華夏英才基金學術文庫

田振际 著

π逆半群的子半群格

科学出版社
www.sciencep.com

π逆半群的子半群格

科学出版社

華夏英才基金學術文庫

π逆半群的子半群格

田振际 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书在给出半群和格的基础知识和基本理论后，有选择地介绍了π逆半群(包括逆半群)的π逆子半群格方面的若干最新研究成果. 全书共分七章. 第一章介绍了格、半群、拟周期半群和逆半群的基础知识和基本理论; 第二章首先介绍了π逆半群的基本性质, 然后利用这些性质研究了具有某些类型π逆子半群格的π逆半群的特性及结构; 第三章介绍了具有某些类型全逆子半群格的逆半群; 第四章讨论了具有各种类型全子半群格和凸逆子半群格的逆半群; 第五章讨论了具有某些类型全π逆子半群格的π逆半群; 第六章讨论了π逆半群和逆半群上的若干有限性条件; 第七章介绍了逆半群的格同构. 书中近一半的内容是作者的研究成果.

本书可作为数学专业代数方向的研究生教材, 也可供相关专业教师阅读参考.

图书在版编目（CIP）数据

π逆半群的子半群格/田振际著. —北京: 科学出版社, 2007
(华夏英才基金学术文库)

ISBN 978-7-03-018485-6

Ⅰ. π… Ⅱ. 田… Ⅲ. ①半群②格 Ⅳ. O152.7 O153.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 012463 号

责任编辑: 鄢德平 赵彦超 / 责任校对: 刘亚琦
责任印制: 安春生 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

双 青 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 2 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2007 年 2 月第一次印刷 印张: 10 1/4
印数: 1—3 000 字数: 191 000

定价: 29.00 元

序

任何代数系统的研究，都可以以它的某个外部环境(诸如其子系统格)的研究作为途径而得以实现. 因此，半群的子半群格的研究是半群研究的重要途径和方法之一.

子半群格的研究，自 20 世纪 60 年代开始至今，已获蓬勃发展. 田振际博士一直从事 π 逆半群及其子半群格的研究，在该领域获得了一系列在国内外处于领先水平的研究成果. 本书是作者以及其他国内外学者在 π 逆半群(包括逆半群)的某些特殊子半群格方面的一系列研究成果的汇总和整体阐释. 书中在给出 π 逆半群、逆半群和格的基本概念之后，有选择地介绍了这一研究领域的若干最新研究成果.

无论对于半群方向研究生的培养，还是对于具有半群理论基础而有志于从事半群研究的读者而言，该书的出版是非常必要、非常适时和非常有意义的. 当前同类著作只有俄罗斯的半群专家 Shevrin 于 1990 年出版的俄文专著“Полугруппы и их подполугрупповые решетки”(该书经过修改后于 1996 年用英文再次出版，即“Semigroups and Their Subsemigroups Lattices”)，国内同类出版物尚属空白. 相信本书的出版必然会对正则和某些广义正则半群的研究起到促进作用.

郭聿琦

2006 年 7 月于西南大学

前　言

任何代数系统都和它的子系统格相对应，子系统格是对应于代数系统本身的最重要的导出对象之一．关于一个代数系统和它的某些类型的子系统格之间各种关系的研究是非常久远而广阔的研究领域．20 世纪 30 年代，相应的研究首先在群论中展开．几乎就在同时，人们又开始了域上的向量空间的子空间格的研究．目前该研究领域已经得到充分发展，并已经推广到了模与其子模格的研究以及环、代数、李代数的子系统格的研究．20 世纪 70 年代，类似的问题在格论中也已开始研究．

