2007

XINGAOKAOERLUN
QUANGONGLUE

新高考二轮全攻略

◎主编／陈 峰

理科数学（学生用书）

光明日报出版社

XINGAOKAO
ERLUNQUAN
GONGLUE

2007新高考

二轮全攻略

理科数学(学生用书)

主　编：陈　峰

副主编：毛　水　李建刚　叶美雄

编　委：陈　峰　张志忠　董　凰　张立军
李生根　蒋太煌　姜海平　胡旭初
李先凯　杨　伟　尹玉生　陈建权
武书桂　许永江　赵群龙　陈善苑
邓小武　贺旺兴　（排名不分先后）

光明日报 出版社

图书在版编目(CIP)数据

新高考二轮全攻略·数学/陈峰主编—北京:光明
日报出版社,2006.10
ISBN 7—80206—164—4

Ⅰ.新… Ⅱ.陈… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料
Ⅳ.G631

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第128459号

书　　名:《新高考二轮全攻略》·数学(学生用书)
本册主编:陈峰
出版发行:光明日报出版社
　　　　　北京崇文区珠市口东大街5号
　　　　　邮政编码:100062
　　　　　电话:010—67078252
经　　销:光明日报出版社
印　　刷:湖南航天长宇印刷有限责任公司
规　　格:787×1092　1/16
印　　张:130.5
字　　数:2600千字
版　　次:2006年10月第2版　2006年10月第1次印刷
书　　号:ISBN 7—80206—164—4
定　　价:198.00元(全套共11册)

前 言

高中新课程标准的实行，使新高考较旧高考发生了深刻的变化，也对我们的高考复习提出了更新更高的要求，要求我们必须重新审视和仔细考虑新高考备考中教与学的模式与方略，并拿出行之有效的方法与对策，以期获得新高考复习的最佳效益。基于此种考虑，我们特组织省城几所重点中学多年从事新高考教学与研究的特高级教师，以 2006 年《考试大纲》为依据，同时充分考虑到如下两个因素：一方面是刚结束的 2006 年高考，她充分体现了 2006 年文、理试题明显的区分度，两科总的原则“少考一点运算，多考一点思考”；另一方面，2007 年秋季，各地高中数学将全面实施新课标教材，新课标教材不但重视逻辑思维能力，而且更重视学生实践能力、综合思维能力及终身学习能力的培养。为此，我们必须从培养学生创新思维、综合运用知识的能力入手，做到既有知识的综合交叉，又有能力的拓展延伸，旨在培养学生多角度、多层而的创新发展思维，帮助学生完成新高考复习冲刺阶段质的飞跃，这就是本书编写的基本思路与理念。

本书针对二轮复习的特点，分知识篇与思想方法篇两部分。知识篇按新高考主干知识为线索设置专题，每个专题根据教学需要，按二轮复习的课堂教学模式分课时进行，把知识整合与方法提升落实到 45 分钟的课堂教学之中；思想方法篇按新高考要求的核心能力和热点问题设置数学思想方法专题，从面提升学生的数学素质和素养。其中具体到每个课时设了下列栏目：

【领悟高考】 评析 2005 年和 2006 年高考与本课时紧密相关的高考试题，帮助学生了解高考命题的特点和规律，让学生感悟解高考题的思想方法与技巧，以期达到新高考复习的针对性和实践性。

【备考要点】 由前面的高考题导出本课时要掌握的重要知识，分条叙述新高考的考试要求，对本课时涉及的主干知识进行整合、重组，注意学科内知识的内引

外联,引导学生把握知识间的内在联系。

【典例精析】 对本课时内容,按小标题阐述基本方法,每个小标题下选一个精当例题。例题按45分钟时量选题,设量做到由易到难,本着低起点、多台阶的原则,引导学生按思维主线在课堂上逐步由低层向高层思维发展,突出可训练性,形成良好的导向性。

【规律总精】 针对考生可能存在的疑惑,进行针对性点按,对本课时解题中形成的规律进行总结与归纳,授之以渔。

【能力精练】 按低起点、多台阶设置能力试题,分选择题,填空题及解答题三部分,选题注重新颖性与练合性相结合,突出训练由基础向能力逐步发展的原则,选题时与例题形成互补性,从而达到训练考生综合能力的目的。

在专题设量上,考虑到本书文、理分开的实际情况,对新高考中数学文、理科不同的考试内容分别设量了专题,以期加强复习的针对性。同时也考虑到文、理科数学高考对能力要求的差异,在"**典例精析**"和"**能力精练**"的选题中,第三个思维层次是严格区分选题的,以准确地把握好二轮复习的方向,保持文、理科复习的实效性,有的放矢,从而收到最佳的复习效果。

与本书配套,将配置八套单元检测卷,活页装订,考生可自测自检,也可作为老师统一考试的检测卷,方便便用。

本书采用"一拖三"的形式,即一本教师用书,带一本学生用书,学生书简易答案及专题活页试卷。

虽然我们对本书竭尽心智,但因水平有限,难以至善至美。恳请广大师生提出宝贵意见。

编　者

2006年10月

目 录

第一篇 知识篇

第一章 函数、导数、不等式

第二章 数列与极限

第三章 三角与向量

第四章 直线、圆和圆锥曲线

第五章 直线、平面与简单几何体

第六章 排列、组合、概率与统计

第二篇 思想方法篇

第七章 数学思想与方法

第八章 热点问题

第一篇 知识篇

第一章 函数、导数、不等式

第1课时 集合与简易逻辑

领悟高考

有关集合与简易逻辑的试题可分为两类:一类是有关集合、充要条件和命题本身的基础题,这类试题多以选择或填空题形式出现;另一类是集合、充要条件、命题与其他知识的综合题,集合问题多与函数、方程、不等式联系起来.反证法为一种重要数学证明方法,是近几年高考热点.

