - B$ 表示“事件 A 出现但是事件 B 不出现”, 称做“ A 与 B 的**差**”, 或“ A 减 B ”.

(5) **交** $A \cap B$ 或 AB 表示“事件 A 与 B 同时出现”, 称做“ A 与 B 的**交**”; 特别,

$$\bigcap_i A_i \quad \text{或} \quad A_1 A_2 \cdots A_n \cdots$$

表示“事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 同时出现”.

(6) **不相容** 若 $AB = \emptyset$, 则称“事件 A 与 B 不相容”; 若 $AB \neq \emptyset$, 则称“事件 A 和 B 相容”;

(7) **对立事件** 称事件 A 和 $\bar{A}$ 互为对立事件, 若 $A + \bar{A} = \Omega$, $A\bar{A} = \emptyset$, 即 $\bar{A} = \{A \text{ 不出现}\}$.

(8) **完全事件组** 称事件 $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ 构成完全事件组, 若

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_n + \cdots = \Omega, \quad H_i H_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

换句话说, 如果有限个或可数个事件 $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ 两两不相容, 并且“所有事件的和”是必然事件, 则称它们构成完全 (备) 事件组.

3. 事件运算的基本性质 对于任意事件 $A, B, C, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 有

(1) 交换律 $A + B = B + A; AB = BA.$

(2) 结合律 $A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C,$

$$ABC = A(BC) = (AB)C.$$

(3) 分配律 $A(B + C) = AB + AC; (A + C)(B + C) = AB + C;$

$$A(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = AA_1 + AA_2 + \dots + AA_n + \dots.$$

(4) 对偶律 $\overline{A + B} = \overline{A} \overline{B}; \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B};$

$$\overline{A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots} = \overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_n} \dots;$$

$$\overline{A_1 A_2 \dots A_n \dots} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \dots + \overline{A_n} + \dots.$$

(二) 事件的概率

概率——事件在试验中出现可能性大小的数值度量, 是与长度、面积、体积、质量……类似的度量. 通常用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率. 假如用 $\{\dots\}$ 表示事件, 则以 $P\{\dots\}$ 表示其概率, 其中大括号内用文字或式子表示事件的内容. 大致有以下几种确定事件的概率的途径:

(1) 直接计算: 古典概型和几何概型; (2) 用频率估计概率; (3) 概率的推算: 利用概率的性质和公式, 由较简单事件的概率推算较复杂事件的概率.

1. 概率的直接计算

(1) **古典型概率** 假设试验的基本事件空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ 含有 N 个等可能基本事件, 事件 A 含有 M 个基本事件: $A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_M}\}$, 则

$$P(A) = \frac{A \text{ 所含基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}} = \frac{M}{N}. \quad (1.1)$$

【自有限总体的随机抽样】 计算古典概率，需要计算基本事件的总数和事件所包含基本事件的个数。自有限总体的随机抽样的模型常有助于完成运算。考虑自含 N 个元素的总体 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ 的抽样，假设每个元素被抽到的可能性都相同。抽样区分“还原与非还原”、“有序与无序”，各种情形的组合产生表 1.1 所列的四种不同的抽样方式。

表 1.1 四种抽样方式下不同抽法的总数

自含 N 个元素总体 Ω 的 n 次简单随机抽样	抽样方式		不同抽法的总数
	还 原	有 序	N^n
		无 序	C_{N+n-1}^n
	非还原	有 序	$P_N^n = N(N-1)\cdots(N-n+1)$
		无 序	$C_N^n = P_N^n/n!$

【随机分配】 将 n 个质点随机地分配到 N 个盒中，区分每盒最多可以容纳一个和可以容纳任意多个质点，以及质点可辨别和不可辨别等四种情形，对应四种分配方式。各种分配方式下不同分法的总数列入表 1.2。

表 1.2 四种分配方式下不同分法的总数

将 n 个质点随机地分配到 N 个盒中	分配方式		不同分法的总数
	每盒可容纳任意个质点	质点可辨	N^n
		质点不可辨	C_{N+n-1}^n
	每盒最多容纳一个质点	质点可辨	$P_N^n = N(N-1)\cdots(N-n+1)$
		质点不可辨	$C_N^n = P_N^n/n!$

自有限总体 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ 的 n 次简单随机抽样，相当于将 n 个质点随机地分配到 N 个盒中：每一个质点在 N 个盒中“任意选择一个盒子”；“还原”相当于“每盒可以容纳任意多个质点”，“非还原”