半群与其子半群格关系的研究真正始于 20 世纪 60 年代．1961 年，在 Ляпин 出版的专著“Полугруппы”一书中，就有两节内容是介绍子半群格的最早期的研究成果，而 Petrich 于 1977 年出版的“Lectures in Semigroups”一书中，有一章内容是关于子半群格的研究成果．20 世纪 60 年代以来，在信息科学和理论计算机科学的推动下，半群理论已经成为代数学和应用代数学中的一个十分活跃的数学分支．目前，半群理论又从非线性动力系统复杂性理论和拓扑动力学中得到了新的推动．在半群代数理论的这种强烈背景下，半群与子半群格的研究已有了蓬勃发展，可以说，这一研究领域在半群理论中一枝独秀．1990 年，世界著名的俄罗斯半群专家 Shevrin 出版的该领域迄今唯一的专著“Полугруппы и их подполугрупповые решетки”表明半群与子半群格的一般理论研究的日趋成熟(该书修改后于 1996 年用英文以书名“Semigroups and Their Subsemigroups Lattices”再次出版)，这本书系统详实地介绍了半群与子半群格这一研究领域中的一般理论和基本成果．尽管如此，由于半群与子半群格理论的迅速发展，因而有必要介绍近年来的这一领域的新成果．

作者自 1989 年以来师从著名半群专家郭聿琦教授，一直从事 π 逆半群及其特殊子半群格方面的研究，并在该领域取得了一系列有意义和在国内外有一定影响的重要成果．因此，将作者本人和国内外学者在 π 逆半群(包括逆半群)的某些特殊子半群格方面的一系列研究成果进行汇总和综合是非常必要和及时的．本书正是作者基于这一想法和理念而写．

本书在给出半群和格的基础知识和基本理论后，有选择地介绍了这一研究领域的若干最新研究成果．全书共分七章．第一章介绍了格、半群、拟周期半群、逆半群的基础知识和基本理论；第二章首先介绍了 π 逆半群的基本性质，然后利用这些性质研究了 π 逆子半群格分别是半模格、0 模格、 0 分配格、下半分配格的 π 逆半群的特性及结构，同时，还介绍了 π 子半群格是有补格、相对补格、布尔格

的 π 逆半群; 第三章介绍了具有某些类型全逆子半群格的逆半群; 第四章讨论了具有某些类型全子半群格的逆半群和半格的凸子半群格; 第五章讨论了具有某些类型全 π 逆子半群格的 π 逆半群; 第六章讨论了 π 逆半群和逆半群的若干有限性条件; 第七章介绍了逆半群的格同构.

作者认为, 本书无论是为培养半群理论方向的研究生, 还是对具有半群理论基础知识而有志于从事半群理论研究的读者而言都是非常有意义的. 同时, 在国内同类出版物尚属空白的情况下, 本书的出版必然会对 π 逆半群的理论研究起到很大的促进作用.

本书的出版得到了中央统战部华夏英才出版基金的资助, 作者表示衷心的感谢; 这里也要感谢甘肃省委统战部四处的秦耀处长和兰州理工大学统战部的李骐部长的大力支持.

作者特别衷心感谢导师郭聿琦教授多年来的教诲、培养、指导、帮助和鼓励, 本书的出版一直得到他的关心和支持; 还要感谢作为师兄、老师的中国科学技术大学的宋光天教授和西北师范大学的刘仲奎教授, 他们曾给予作者诸多帮助和支持; 作者还要感谢的是科学出版社数理编辑部的编辑, 从本书撰写的前期准备工作到最后出版的整个过程都得到了他们的指点和帮助; 我的研究生王宇同学在校稿方面做了大量细致的工作, 在此也一并表示感谢.

由于水平所限, 书中难免有出错的地方, 而且在内容的取材和章节的安排等诸多方面也或有不当之处, 敬请读者批评指正.

田振际

2006 年 8 月 30 日

目　　录

第一章　基本概念与基本理论

我们假设读者熟知格论和半群理论的基本概念和基本理论, 甚至也熟悉群论的基本结果, 这里只给出在本书中多次使用的概念和结论. 这些结论中的大部分在相关的书籍都能找到, 比如, 有关格的基本知识可以参阅文献 [1], [2], 关于半群的有关概念和结论可以参考文献 [3]~[8], 而关于半群的子半群格方面的大多数信息在文献 [9], [10] 中可以找到. 此外, 还有些在以上提及的书中没有出现和发现的, 但在本书中又需要多次使用的有关格论和半群理论中的结论, 这里都给出了证明. 有关群论的知识和结论这里不再叙述, 读者可以直接参考文献 [11], [12].