考题1(2006年山东卷)定义集合运算:$A\odot B=\{z|z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$,设集合$A=\{0,1\}$,$B=\{2,3\}$,则集合$A\odot B$的所有元素之和为 ( )

A. 0 B. 6 C. 12 D. 18

考题2(2006年天津卷)设集合$M=\{x|0<x\leqslant 3\}$,$N=\{x|0<x\leqslant 2\}$,那么"$a\in M$"是"$a\in N$"的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

考题3(2006年全国Ⅱ卷)设$a\in\mathbf{R}$,二次函数$f(x)=ax^2-2x-2a$,设不等式$f(x)>0$的解集为A,又知$A\cap B\neq\varnothing$且$B=\{x|1<x<3\}$,求a的取值范围.

备考要点

1. 集合是老高考内容,简易逻辑是新高考内容,后者不是对前者的补充,而是交织和深化.
2. 解答集合有关问题,要认真理解集合的概念,能熟练地将集合语言与其他数学语言相互转化,化生为熟.
3. 新高考对逻辑的考查主要集中在命题的四种形式和充分必要条件的判定上,解答这类问题时,要注意相关数学知识的准确运用.

典例精析

1. 集合的概念及运算

例1 设$A=\{-4,2a-1,a^2\}$,$B=\{9,a-5,1-a\}$,已知$A\cap B=\{9\}$,求实数a的值.

【解析】$\because A\cap B=\{9\}$,$\therefore 9\in A$

(ⅰ)若$2a-1=9$,则$a=5$,此时$A=\{-4,9,25\}$,$B=\{9,0,-4\}$,$A\cap B=\{9,-4\}$,与已知矛盾,舍去.

(ⅱ)若$a^2=9$,则$a=\pm3$.当$a=3$时,$A=\{-4,5,9\}$,$B=\{-2,-2,9\}$,B中有两个元素均为-2,与集合中元素互异性矛盾,舍去.当$a=-3$时,$A=\{-4,-7,9\}$,$B=\{9,-8,4\}$,符合题意.

综上所述,$a=-3$.

【点评】本题解答须明确集合元素的三种基本属性——确定性、互异性、无序性,解答中常产生增根,验算是必不可少的.

2. 四种命题关系及命题真假的判定

例2 判断命题"已知a,x为实数,如果关于x的不等

式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 的解集非空,则 $a\geqslant 1$"的逆否命题的真假.

【解析】解法一:直接由原命题写出其逆否命题,然后判断逆否命题的真假.

原命题:已知 a,x 为实数,如果关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 的解集为非空集,则 $a\geqslant 1$.

逆否命题:已知 a,x 为实数,如果 $a<1$,则关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 的解集为空集.

判断如下:

抛物线 $y=x^2+(2a+1)x+a^2+2$ 开口向上.

判别式 $\Delta=(2a+1)^2-4(a^2+2)=4a-7$

$\because a<1$,$\therefore 4a-7<0$.

即抛物线 $y=x^2+(2a+1)x+a^2+2$ 与 x 轴无交点.

$\therefore$关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 的解集为空集,故逆否命题为真.

解法二:根据命题之间的关系"原命题与逆否命题同真同假",只需判断原命题的真假即可.

$\because a,x$ 为实数,且关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 的解集非空.

$\therefore \Delta=(2a+1)^2-4(a^2+2)\geqslant 0$,即 $a\geqslant\frac{7}{4}$.

$\because a\geqslant\frac{7}{4}>1$,$\therefore$原命题为真,故逆否命题为真.

解法三:运用充要条件与集合的包含、相等关系求解.

命题 p:关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 有非空解集.

命题 q:$a\geqslant 1$.

$\therefore p:A=\{a|$关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 有实数解$\}=\{a|(2a+1)^2-4(a^2+2)\geqslant 0\}=\{a|a\geqslant\frac{7}{4}\}$. $q:B=\{a|a\geqslant 1\}$.

$\because A\subseteq B$,$\therefore$若 p 则 q 为真

$\therefore$"若 p 则 q"的逆否命题:"若 $\neg q$ 则 $\neg p$"为真.

即原命题的逆否命题为真.

【点评】要判断一个命题的真假,可根据定义(解法一);也可利用原命题与其逆否命题等价求解(解法二);而解法三则将命题与集合对应起来,然后利用充要条件与集合的包含、相等关系求解.

3. 充要条件及其判定

例3 集合 $A=\{x|\frac{x-1}{x+1}<0\}$,$B=\{x||x-b|<a\}$,若"$a=1$"是"$A\cap B\neq\varnothing$"的充分条件,则 b 的取值范围可以是 ( )

A. $-2\leqslant b<0$ B. $0<b\leqslant 2$
C. $-3<b<-1$ D. $-1\leqslant b<2$

【解析】解法一:$A=\{x|\frac{x-1}{x+1}<0\}=\{x|-1<x<1\}$.

$B=\{x||x-b|<a\}=\{x|b-a<x<b+a\}$.

当 $a=1$ 时,$B=\{x|b-1<x<b+1\}$.

$\because A\cap B\neq\varnothing$,

$\therefore\begin{cases}b-1<1\\ b+1>-1\\ b-1<b+1\end{cases}\Leftrightarrow -2<b<2.$

又$\because$只要求是充分条件,

$\therefore$只需找到$(-2,2)$的子集即可,故选D.

解法二:特值法,将 $b=0$ 代入满足题目条件,故选D.

4. 与集合及其运算相关的综合问题

例4 对于函数 $f(x)$,若 $f(x)=x$,则称 x 为 $f(x)$的"不动点",若 $f[f(x)]=x$,则称 x 为 $f(x)$的"稳定点". 函数 $f(x)$的"不动点"和"稳定点"的集合分别记为 A 和 B,即 $A=\{x|f(x)=x\}$,$B=\{x|f[f(x)]=x\}$

(1)求证:$A\subseteq B$;

(2)若 $f(x)=ax^2-1(a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R})$,且 $A=B\neq\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

【解析】(1)若 $A=\varnothing$,则 $A\subseteq B$ 显然成立;

若 $A\neq\varnothing$,设 $t\in A$,则 $f(t)=t$,$f[f(t)]=f(t)=t$,

即 $t\in B$,从而 $A\subseteq B$.

