高等学校试用教材

高等数学

上册

·生物专业用·

华南师范大学数学系《高等数学》编写组 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

高等数学

（生物专业用）

上　册

华南师范大学数学系《高等数学》编写组　编

内 容 提 要

本书根据1980年高等师范院校生物系《高等数学》课程教学大纲而编写，可供师范院校生物系各专业作试用教材。

本书分上、下两册出版，上册为微积分，下册为数理统计。上册内容包括函数、极限、一元和多元微积分及其应用、级数和常微分方程等。

高等学校试用教材

高 等 数 学

（生物专业用）

上 册

华南师范大学数学系《高等数学》编写组 编

•

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

国营五二三厂印装

•

开本 850×1168 1/32 印张9.75 字数244 000

1987年9月第1版 1987年9月第1次印刷

印数 00 001—5 130

书号 13010·01355 定价 1.95 元

前　　言

本书根据1980年高等师范院校生物系《高等数学》课程教学大纲而编写。适用于师范院校生物系各专业。

本书主要由微积分和数理统计两部分组成。前者以一元微积分为重点；后者以统计推断、方差分析为重点，结合介绍生物科学常用的试验设计及回归分析。

此书着重对基础知识的阐述及基本原理、方法的运用，不追求内容的全面和理论上的严谨，适当注意联系生物学的实际。

我们设想讲授此书约需130至140学时。其中微积分部分需90至100学时，数理统计部分需40学时，可按实际情况增减。

本书的定理、公式和图表等均按节编号。如（1.2.3）式表示第一章第二节第三式。书中有些内容标有星号，不学这些内容，不影响全书的连贯性及系统。

本书结构及体例由编写组同志集体讨论商定，由汤尚勇、苏天视、胡男、古华民和张金华等同志编写，初稿完成后，又根据一些兄弟院校的意见和我们近两年的实践，进一步修改定稿。

在编写过程中得到北京师范大学、华东师范大学和北京师范学院等兄弟院校大力帮助。1981年他们对编写大纲进行了讨论，以后又对教材初稿作详细审阅，并提出宝贵意见。在此，我们对上述兄弟院校表示衷心的感谢。

由于水平所限，此书一定存在不少缺点和错误，恳请读者批评、指正。

编者

目　录

第一部分 微 积 分

第一章 变量与函数

微积分是研究变量的数学。函数概念是现实世界中变量相依关系在数学中的反映，函数是微积分的研究对象。本章主要讲三方面内容：一、函数的基本知识；二、极限理论——研究函数的基础；三、函数的连续性。

§1.1 变量与函数

1.1.1 变 量

我们在观察自然现象，或进行科学研究时，总会碰到量的概念。例如，长度、面积、体积、重量、速度、温度、湿度和力等都是量。

在我们研究的过程中，有两种不同的量，一是在整个过程中取相同数值的量，叫做常量（也称常数），另一是在研究过程中取不同数值的量，叫做变量（也称变数）。例如火车在两站间行驶，乘客的数目，行李的重量等就是常量，而火车与两站的距离，燃料的储存量等就是变量。应注意某一量是常量还是变量是对某一过程而言的。例如，火车到站是这个过程的结束，在这个过程中，乘客数目是常量，到站后，乘客数目就要改变了。火车停在站上，假如不增加燃料，在停车这段时间，燃料就不是变量而

是常量了。在数学中常用 x、y、z 等表示变量，a、b、c 等表示常量。但要注意，任何一个字母本身并没有指明这个量是常量还是变量，因此当我们利用字母表示量时，一般应说明它代表的是常量还是变量。

本书所谈的量均取实数值，因而可用数轴上的点表示。如果 x 是常量，则可用数轴上一个定点来表示；如果 x 是变量，那么在过程中它取不同的值，在数轴上用不同的点表示。因此，我们可以说变量 x 在数轴上是用动点表示的。

变量所取的值的全体叫做**变域**。常见的变域就是**区间**，区间有下列几种（下面均设 a、b 为实数，$a<b$）：

1．开区间． 满足不等式 $a<x<b$ 的实数全体叫做**开区间**，记作 (a, b)；

2．闭区间． 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数全体叫做**闭区间**，记作 $[a, b]$；

3．半开区间．满足不等式

$$a<x\leqslant b \quad 或 \quad a\leqslant x<b$$

的实数全体叫做**半开区间**，前者称为**左半开区间**，后者称为**右半开区间**，分别用 $(a, b]$，$[a, b)$ 表示。

开区间在数轴上用 a，b 两点之间的所有点表示，即用不包

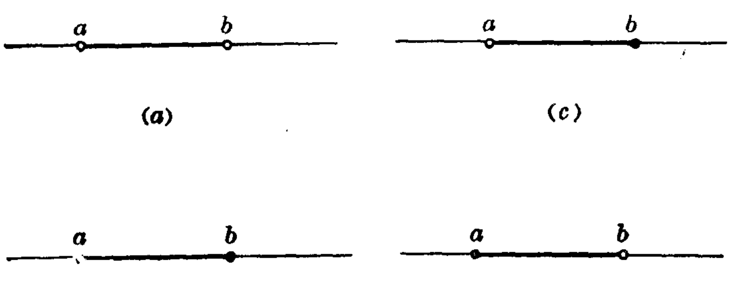

图 1.1.1

括端点的线段来表示（图 1.1.1(a)，图中 a,b 点用空心点“∘”