1.1　格的基本概念

设 L 是偏序集, $X \subseteq L$. 称 $a \in L$ 为 X 的下界, 如果对所有的 $x \in X$ 都有 $a \leqslant x$. 如果存在 $a \in L$, 使得 a 是 X 的下界, 且对 X 的任意下界 z 都有 $z \leqslant a$, 那么称 a 为 X 的下确界. 简单地说, X 的下确界是指 X 的最大 (如果存在的话) 下界. 对偶地, 有 X 的上界和上确界的概念. 特别地, 如果 $X = \{x, y\}$, 那么 X 的下 (上) 确界说成 x 和 y 的下 (上) 确界. 如果 x 和 y 存在下 (上) 确界, 那么将其表示为 $x \wedge y$ $(x \vee y)$.

如果偏序集 L 的任意两个元素都有下 (上) 确界, 那么称 L 是下 (上) 半格. 称 L 是格, 如果 L 的任意两个元素既有下确界, 也有上确界. 如果格 L 子集 X 也是格, 则 X 称为 L 的子格.

设 L 是格, 则容易验证, 对任意的 $x, y, z \in L$, 有

$$x \wedge x = x, \quad x \wedge y = y \wedge x, \quad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z),$$

$$x \vee x = x, \quad x \vee y = y \vee x, \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z).$$

如果格 L 的任意子集 X 都有下确界和上确界, 那么 L 称为完全格, 并分别用 $\bigwedge\limits_{x \in X} x$ 和 $\bigvee\limits_{x \in X} x$ 表示 X 的下确界和上确界.

如果 L 是格, $a, b \in L$, 且 $a \leqslant b$, 则称集合

$$[a, b] = \{x \in L : a \leqslant x \leqslant b\}$$

为 L 的区间, 显然区间 $[a, b]$ 是 L 的子格.

如果格 L 的两个元素 a,b 满足 $a \leqslant b$ 或者 $b \leqslant a$, 那么就说 a 与 b 可比较的, 并表示为 $a \lesseqgtr b$; 否则就说 a 与 b 是不可比较的, 表示为 $a \| b$. 如果格 L 的子集 X 中的任意两个元素是可比较的, 那么 X 称为 L 中的一个链. 如果 L 的任意两个元素可比较, 则 L 称为链. L 的子集 X 称为 L 中的一个反链, 如果 X 中的任意两个元素不可比较.

格 L 称为分配格, 如果对任意的 $a,b,c \in L$, 有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

定理 1.1.1　关于格 L, 下列条件等价:

(1) L 是分配格;

(2) 对任意的 $a,b,c \in L$, 则 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

(3) L 不包含图 1.1 和图 1.2 所示的子格.

格 L 称为是模格, 如果对任意的 $a,b,c \in L$, 有

$$a \leqslant b \Rightarrow b \wedge (c \vee a) = (b \wedge c) \vee a.$$

定理 1.1.2　关于格 L, 下列条件等价:

(1) L 是模格;

(2) 对任意的 $a,b,c \in L$, 则 $a \leqslant b \leqslant c \vee a \Rightarrow b = (b \wedge c) \vee a$;

(3) 对任意的 $a,b,c \in L$, 则 $a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

(4) L 不包含图 1.1 所示的子格.