(2)A 中元素是方程 $f(x)=x$,即 $ax^2-1=x$ 的实根.

由 $A\neq\varnothing$ 知 $a=0$ 或 $\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta=1+4a\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow a\geqslant-\frac{1}{4}$.

B 中元素是方程 $a(ax^2-1)^2-1=x$

即 $a^2x^4-2a^2x^2-x+a-1=0$ 的实根,由 $A\subseteq B$ 知上述方程左边含有一个因式 ax^2-x-1,即方程可化为 $(ax^2-x-1)(a^2x^2+ax-a+1)=0$

因此,要 $A=B$,即只要 $a^2x^2+ax-a+1=0$ ①没有实根或实根是方程 $ax^2-x-1=0$ ②的实根.

若①没有实根,则 $\Delta_1=a^2+4a^2(a-1)<0\Rightarrow a<\frac{3}{4}$;

若①有实根且①的实根是②的实根,则由②有 $a^2x^2=ax+a$,代入①有 $2ax+1=0$,由此得 $x=-\frac{1}{2a}$,再代入②得 $\frac{1}{4a}+\frac{1}{2a}-1=0$,$\therefore a=\frac{3}{4}$.

故所求 a 的范围是 $a\in[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$.

【点评】本题综合了函数、方程和集合的有关知识.这里首先要理解 A、B 的定义,然后将问题等价转化,特别值得注意的是,利用 $A\subseteq B$,将四次方程转化为两个二次方程来讨论.最后要指出的是,在(1)的证明中,必须分 $A=\varnothing$ 和 $A\neq\varnothing$ 两种情况说明.

例5 已知$\{a_n\}$是等差数列，d 为公差且不为 0，a_1 和 d 均为实数，它的前 n 项和记作 S_n，设集合 $A=\{(a_n,\frac{S_n}{n})|n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{(x,y)|\frac{1}{4}x^2-y^2=1,x,y\in\mathbf{R}\}$. 试问下列结论是否正确. 如果正确，请给予证明；如果不正确，请举例说明.

(1)若以集合 A 中的元素作为点的坐标，则这些点都在同一条直线上；

(2)$A\cap B$ 至多有一个元素；

(3)当 $a_1\neq0$ 时，一定有 $A\cap B\neq\varnothing$.

【解析】(1)正确，在等差数列$\{a_n\}$中，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，则$\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}(a_1+a_n)$，即表示点$(a_n,\frac{S_n}{n})$的坐标适合方程 $y=\frac{1}{2}(x+a_1)$. 于是，点$(a_n,\frac{S_n}{n})$在直线 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a_1$ 上.

(2)正确，设$(x,y)\in A\cap B$，则 x、y 应是方程组

$$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a_1\\ \frac{1}{4}x^2-y^2=1\end{cases}$$的解.

消去 y，得 $2a_1x+a_1^2=-4$　　①

当 $a_1\neq0$ 时，方程①有唯一解 $x=\frac{-4-a_1^2}{2a_1}$. 此时方程组有唯一解$\begin{cases}x=\frac{-4-a_1^2}{2a_1}\\ y=\frac{a_1^2-4}{4a_1}\end{cases}$.

当 $a_1=0$ 时，方程①无解，此时 $A\cap B=\varnothing$.

故上述方程组至多有一解，即 $A\cap B$ 至多有一个元素.

(3)不正确

取 $a_1=1,d=1$，此时 $a_n=n>0$，$\frac{S_n}{n}=\frac{1+n}{2}>0$，这时集合 A 中的元素作为点的坐标，其横、纵坐标均为正，另外 $a_1=1\neq0$，如果 $A\cap B\neq\varnothing$，那么根据(2)的结论，$A\cap B$ 中至多有一个元素(x_0,y_0)，

而 $x_0=\frac{-4-a_1^2}{2a_1}=-\frac{5}{2}<0$，$y_0=\frac{a_1+x_0}{2}=-\frac{3}{4}<0$，这样的$(x_0,y_0)\notin A$，矛盾. 故 $a_1=1,d=1$ 时，$A\cap B=\varnothing$，所以 $a_1\neq0$ 时，一定有 $A\cap B\neq\varnothing$ 是不正确的.

【点评】本题为开放性问题，以数列、解析几何为背景，考察的集合 $A=\{(a_n,\frac{S_n}{n})|n\in\mathbf{N}^*\}$实际上是一个点列，且在同一直线上. 问题探究性强，尤其是(3)的解决，通过构造反例否定命题，值得重视.

规律总结

1. 解答集合问题，理解集合是关键，要注意集合元素的三性及空集是任何一个集合的子集，以防讨论时遗忘空集情形.
2. 命题真假的判断，要注意分清是简单命题还是复合命题，对于复合命题须用真值表判定.
3. 充分必要条件的判定与探究，必须坚持"双向"考查的原则，或用定义判定，或将命题转化为它的逆否命题来判定，或从集合的包含关系、相等关系判定是否是充要条件关系.