相当于“每盒最多可以容纳一个质点”；“有序”相当于“质点可辨别”，“无序”相当于“质点不可辨别”（见例 1.16 解法 3）。

(2) **几何型概率** 假设 Ω 是一线段或平面或空间的有界区域， $L(\Omega)$ 表示其几何度量。考虑随机试验：向 Ω 上投掷一质点，假设：
1) 质点落到 Ω 中的任何点都是可能的，但不可能落到 Ω 之外；2) 质点的落点在 Ω 中分布均匀：质点落入 Ω 中的任何区域 A 的可能性只与其几何度量 $L(A)$ 有关，并与之成正比。简称这样的随机试验为“向区域 Ω 上均匀地掷随机点”。对于 Ω 中的任何区域 $A \subset \Omega$ ，考虑事件 $A = \{\text{质点落入区域 } A\}$ ，则

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}. \quad (1.2)$$

2. **用频率估计概率** 事件 A 在 n 次重复试验中出现的次数 $\nu_n = \nu_n(A)$ ，称做 A 在这 n 次试验中出现的频数；而

$$f_n = f_n(A) = \frac{\nu_n(A)}{n}$$

称做 A 在这 n 次试验中出现的**频率**。当试验次数 n 充分大时可以用事件的频率估计它的概率。

3. **概率的公理** 经实践证实而无需逻辑证明的概率的基本性质，定为公理：

公理 1 非负性 任何事件 A 的概率都是非负的： $P(A) \geq 0$ ；

公理 2 规范性 必然事件的概率等于 1： $P(\Omega) = 1$ ；

公理 3 完全可加性 对于任意可数个两两不相容事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ($A_i A_j = \emptyset, i \neq j$)，它们之和的概率等于各个事件的概率之和，即

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots.$$

4. **概率的基本公式和运算法则** 由概率的公理可以证明下列公式和法则。

(1) **不可能事件** 不可能事件的概率 $P(\emptyset) = 0$ 。

(2) **对立事件** 对立事件的概率 $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

(3) **减法公式** 对于任意二事件 A 和 B , 有

$$\mathbf{P}(A - B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) . \quad (1.3)$$

特别, 若 $B \subset A$, 则

$$\mathbf{P}(A - B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) . \quad (1.4)$$

(4) **加法公式** 对于任意事件 A, B , 有

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) ; \quad (1.5)$$

(5) **一般加法公式** 对于可数个任意事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1 + A_2 + A_3) &= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) \\ &\quad - [\mathbf{P}(A_1 A_2) + \mathbf{P}(A_1 A_3) + \mathbf{P}(A_2 A_3)] + \mathbf{P}(A_1 A_2 A_3) . \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i < j} \mathbf{P}(A_i A_j) \\ &\quad + \sum_{i < j < k} \mathbf{P}(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n+1} \mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_n) . \end{aligned} \quad (1.7)$$

(6) **概率的半可加性** 设 $A_1, A_2, \dots$ 是任意有限或可数个事件, 则

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \dots) \leq \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \dots . \quad (1.8)$$

5. 条件概率和概率的三个基本公式

【条件概率定义】 设 A 和 B 是任意二事件, 其中 $\mathbf{P}(A) > 0$, 则称

$$\mathbf{P}(B | A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \quad (1.9)$$

为“事件 B 在事件 A 出现的条件下的**条件概率**”, 简称“事件 B 关于事件 A 的条件概率”. 对于给定的事件 A , 条件概率 $\mathbf{P}(B | A)$ 具有(无条件)概率的一切性质.

(1) **乘法公式** 对于概率不为 0 的任意二事件 A 和 B , 有

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B); \quad (1.10)$$

一般乘法公式 对于任意 m 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_m$, 若 $P(A_1 A_2 \cdots A_{m-1}) > 0$, 则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_m|A_1 A_2 \cdots A_{m-1}). \quad (1.11)$$

(2) **全概率公式** 设 $\{H_1, H_2, \dots, H_k, \dots\}$ 是完全事件组, 且 $P(H_k) > 0$, 则

$$P(A) = \sum_k P(AH_k) = \sum_k P(H_k)P(A|H_k). \quad (1.12)$$

(3) **贝叶斯公式** 设 $\{H_1, H_2, \dots, H_k, \dots\}$ 是完全事件组, 且 $P(H_k) > 0$, 则

$$P(H_k|A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_j P(H_j)P(A|H_j)} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (1.13)$$

(三) 事件的独立性和独立试验

1. **独立性** 两个事件独立, 指一个事件出现与否不影响另一个事件出现的可能性.

(1) **二事件的独立性** 称二事件 A 和 B 相互独立, 如果 $P(AB) = P(A)P(B)$, 否则称二事件 A 和 B 相依.

(2) **多事件的独立性** 称 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 如果它们之中任意 m ($2 \leq m \leq n$) 个事件同时出现的概率, 等于这 m 个事件概率的乘积; 称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两独立, 如果它们之中任意两个事件独立.