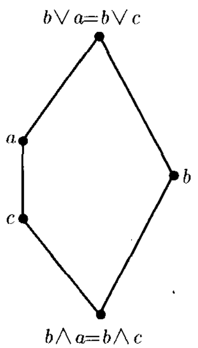

图 1.1　五边形格

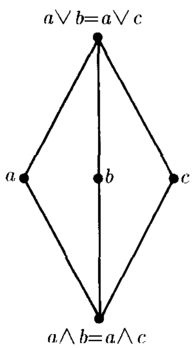

图 1.2　菱形格

设 L 是一个格, $x,y \in L$. 如果 $x < y$, 但不存在 $z \in L$, 使得 $x < z < y$, 那么称 y 覆盖 x, 写成 $y \succ x$. 格 L 称为是 (上) 半模格, 如果对任意的 $a,b \in L$, 有

$$a \succ a \wedge b \Rightarrow a \vee b \succ b.$$

任何模格一定是半模格 [1,2], 但反之则不然. 显然, 分配格一定是模格, 所以也一定是半模格, 但模格未必是分配格.

引理 1.1.3 设 X 是任意一个集合, $\varepsilon(X)$ 是 X 上所有等价关系的集合, 则 $\varepsilon(X)$ 是半模格; $\varepsilon(X)$ 是模格 (分配格) 当且仅当 $|X| \leqslant 3$ ($|X| \leqslant 2$).

完全格 L 的元素 a 称为紧致的, 如果对 L 的任何子集 $X \subseteq L$, 当 $a \leqslant \bigvee\limits_{x\in X} x$ 时, 一定存在 X 的有限子集 $Y \subseteq X$, 使得 $a \leqslant \bigvee\limits_{y\in Y} y$. 如果完全格 L 的每个元素是紧致的, 则 L 称为代数格.

格 L 称为下半分配格, 如果对任意的 $a, b, c \in L$, 有

$$a \wedge b = a \wedge c \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = a \wedge b.$$

对偶地, 可以定义上半分配格, 也即对任意的 $a, b, c \in L$, 有

$$a \vee b = a \vee c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = a \vee b.$$

下 (上) 半分配格是分配格的自然推广, 它也是人们非常感兴趣的一类格.

引理 1.1.4 如果 L 是下半分配代数格, 那么对任意的 $a, b \in L$, 集合

$$\{x \in L: \ a \wedge b = a \wedge x\}$$

一定存在最大元.

设 φ 是格 L 到格 L' 中的映射. 称 φ 是 $\wedge$ 同态 ($\vee$ 同态), 如果对任意的 $a, b \in L$, 有 $(a \wedge b)\varphi = a\varphi \wedge b\varphi$ ($(a \vee b)\varphi = a\varphi \vee b\varphi$); φ 称为 (格) 同态, 如果 φ 既是 $\wedge$ 同态, 又是 $\vee$ 同态; 如果 φ 是格同态, 并且是单射 (满射), 那么称 φ 为单同态 (满同态); 称 φ 是 (格) 同构, 如果 φ 是同态, 并且是双射. φ 称为保序的, 如果 $a \leqslant b$ 蕴涵 $a\varphi \leqslant b\varphi$.

可以证明, 任何格同态一定是保序的; φ 是格同构, 当且仅当 φ 是双射, 且 φ 和 φ 的逆映射 φ^{-1} 都是保序的.

格 L 到格 L' 中的映射 φ 称为完全 $\vee$ 同态, 如果任意的 $X \subseteq L$,

$$\Big(\bigvee_{x\in X} x\Big)\varphi = \bigvee_{x\in X} (x\varphi).$$

对偶地, 可定义完全 $\wedge$ 同态. 完全格同态是指既是完全 $\wedge$ 同态, 也是完全 $\vee$ 同态.

引理 1.1.5 设 L 是完全下半分配格, $\phi: L \to M$ 是满同态, 且 ϕ 是完全 $\vee$ 同态, 那么 M 是下半分配格.