能力精练

一、选择题

1. 设集合 $P=\{m|m=-3^t,t\in(-\infty,0)\}$，$Q=\{m\in\mathbf{R}|mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 x 恒成立$\}$，则下列关系中成立的是　(　　)

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $Q\subseteq P$

C. $P=Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

2. 设集合 $U=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)|2x-y+m>0\}$，$B=\{(x,y)|x+y-n\leqslant0\}$，那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$的充要条件是　(　　)

A. $m>-1,n<5$　　B. $m<-1,n<5$

C. $m>-1,n>5$　　D. $m<-1,n>5$

3. $P=\{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=(-1,1)+m(1,2),m\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}=(1,-2)+n(2,3),n\in\mathbf{R}\}$是两个向量的集合，则 $P\cap Q=$　(　　)

A. $\{(1,-2)\}$　　B. $\{(-13,-23)\}$

C. $\{(-2,1)\}$　　D. $\{(-23,-13)\}$

4. 给出两个命题，p：$|x|=x$ 的充要条件是 x 为正实数，q：存在反函数的函数一定是单调函数，则下列哪个复合命题是真命题　(　　)

A. p 且 q　　B. p 或 q

C. $\neg p$ 且 q　　D. $\neg p$ 或 q

5. 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，且 $f(0)=3$，$f(3)=-1$，设 $P=\{x||f(x+t)-1|<2\}$，$Q=\{x|f(x)<-1\}$，若"$x\in P$"是"$x\in Q$"的充分不必要条件，则实数 t 的取值范围是　(　　)

A. $t\leqslant0$　B. $t\geqslant0$　C. $t\leqslant-3$　D. $t\geqslant-3$

6. 已知两个向量集合 $A=\{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,4-\cos^2\alpha)\}$，$B=\{\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\lambda+\sin\beta)\}$，$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，若 $A\cap B=\varnothing$. 则实数 λ 的取值范围是　(　　)

A. $[2,5]$　　B. $[\frac{11}{4},5]$

C. $[\frac{11}{4},+\infty)$　　D. $(-\infty,5]$

二、填空题

7. 在空间中,①若四点不共面,则这四点中任何三点都不共线;②若两条直线没有公共点,则这两条直线是异面直线. 以上两个命题中,逆命题为真命题的是_____.(把符合条件的命题序号都填上)

8. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=p^n+q(p\neq 0,p\neq 1)$,则$\{a_n\}$成等比数列的充要条件是________.

9. 设$a,b\in \mathbf{Z}$,$E=\{(x,y)\mid (x-a)^2+3b\leqslant 6y\}$,点$(2,1)\in E$,$(1,0)\notin E$,$(3,2)\in E$,则$2^a+2^b=$______.

三、解答题

10. 已知$p:x^2+mx+1=0$有两个不等的负根,$q:4x^2+4(m-2)x+1=0$无实根,若$p\cup q$为真,$p\cap q$为假,求m的取值范围.

11. 设$M=\{x|ax^2+(a-2)x+1<0\}$,已知$M\neq\varnothing$,且$M\subseteq(0,+\infty)$,求实数a的范围.

12. 已知奇函数$f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上有意义,且在$(0,+\infty)$上是增函数,$f(1)=0$,又有函数$g(\theta)=\sin^2\theta+m\cos\theta-2m$,$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$,若集合$M=\{m|g(\theta)<0\}$,集合$N=\{m|f[g(\theta)]<0\}$

(1)求$f(x)<0$的解集;

(2)求$M\cap N$.

第2课时　函数的图象与性质

领悟高考

函数的图象和性质是高考考查的重点，预计在2007年的高考中，函数性质、不等式及导数等知识的交汇点设置能力试题仍为考查重点，因此，复习中注意对数形结合及函数思想方法的领悟，才会解答好创意新颖的试题.

考题1（2006年福建卷）已知 $f(x)$ 是周期为2的奇函数，当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\lg x$，设 $a=f(\frac{6}{5})$，$b=f(\frac{3}{2})$，$c=f(\frac{5}{2})$，则　　（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $c<b<a$　　D. $c<a<b$

考题2（2006年江苏卷）设 a 为实数，函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$.

(1)设 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，求 t 的取值范围，并把 $f(x)$ 表示为 t 的函数 $m(t)$；

(2)求 $g(a)$；

(3)试求满足 $g(a)=g(\frac{1}{a})$ 的所有实数 a.

备考要点

1. 函数性质包括函数的定义域、值域、奇偶性、单调性、周期性、对称性、最值等，函数是历年高考的热点内容，主要考察的有函数的性质，反函数的概念和性质，函数的图象及变换和以基本初等函数出现的函数综合题.
2. 函数思想是函数的精髓，映射、函数、反函数体现了从对应的角度研究函数，从互为逆对应的角度研究函数及反函数，对应思想是函数最本质的思想；另一方面，通过方程可以确定函数，它又体现了函数与方程的思想，运用这种思想可以将函数、方程问题及不等式问题相互转化后求解.
3. 运用基本初等函数的图象研究函数的图象是处理图象问题的基本思路之一，除此之外，熟练地运用函数图象的平移、对称、伸缩等变换规律画函数图象，又常常可使复杂问题简单化，由图象研究达到对函数基本性质（如定义域、值域、单调性、奇偶性等）的研究，如讨论方程根的个数及求解不等式等，都体现了透过函数看问题的思想方法.

典例精析

1. 函数的定义域和值域

例1 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=3f(x)$，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^2-2x$. 则当 $x\in[-4,-2]$ 时，$f(x)$ 的最小值是　　（　　）

A. -1　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $-\frac{1}{9}$

【解析】令 $x\in[-4,-2]$，

$\therefore x+4\in[0,2]$，$\therefore f(x+4)=3$，$f(x+2)=9f(x)$

又 $f(x+4)=(x+4)^2-2(x+4)$

$\therefore 9f(x)=(x+4)^2-2(x+4)=x^2+6x+8$

即 $f(x)=\frac{1}{9}(x+3)^2-\frac{1}{9}$

故当 $x\in[-4,-2]$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{9}$，选D.

【点评】求值域时应优先考虑定义域，(2)的求解最容易忽视复合函数 $y=[f(x)]^2+f(x^2)$ 的定义域.