证明 对每个 $m \in M$, 令 m' 表示集合

$$m\phi^{-1} = \{x \in L: \ x\phi = m\}$$

的最大元 (事实上, 因为 ϕ 是完全 $\vee$ 同态, 所以 $m' = \bigvee\{x : x \in m\phi^{-1}\}$). 如果设 $m, n \in M$ 且 $m \leqslant n$, 那么

$$(m' \vee n')\phi = m'\phi \vee n'\phi = m \vee n = n.$$

由此 $m' \vee n' \leqslant n'$, 即 $m' \leqslant n'$. 现在任取 $m, n \in M$, 则 $(m \wedge n)' \leqslant m'$, $(m \wedge n)' \leqslant n'$, 从而 $(m \wedge n)' \leqslant m' \wedge n'$. 另一方面, 因为

$$(m' \wedge n')\phi = m'\phi \wedge n'\phi = m \wedge n,$$

因此, $(m \wedge n)' \geqslant m' \wedge n'$. 这样就有 $(m \wedge n)' = m' \wedge n'$.

任取 $m, n, r \in M$, 且 $m \wedge n = m \wedge r$. 那么 $m' \wedge n' = m' \wedge r'$, 于是由 L 的下半分配性可得 $m' \wedge (n' \vee r') = m' \wedge n'$. 于是有 $m \wedge (n \vee r) = m \wedge n$, 从而证明了 M 是下半分配格. ■

引理 1.1.6 如果格 L 中存在满足 $a \wedge b = a \wedge c$, $b \vee a = b \vee c$, 且 $a \| b$ 的元素 a, b, c, 那么 L 既不是下半分配格, 也不是上半分配格.

证明 事实上, 假设 a, b, c 满足引理的条件, 那么

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee a) = a \neq a \wedge b,$$

$$b \vee (a \wedge c) = b \vee (a \wedge b) = b \neq b \vee a.$$

这说明 L 既不是下半分配格, 也不是上半分配格. ■

定理 1.1.7 设 L 是模格, 则下列条件等价:

(1) L 是分配格;

(2) L 是下半分配格;

(3) L 是上半分配格.

证明 设 L 是下半分配格或是上半分配格, 但 S 不是分配格, 那么 L 一定包含图 1.2 所示的子格 (因为 L 是模格), 这也就是说 L 包含满足 $a \wedge b = a \wedge c$, $b \vee a = b \vee c$, 且 $a \| b$ 的元素 a, b, c. 于是根据引理 1.1.6, L 既不是下半分配格, 也不是上半分配格, 矛盾. ■

设 L 是有最小元 0 和最大元 1 的格, 称 L 为可补格, 如果对任意的 $a \in L$, 存在 $b \in L$, 使得

$$a \wedge b = 0, \quad a \vee b = 1.$$

满足上述等式的 b 通常叫做 a 的补元. 格 L 称为相对可补格, 如果对任意的 $a, b \in L$, 当 $a \leqslant b$ 时, 区间子格 $[a, b]$ 是可补格. 一个分配的可补格称为布尔格.

一族格 $L_i\ (i\in I)$ 的直积 $\prod\limits_{i\in I} L_i$ 是指满足 $i\alpha\in L_i$ 的所有映射 $\alpha: I\to\bigcup\limits_{i\in I} L_i$ 构成的集合, 且对任意 $\alpha,\beta\in\prod\limits_{i\in I} L_i$ 以及 $i\in I$, 如下定义 $\alpha\wedge\beta$ 和 $\alpha\vee\beta$:

$$i(\alpha\wedge\beta)=i\alpha\wedge i\beta,$$

$$i(\alpha\vee\beta)=i\alpha\vee i\beta.$$

设 L 是格 $L_i\ (i\in I)$ 的直积. L 的子格 C 称为 $L_i\ (i\in I)$ 的子直积, 如果对任意的 $i\in I$ 以及 $x_i\in L_i$, 存在 $\alpha\in C$, 使得 $i\alpha=x_i$.

格 L 上的等价关系 θ 称为同余, 如果对任意的 $a,b,c,d\in L$, $a\theta b$, $c\theta d$ 蕴涵 $(a\wedge c)\theta(b\wedge d)$, $(a\vee c)\theta(b\vee d)$.

引理 1.1.8 设 $\theta_i\ (i\in I)$ 是格 L 上的一族同余, 且 $\bigwedge\limits_{i\in I}\theta_i=0$. 那么 L 同构于 $L/\theta_i\ (i\in I)$ 的子直积.

1.2 逆半群及性质

设 S 为任一半群, A 为 S 的子集. 用 $\langle A\rangle$ 表示 S 的由 A 所生成的子半群; 用 E_A 表示 A 中的所有幂等元的集合, 在 E_A 上可以定义自然偏序 "$\leqslant$":

$$e\leqslant f\Leftrightarrow ef=fe=e.$$

如果 $ef=fe=e$, 但 $e\neq f$, 则记为 $e<f$. A 的非零幂等元 e 称为本原的, 如果对任意的 $f\in E_A$, $f\leqslant e$ 蕴涵 $e=f$. A 中的元素 a 称为 A 的群元, 如果 a 包含在 A 的某个子群中, 用 $\mathrm{Gr}A$ 表示 A 中的所有群元的集合. 若 $e\in E_S$, 则用 G_e 表示 S 中的包含 e 的极大子群.

半群 S 上的等价关系 θ 称为右 (左) 同余, 如果 $a\theta b$, 则对任意的 $x\in S$ 都有 $ax\theta bx$ $(xa\theta xb)$. θ 称为同余, 如果 $a\theta b$, $c\theta d$, 则 $ac\theta bd$. 等价关系 θ 是同余, 当且仅当 θ 既是左同余, 也是右同余.

半群 S 的子集合 I 称为 S 的理想, 如果对任意的 $x\in I$ 和 $s\in S$, 总有 $xs, sx\in I$. 设 I 是半群 S 的理想, Rees 商半群 S/I 实际是 S 模同余 $\rho_I=(I\times I)\cup 1_S$ 的商半群 S/ρ_I. 对任意 $a,b\in S\backslash I$, 如果定义运算 "$\cdot$" 如下:

$$a\cdot b=\begin{cases} ab, & \text{如果 } ab\notin I,\\ 0, & \text{如果 } ab\in I,\end{cases}$$

那么 $S/I\cong(S\backslash I)\cup\{0\}$. 于是可以认为, 对任意 $a\in S$, 若 $a\notin I$, 则 $a\rho_I=a$, 若 $a\in I$, 则 $a\rho_I=0$.

半群 S 上的 Green 关系是如下定义的等价关系 $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{J}$:

$$a\mathcal{L}b \Leftrightarrow S^1a = S^1b,$$

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1,$$

$$a\mathcal{J}b \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1,$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R},$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}.$$

易见

$$a\mathcal{L}b \Leftrightarrow \text{存在 } x, y \in S^1, \text{使得 } a = xb,\ b = ya,$$

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \text{存在 } x, y \in S^1, \text{使得 } a = bx,\ b = ay,$$

$$a\mathcal{J}b \Leftrightarrow \text{存在 } x, y, u, v \in S^1, \text{使得 } a = xby,\ b = uav.$$

由此可以证明, $\mathcal{D} = \mathcal{L}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}\mathcal{R}$ 表示等价关系的合成); $\mathcal{L}$ 是 S 上的右同余, $\mathcal{R}$ 是 S 上的左同余; $\mathcal{L}$ 类 ($\mathcal{R}$ 类) 中的幂等元是其中元素的右 (左) 单位元. 以后, 分别用 L_a (R_a, H_a, D_a, J_a) 表示 S 的元素 a 所在的 $\mathcal{L}$ 类 ($\mathcal{R}$ 类, $\mathcal{H}$ 类, $\mathcal{D}$ 类, $\mathcal{J}$ 类), 用 $S/\mathcal{L}$ ($S/\mathcal{R}$, $S/\mathcal{H}$, $S/\mathcal{D}$, $S/\mathcal{J}$) 表示所有 $\mathcal{L}$ 类 ($\mathcal{R}$ 类, $\mathcal{H}$ 类, $\mathcal{D}$ 类, $\mathcal{J}$ 类) 的集合.