2. 函数的奇偶性、单调性、周期性及图象的对称性

例2 (1)函数 $f(x)=b(1-\frac{2}{1+2^x})+\sin x+3$（$b$ 为常

数),若 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有最大值10,则 $f(x)$在$(-\infty,0)$上有最____值为________;

(2)已知函数 $f(x)$的定义域为$\{x|x\in\mathbf{R}$且$x\neq1\}$,$f(x+1)$为奇函数,当$x<1$时,$f(x)=2x^2-x+1$,则当$x>1$时,$f(x)$的递减区间是________.

【解析】(1)令 $F(x)=f(x)-3=b(1-\frac{2}{1+2^x})+\sin x$

则 $F(-x)=-F(x)$

$\because F(x)=f(x)-3$在$(0,+\infty)$的最大值为$10-3=7$,故 $F(x)=f(x)-3$在$(-\infty,0)$最小值为-7,从而可知 $f(x)$在$(-\infty,0)$最小值为$-7+3=-4$.

(2)由 $f(x+1)$为奇函数得 $f(-x+1)=-f(x+1)$

$\therefore f(x)$关于点$(1,0)$对称,先画出 $f(x)$在$(-\infty,1)$上的图象,再根据对称性画出 $f(x)$在$(1,+\infty)$上的图象,从而求得单调递减区间为$[\frac{7}{4},+\infty)$.

【点评】通过观察发现 $f(x)-3$是奇函数是问题解决的突破口,这类问题称之为部分奇偶性问题.

1. 掌握有关中心对称、轴对称的几个重要结论:

①若 $f(x+a)=f(b-x)$,则函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$对称,特别地,若 $f(a+x)=f(a-x)$,函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=a$对称;

②若 $f(x+a)=-f(b-x)$,则函数 $f(x)$的图象关于点$(\frac{a+b}{2},0)$中心对称,特别地,若 $f(a+x)=-f(a-x)$,则函数 $f(x)$的图象关于点$(a,0)$中心对称.

2. 周期性与对称性间的相互联系:

①若 $f(x)$的图象有 $x=a$和 $x=b(a\neq b)$两条对称轴,则 $f(x)$必为周期函数,且$2|b-a|$是它的一个周期;

②若 $f(x)$的图象有$(a,0)$和$(b,0)(a\neq b)$两个对称中心,则 $f(x)$必为周期函数,且$2|b-a|$是它的一个周期;

③若 $f(x)$的图象有一条对称轴 $x=a$和一个对称中心$(b,0)(a\neq b)$,则 $f(x)$必为周期函数,且$4|b-a|$是它的一个周期.

例4 已知函数 $y=f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的周期函数,周期 $T=5$,函数 $y=f(x)(-1\leqslant x\leqslant1)$是奇函数,又 $y=f(x)$在$[0,1]$上是一次函数,在$[1,4]$上是二次函数,且在 $x=2$时取得最小值,最小值为-5

(1)证明:$f(1)+f(4)=0$;

(2)试求 $y=f(x)$在 $x\in[1,4]$上的解析式;

(3)试求 $y=f(x)$在 $x\in[4,9]$上的解析式.

【解析】(1)$\because y=f(x)$是以5为周期的周期函数

$\therefore f(4)=f(4-5)=f(-1)$

又 $y=f(x)(-1\leqslant x\leqslant1)$是奇函数

$\therefore f(1)=-f(-1)=-f(4)$

$\therefore f(1)+f(4)=0$

(2)当 $x\in[1,4]$时,由题意可设 $f(x)=a(x-2)^2-5$ $(a>0)$,由 $f(1)+f(4)=0$得,

$a(1-2)^2-5+a(4-2)^2-5=0$

解得 $a=2$ $\therefore f(x)=2(x-2)^2-5(1\leqslant x\leqslant4)$

(3)$\because y=f(x)(-1\leqslant x\leqslant1)$是奇函数

$\therefore f(0)=-f(-0)$,$\therefore f(0)=0$

又 $y=f(x)(0\leqslant x\leqslant1)$是一次函数

$\therefore$可设 $f(x)=kx(0\leqslant x\leqslant1)$

$\because f(1)=2(1-2)^2-5=-3$,

又 $f(1)=k\cdot1=k$,$\therefore k=-3$,

$\therefore 0\leqslant x\leqslant1$时,$f(x)=-3x$

当$-1\leqslant x<0$时,$0<-x\leqslant1$

$\therefore f(x)=-f(-x)=-3x$

$\therefore -1\leqslant x\leqslant1$时 $f(x)=-3x$

当 $4\leqslant x\leqslant6$时, $-1\leqslant x-5\leqslant1$

$\therefore f(x)=f(x-5)=-3(x-5)=-3x+15$

当 $6<x\leqslant9$时, $1<x-5\leqslant4$

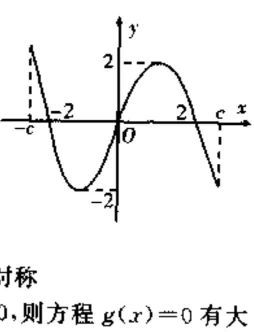
$f(x)=f(x-5)=2[(x-5)-2]^2-5=2(x-7)^2-5$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-3x+15 & (4\leqslant x\leqslant6)\\ 2(x-7)^2-5 & (6<x\leqslant9)\end{cases}$$

【点评】函数的周期性、奇偶性、单调性之间的关系较为密切;对于抽象函数,要敢于从特殊性入手,猜测后验证,注意赋值法、演绎推理法的运用.

3. 函数的图象及应用

例4 $f(x)$是定义在区间$[-c,c]$上的奇函数,其图象如右图所示,令 $g(x)=af(x)+b$,则下列关于函数 $g(x)$的叙述正确的是 ( )



A. 若 $a<0$,则函数 $g(x)$图象关于原点对称

B. 若 $a=-1$,$-2<b<0$,则方程 $g(x)=0$有大于2的实根

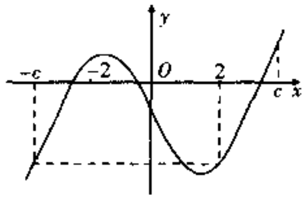
C. 若 $a\neq0$,$b=2$,则方程 $g(x)=0$有两实根

D. 若 $a\geqslant1$,$b<2$,则方程 $g(x)=0$有三个实根

【解析】由已知可设 $f(x)=mx(x-2)(x+2)(m<0)$,$x\in[-c,c]$,又 $g(x)=amx(x-2)(x+2)+b$,将原图象向上(或向下)平移$|b|$个单位,因此 $g(x)$的图象

不可能关于原点对称.

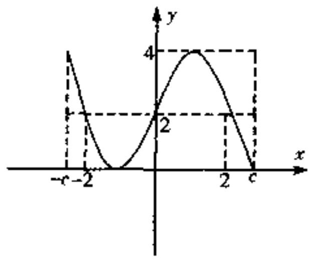
当 $a=-1,-2<b<0$ 时,



$g(x)=-mx(x-2)(x+2)+b$,其图象如上图所示,在$[2,c]$上有 1 个根.

当 $a\neq0,b=2$ 时,

$g(x)=amx(x-2)(x+2)+2=a[mx(x-2)(x+2)+\frac{2}{a}]$,其图象如右图所示($a>0$),$\frac{2}{a}$可大于 2,此时与 x 轴只有一个交点,即只有一个实根.



当 $a\geqslant1,b<2$ 时,

$g(x)=amx(x-2)(x+2)+b$

$=a[mx(x-2)(x+2)+\frac{b}{a}]$

$\frac{b}{a}$的取值范围不确定,即与 x 轴交点个数不确定,选 B

5 已知函数 $f(x)=\frac{x+1-a}{a-x}$,$a\in\mathbf{R}$

(1)证明:函数 $y=f(x)$的图象关于点$(a,-1)$成中心对称;

(2)当 $x\in[a+1,a+2]$时,求证:$-2\leqslant f(x)\leqslant-\frac{3}{2}$;

(3)若函数 $f(x)$定义域为 D,若存在 $x_0\in D$,使 $f(x_0)=x_0$ 成立,则称点(x_0,x_0)为函数的不动点,若已知函数存在不动点,求 a 的范围.

【解析】证明:(1)设 $P(x_0,y_0)$是 $y=f(x)$图象上任意一点,则 $y_0=\frac{x_0+1-a}{a-x_0}$,而点 $P(x_0,y_0)$关于点$(a,-1)$对称点为 $P'(2a-x_0,-2-y_0)$,

$\because f(2a-x_0)=\frac{2a-x_0+1-a}{a-(2a-x_0)}=\frac{a-x_0+1}{x_0-a}$,

$-2-y_0=-2-\frac{x_0+1-a}{a-x_0}=\frac{a-x_0+1}{x_0-a}$

$\therefore -2-y_0=f(2a-x_0)$,即 P 在 $y=f(x)$的图象上.

由点 $P(x_0,y_0)$的任意性知,函数 $y=f(x)$的图象关于点$(a,-1)$成中心对称.

(2)因为 $f(x)=-1-\frac{1}{x-a}$在$[a+1,a+2]$上为增函数

又 $f(a+1)=-2,f(a+2)=-\frac{3}{2}$

$\therefore -2\leqslant f(x)\leqslant-\frac{3}{2}$.

(3)即 $x\neq a$ 时,$f(x)=x$ 有解,即$\frac{x+1-a}{a-x}=x$ 有解

即 $x^2+(1-a)x+1-a=0$ 有不等于 a 的解

将 $x=a$ 代入,方程不成立,故方程不会有 $x=a$ 的解

由 $\Delta\geqslant0$ 得 $a\leqslant-3,a\geqslant1$

故所求范围是 $a\leqslant-3$,或 $a\geqslant1$

【点评】这里(1)的解决使我们了解了证明函数 $f(x)$的图象关于点(或直线)对称的一般方法;证明 $y=f(x)$与 $y=g(x)$的图象关于点 C(或直线)对称的方法是:在 $y=f(x)$的图象上任意取一点 $P(x_0,y_0)$,求出点 $P(x_0,y_0)$关于点 C(或直线)对称的点 $Q(x',y')$,再设法证明 $y'=g(x')$.

规律总结

1. 研究函数定义域是研究函数其他性质的前提条件,即定义域优先考虑原则,如发现一个函数的定义域不关于原点对称,则函数为非奇非偶函数,无须判定 $f(x)$与 $f(-x)$的关系了.
2. 讨论函数性质问题时,要善于运用定义进行判断和验证,但注意定义运用的准确性.如判定一个函数 $f(x)$为奇函数,在其定义域关于原点对称的前提下,应该说明定义域中任一 x 有 $f(-x)=-f(x)$,若判定 $f(x)$不是奇函数,在它的定义域又关于原点对称的条件下,我们只须在定义域特取一个 x_0,有$f(-x_0)\neq-f(x_0)$即可.
3. 对于抽象函数性质的探究,要善于找一个符合条件的特殊函数,通过这个函数的性质大胆猜测后再验证,体现了归纳思想的运用.
4. 研究函数问题常用到数形结合方法和化归转化方法,规范作出函数图象和等价转化对寻找思维的切入点至关重要.