半群 S 称为单半群, 如果 S 不包含不同于 S 的理想. 有零半群 $S = S^0$ 称为 0 单半群, 如果 S 不包含不同于 S 和 $\{0\}$ 的理想, 且 $S^2 \neq \{0\}$. 显然, 半群 S 是单半群, 则 S 只有一个 $\mathcal{J}$ 类; S 是 0 单半群, 则 S 只有两个 $\mathcal{J}$ 类 $S\backslash\{0\}$ 和 $\{0\}$. (0) 单半群 S 称为完全 (0) 单的, 如果 S 中存在一个本原幂等元 (事实上是所有非零幂等元都是本元的).

定理 1.2.1 逆半群 S 是 (0) 单半群, 当且仅当对任意的 $e, f \in E_S$, 存在 $g \in E_S$, 使得

$$g \leqslant f, \quad \text{且} g\mathcal{D}e.$$

由两个元素 a, b 生成的满足 $ab = 1$ 的半群 $\mathcal{B}(a, b)$ 称为双循环半群.

定理 1.2.2 设 S 是 0 单半群, 那么 S 不是完全 0 单半群的充分必要条件是 S 包含一个双循环子半群.

半群 S 的元素 a 称为正则的, 如果存在 $x \in S$, 使得 $axa = a$. 如果 x 同时满足 $xax = a$, 那么 x 称为 a 的逆元. 显然, 如果 x 和 a 是逆元, 则 a 也是 x 的逆元, 即它们互为逆元. S 的元素 a 的所有逆元的集合表示为 $V(a)$, 即

$$V(a) = \{x \in S\ :\ axa = a,\ xax = a\}.$$

如果 A 是 S 的子集, 那么用 Reg A 表示 A 中的所有正则元的集合, 即

$$\mathrm{Reg}A=\{a\in A:\ 存在\ x\in A,\ 使得\ axa=a\}.$$

设 D_a 是半群 S 的一个 $\mathcal{D}$ 类. 如果 a 是正则的, 则 D_a 中每个元素都是正则的 [5], 并且 $V(a)\subseteq D_a$. 所以我们把包含一个正则元的 $\mathcal{D}$ 类称为 S 正则 $\mathcal{D}$ 类.

引理 1.2.3 设 S 为任意一个半群, $x\in \mathrm{Reg}S$, 且

$$x=x_1x_2\cdots x_n,\quad x_1,x_2,\cdots,x_n\in S,$$

则存在 $e_1,e_2,\cdots,e_n\in E_S$, 使得

(1) $x=(e_1x_1)(e_2x_2)\cdots(e_nx_n)$;

(2) $x\mathcal{D}e_ix_i$, e_ix_i 是正则的, 其中 $i=1,2,\cdots,n$;

(3) $X_n'e_nX_{n-1}'e_{n-1}\cdots X_1'e_1$ 是 x 的逆元, 其中 $X_i=e_ix_i$, x' 表示 x 的逆元, 而 X_i' 表示 X_i 的逆元, $i=1,2\cdots,n$.

证明 (1) 设 x' 为 x 逆元. 令 $e_1=x_1x_2\cdots x_nx'$, 并记

$$e_i=x_ix_{i+1}\cdots x_nx'x_1x_2\cdots x_{i-1},\quad i=2,3,\cdots,n,$$

$X_i=e_ix_i$. 那么

$$\begin{aligned}(e_1x_1)(e_2x_2)\cdots(e_nx_n)&=(x_1\cdots x_nx'x_1)(x_2\cdots x_nx'x_1x_2)\cdots(x_nx'x_1\cdots x_n)\\&=x_1x_2\cdots x_nx'x_1x_2\cdots x_n\\&=x_1x_2\cdots x_n\\&=x.\end{aligned}$$

(2) 对任意一个 X_i, 有

$$x=(xx'X_1\cdots X_i)X_{i+1}\cdots X_n,$$

$$X_i=x_ix_{i+1}\cdots x_nx'(xx'X_1\cdots X_i).$$

所以 $x\mathcal{R}xx'X_1\cdots X_i$, $xx'X_1\cdots X_i\mathcal{L}X_i$, 即 $x\mathcal{D}X_i$. 这证明了 X_i 包含在 x 所在的正则 $\mathcal{D}$ 类中, 从而 $X_i=e_ix_i$ 是正则的.