能力精练

一、选择题

1. 已知函数 $y=f(x)$是偶函数,其图象与 x 轴有四个交点,其方程 $f(x)=0$ 的所有实根之和为　(　　)

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. 0

2. 若函数 $f(x)$的图象过点(2,4),则函数 $f(2x+2)$的反函数的图象必过点　(　　)

A. (0,4)　　B. (4,0)

C. $(-1,4)$ D. $(4,-1)$

3. 由方程 $x|x|+y|y|=1$ 确定的函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是 ( )

A. 奇函数 B. 偶函数

C. 增函数 D. 减函数

4. 对于 $x\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)+f(x-2)=f(x)$，则它是周期函数，这类函数的最小正周期是 ( )

A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

5. 若 $n-m$ 表示 $[m,n](m<n)$ 的区间长度，函数 $f(x)=\sqrt{a-x}+\sqrt{x}(a>0)$ 的值域区间长度为 $2(\sqrt{2}-1)$，则实数 a 的值为 ( )

A. 4 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. 1

6. 已知 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(\pi-x)$，且当 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 时，$f(x)=x+\sin x$，设 $a=f(1)$，$b=f(2)$，$c=f(3)$，则 ( )

A. $a<b<c$ B. $b<c<a$

C. $c<b<a$ D. $c<a<b$

二、填空题

7. 函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数，又 $f(0)=2007$，$g(x)=f(x-1)$ 为奇函数，则 $f(2004)=$______.

8. 关于 x 的方程 $\lg x^2-\lg(x+3)=\lg a(a>0)$ 在区间 $(3,4)$ 内有解，则 a 的范围是______.

9. $f(x)$ 和 $g(x)(g(x)\neq 0)$ 分别是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数和偶函数，当 $x<0$ 时，$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，且 $f(-2)=0$，则不等式 $\frac{f(x)}{g(x)}<0$ 的解集为______.

三、解答题

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$g(x)$ 与 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，当 $x>2$ 时，$g(x)=a(x-2)-(x-2)^3$

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极值，证明：对任意 $x_1,x_2\in(-1,1)$，不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|<4$ 恒成立.

11. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^3$

(1) $x\in[1,5]$ 时，求 $f(x)$ 的解析式；

(2)当 $A=\{x||f(x)|>a,x\in\mathbf{R}\}$，$A\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

12. 已知集合 M_D 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体：若函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对任意 $x_1,x_2\in D$ $(x_1\neq x_2)$ 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$.

(1)当 $D=(0,+\infty)$ 时，令 $f(x)=\ln x$ 是否属于 M_D，若属于 M_D，给予证明；否则说明理由；

(2)当 $D=(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$，函数 $f(x)=x^3+ax+b$ 时，若 $f(x)\in M_D$，求 a 的取值范围.

第3课时　二次函数、二次方程与二次不等式

领悟高考

以二次函数为载体把数(计算、证明)与形结合起来，把方程、不等式等知识融合起来；通过二次问题，沟通了二次函数、一元二次不等式、一元二次方程的内在联系. 因为新高考命题注重体现在知识网络交汇点设置能力试题，所以二次函数一直成为这几年高考的命题热点，在将来新高考中，对二次函数考查将仍会是命题热点.

考题1(2006年天津卷)已知函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，记 $g(x)=f(x)[f(x)+f(2)-1]$. 若 $y=g(x)$ 在区间$[\frac{1}{2},2]$上是增函数，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $[2,+\infty)$　　B. $(0,1)\cup(1,2)$

C. $[\frac{1}{2},1)$　　D. $(0,\frac{1}{2}]$

考题2(2006年陕西卷)已知函数 $f(x)=ax^2+2ax+4(0<a<3)$，若 $x_1<x_2$，$x_1+x_2=1-a$，则 (　　)

A. $f(x_1)>f(x_2)$

B. $f(x_1)<f(x_2)$

C. $f(x_1)=f(x_2)$

D. $f(x_1)$与 $f(x_2)$的大小不能确定.

考题3(2006年浙江卷)设 $f(x)=3ax^2+2bx+c$，若 $a+b+c=0$，$f(0)f(1)>0$，求证：

(1)方程 $f(x)=0$ 有实根；

(2)$-2<\frac{b}{a}<-1$；

(3)设 x_1,x_2 是方程 $f(x)=0$ 的两个实根，则$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant|x_1-x_2|<\frac{2}{3}$.

备考要点

1. 近几年高考有关二次函数试题主要分为两种类型：一种是直接考查二次函数的基本知识(给出了模型函数)；另一种通过构造二次函数把函数问题转化为二次函数问题求解(先建立模型函数，再解模).
2. 二次函数与二次方程的结合，涉及到二次方程根的分布、求变量范围及恒成立问题等内容，这里要十分注意方程与不等式转化，注意函数与方程思想运用.
3. 三次函数的导函数为二次函数，因此在新高考中，以三次函数为载体考查二次函数已成为命题热点之一，尤其是文科新高考.

典例精析

1. 二次函数的性质

例1二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，$a\in\mathbf{N}^*$，$c\geqslant1$，$a+b+c\geqslant1$，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个小于1的不等正根，则 a 的最小值为 (　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【解析】由题意得$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0,\\ f(0)=c>0,\\ f(1)=a+b+c>0,\\ 0<-\frac{b}{2a}<1.\end{cases}$

$\therefore 0<\frac{b^2}{4a^2}<1$，即 $b^2<4a^2$，

$\therefore 4ac<b^2<4a^2$，即 $a>c$，又 $a\in\mathbf{N}^*$ 且 $c\geqslant1$

$\therefore a$ 的最小值为2.　选A.

例1已知函数 $f(x)=|x^2-2ax-b|(x\in\mathbf{R})$，给出下列命题：

①$f(x)$必是偶函数；

②当 $f(0)=f(2)$时，$f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称；

③若 $a^2+b\leqslant0$，则 $f(x)$在区间$[a,+\infty)$上是增函数；

④$f(x)$有最大值$|a^2+b|$.

其中正确命题的序号是________.

【解析】①当 $a\neq0$ 时，$f(x)$为非奇非偶函数，故①不对.

②由 $f(0)=f(2)$，则$|-b|=|4-4a-b|$. 故 $a=1$ 或 $a=1-\frac{1}{2}b$. 对于后者，$b\neq0$ 时，其图象不关于 $x=1$

对称，故②不对.

③若 $a^2+b\leqslant0$，则 $\Delta=4a^2+4b\leqslant0$.

$\therefore f(x)=(x-a)^2-a^2-b$. 故③正确.

④由于 $f(x)=|(x-a)^2-a^2-b|$，

当 $x=a$ 时，$(x-a)^2-a^2-b$ 最小值为 $-a^2-b$，但不能确定 $f(x)$ 的最大值为 $|a^2+b|$，故④不对.

从而正确答案序号为③.

【点评】对每一个命题，针对参数的变化逐一研究，问题的关键是 $f(x)$ 不是二次函数，因此我们不能直接套用二次函数的性质，须具体问题具体分析.

2. 二次函数最值应用

例3 函数 $f(x)=x^2+ax+3$

(1)当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)\geqslant a$ 恒成立，求 a 的范围；

(2)当 $x\in[-2,2]$时，$f(x)\geqslant a$ 恒成立，求 a 的范围.

【解析】要使 $f(x)\geqslant a$ 恒成立$\Leftrightarrow f(x)$的最小值$\geqslant a$

(1)$f(x)\geqslant a$ 恒成立，即 $x^2+ax+3-a\geqslant0$ 恒成立.

$\because x\in\mathbf{R}$，$\therefore\Delta=a^2-4(3-a)\leqslant0$，即 $-6\leqslant a\leqslant2$.

(2)$f(x)=x^2+ax+3=(x+\frac{a}{2})^2+3-\frac{a^2}{4}$

①当 $-\frac{a}{2}<-2$ 时，即 $a>4$ 时，$f(x)_{\min}=-2a+7$

$\therefore-2a+7\geqslant a\Rightarrow a\leqslant\frac{7}{3}$，又 $a>4$，$\therefore a\in\varnothing$；

②当 $-2\leqslant-\frac{a}{2}\leqslant2$ 时，

即 $-4\leqslant a\leqslant4$ 时，$f(x)_{\min}=3-\frac{a^2}{4}$

由 $3-\frac{a^2}{4}\geqslant a\Rightarrow-6\leqslant a\leqslant2$，又 $-4\leqslant a\leqslant4$

$\therefore-4\leqslant a\leqslant2$

③$-\frac{a}{2}>2$，即 $a<-4$ 时，$f(x)_{\min}=2a+7$

$\therefore2a+7\geqslant a\Rightarrow a\geqslant-7$，又 $a<-4$

$\therefore-7\leqslant a<-4$.

综上 $a\in[-7,2]$.

【点评】正确区分 $f(x)\geqslant a$ 恒成立对①$x\in\mathbf{R}$ 和②$x\in[-2,2]$有本质上的区别.

3. 三次函数背景下的二次函数问题

例3 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(b-1)x^2+cx$($b$、$c$ 为常数)

(1)若 $f(x)$在 $x=1$ 和 $x=3$ 处取得极值，试求 b、c 的值.

(2)若 $f(x)$在$(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上递增，且在(x_1,x_2)上递减，又 $x_2-x_1>1$，求证：$b^2>2(b+2c)$.

【解析】(1)$f'(x)=x^2+(b-1)x+c$

由题意知 $x_1=1$ 和 $x_2=3$ 是方程 $x^2+(b-1)x+c=0$ 的两根.

$\therefore1-b=4$，$c=3$. $\therefore b=-3$，$c=3$

(2)$f(x)$在$(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上递增，故此时 $f'(x)>0$，又 $f(x)$在(x_1,x_2)上递减，故此时 $f'(x)<0$.

$\therefore x_1$，x_2 是 $x^2+(b-1)x+c=0$ 的两根.

$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=1-b,\\x_1x_2=c\end{cases}$

又 $x_2-x_1>1$，$\therefore(x_2+x_1)^2-4x_1x_2>1$

$\therefore(1-b)^2-4c>1\Rightarrow b^2>2(b+2c)$.

4. 三个"二次"的综合应用

例3 已知二次函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$.

(1)若方程 $f(x)=0$ 无实根，求证：$b>0$；

(2)若方程 $f(x)=0$ 有两实根，且两实根是相邻的两个整数，求证：$f(-a)=\frac{1}{4}(a^2-1)$.

(3)若方程 $f(x)=0$ 有两个非负数实根，且这两实根在相邻整数之间，证明存在整数 k，使$|f(k)|\leqslant\frac{1}{4}$.

【解析】(1)$\because$方程 $f(x)=0$ 无实根，

$\therefore\Delta=a^2-4b<0$

即 $4b>a^2\geqslant0$，$\therefore b>0$

(2)设方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根为 t 与 $t+1(t\in\mathbf{Z})$，

则$\begin{cases}a^2-4b>0 & ①\\t+(t+1)=-a & ②\\t(t+1)=b & ③\end{cases}$

由②得，$t=-\frac{1}{2}(a+1)$. 代入③得 $a^2-4b=1$

$\therefore b=\frac{1}{4}(a^2-1)$，$\therefore f(-a)=b=\frac{1}{4}(a^2-1)$

(3)设方程 $f(x)=0$ 两根分别为 α，β 且 α、$\beta\in(m,m+1)(m\in\mathbf{Z})$.

则有 $f(x)=x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$，则

$|f(m)|\cdot|f(m+1)|=|m-\alpha||m-\beta|\cdot|m+1-\alpha||m+1-\beta|\leqslant(\frac{\alpha-m+m+1-\alpha}{2})^2\cdot(\frac{\beta-m+m+1-\beta}{2})^2=(\frac{1}{2})^2\cdot(\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{4})^2$.

$\therefore$必有$|f(m)|\leqslant\frac{1}{4}$或$|f(m+1)|\leqslant\frac{1}{4}$.

故在题设条件下，取 $k=m$ 或 $m+1$，有$|f(k)|\leqslant\frac{1}{4}$成立.

规律总结

1. 求二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在闭区间上的最