(3) 直接验证即可证明. ■

半群 S 称为正则半群, 如果 S 的每个元素是正则的. 易见, 正则半群的每个 $\mathcal{L}$ 类 ($\mathcal{R}$ 类) 都至少包含一个幂等元, 因此, 它的每个 $\mathcal{D}$ 类都是正则 $\mathcal{D}$ 类.

引理 1.2.4 设 S 为正则半群, $a,b\in S$, $e,f\in E_S$, 那么

(1) $a\mathcal{R}b$ 当且仅当存在 $a' \in V(a)$ 以及 $b' \in V(b)$, 使得 $aa' = bb'$;

(2) $a\mathcal{L}b$ 当且仅当存在 $a' \in V(a)$ 以及 $b' \in V(b)$, 使得 $a'a = b'b$;

(3) $e\mathcal{D}f$ 当且仅当存在 $a \in S$ 以及 $a' \in V(a)$, 使得 $aa' = e, a'a = f$.

一个正则半群称为逆半群, 如果 S 的每个元素有唯一的逆元. 逆半群 S 的元素 a 的唯一逆元通常表示为 a^{-1}.

定理 1.2.5　设 S 为正则半群, 则下列条件等价:

(1) S 是逆半群;

(2) E_S 是半格;

(3) S 的每个 $\mathcal{L}$ 类和 $\mathcal{R}$ 类包含且仅包含一个幂等元.

设 S 为逆半群, $a, b \in S$, 则容易验证, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. 事实上, 有更一般的结论, 即对任意的 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in S$, 有

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1}a_{n-1}^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

特别地, $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$. 因此, 用 a^{-n} 表示 $(a^n)^{-1}$.

在逆半群 S 中, 定义自然偏序关系如下:

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a = aa^{-1}b.$$

自然, $a < b$ 表示 $a \leqslant b$ 但 $a \neq b$. 显然, 如果 $e, f \in E_S$, 那么 $e \leqslant f \Leftrightarrow e = ef$.

设 A 是逆半群 S 的子集, 我们用 $\mathrm{inv}\langle A\rangle$ 表示由 A 生成的 S 的逆子半群.

引理 1.2.6　设 S 为逆半群, $a, x \in S$, $e \in E_S$, 且 $x = ae$, 那么存在 $f \in E_S$, 使得 $x = ae = fa$. 进而 $xx^{-1} \leqslant f$, $x = xx^{-1}a$, 且 $xx^{-1} \leqslant aa^{-1}$.

证明　事实上, 令 $f = aea^{-1}$, 则

$$x = ae = a(a^{-1}a)e = (aea^{-1})a = fa.$$

此时

$$xx^{-1}f = x(a^{-1}f)f = x(a^{-1}f) = xx^{-1},$$

所以 $xx^{-1} \leqslant f$, 从而 $x = xx^{-1}a$. 最后, 又因为

$$xx^{-1}aa^{-1} = x(a^{-1}f)aa^{-1} = xa^{-1}(faa^{-1}) = xa^{-1}aa^{-1}f = xa^{-1}f = xx^{-1},$$

所以 $xx^{-1} \leqslant aa^{-1}$. ■

下面的引理是非常有用的.

引理 1.2.7　设 S 为逆半群, $x \in S$.

(1) 如果 $a \in \langle E_S, x\rangle \backslash E_S$, 那么存在 $k \in Z^+$, 使得 $a = aa^{-1}x^k$, 且 $aa^{-1} \leqslant xx^{-1}$;