表示区间不包括 a 和 b 点）．

闭区间 $[a, b]$ 在数轴上用 a，b 为端点的线段来表示（端点包括在线段内）（图 1.1.1(*b*)，图中 a，b 用实心点“•”表示区间包括 a，b 点）．

同样，左半开区间 $(a, b]$ 和右半开区间 $[a, b)$ 在数轴上的表示法分别如图 1.1.1(*c*) 和 图1.1.1(*d*)所示．

此外，全体实数，即满足不等式 $-\infty<x<+\infty$ 的实数 x（“$-\infty$”读作负无穷大，“$+\infty$”读作正无穷大）用符号 $(-\infty,+\infty)$ 表示．注意，“∞”不是数，$(-\infty,+\infty)$ 只是表示所有实数的意思，而 $[-\infty,+\infty]$，$[-\infty,+\infty)$ 或 $(-\infty,+\infty]$ 一般是没有意义的．

类似地有：

$[a,+\infty)$ 表示满足 $a\leqslant x<+\infty$ 的全体实数 x．

$(a,+\infty)$ 表示满足 $a<x<+\infty$ 的全体实数 x．

$(-\infty,b]$ 表示满足 $-\infty<x\leqslant b$ 的全体实数 x．

$(-\infty,b)$ 表示满足 $-\infty<x<b$ 的全体实数 x．

这类区间统称为**无穷区间**．它们在数轴上的表示法，例如，$(-\infty,+\infty)$ 可用整条数轴表示（图1.1.2(*a*)），$(a,+\infty)$ 可用数轴上 a 点右边的部分表示（不包括 a 点，图 1.1.2 (*b*)），$[a,+\infty)$ 可用数轴上 a 点及 a 点右边的部分表示（图1.1.2(*c*)），其余依此类推．

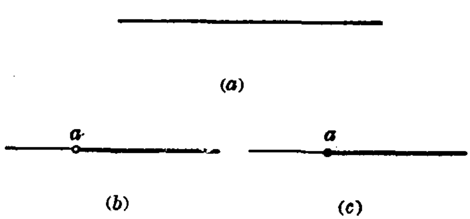

图 1.1.2

为了表示 x 是区间 (a,b)（或 $[a,b)$，$[a,b)$ 等）的点，常写为 $x\in(a,b)$．

我们要注意，在数学里常把常量看成取相同数值的变量，在

这种观点下，常量就是变量的一种特殊情况。这样，在处理问题上有方便之处。

1.1.2 函　数

在同一过程中所出现的几个变量，通常彼此间有某种关系。先看几个例子。

例 1　圆面积 S 和它的半径 r 有关，其关系为 $S=\pi r^2$。

例 2　从静止位置自由落下的物体其下落的距离 s 和下落时间 t 都是变量，它们有如下依赖关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度。

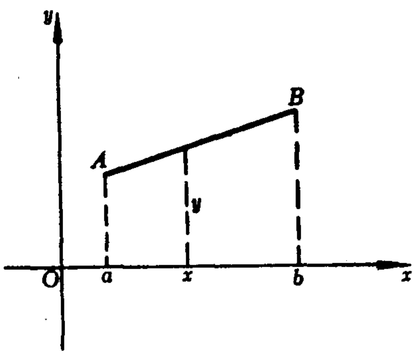

图 1.1.3

例 3　如图 1.1.3 的一段线段 AB，其上的任一点的纵坐标 y 与横坐标 x 有关，只要知道横坐标 x 的值，便可量出纵坐标 y 的值。

例 4　水稻亩产量与施肥量有关系。

前三个例子中只要分别知道 r，t 或 x 的值，便可唯一确定另一个变量的值。而例 4 则不同，即使知道施肥量，亩产量仍不能确定。在微积分里只研究如前三例那种确定性关系。把这些例子所反映的变量之间的关系抽象概括后就得到函数的概念。

定义 1　设在某一过程中有两个变量 x 和 y，x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个值 x，依某种规律，y 都有唯一的值与它对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，x 称为**自变量**，y 称为**因变**

量.

于是可说例 1 中 S 是 r 的函数，例 2 中 s 是 t 的函数，例 3 中 y 是 x 的函数。

对上述定义作如下说明：

1. 对应规律及函数的记号.在函数定义中,对应规律是一个重要因素。如在例 1 中 r 与 S 的对应规律就由公式 $S=\pi r^2$ 表示，即对每一 r 值有一个 πr^2 值与它对应。

在定义中要特别注意"对于每一个值 x，y 都有唯一的值与它对应"一语，它只要求每一 x 值有一个 y 与之对应，并不要求不同的 x 对应不同的 y，特别，对每一 x 值，对应的 y 都取同一值 c，即 $y=c$（常数）也是函数，称为常量函数。

对于 y 是 x 的函数，常用符号 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=y(x)$，$y=F(x)$，…等表示,其中不同的字母 f,g,y，F，…等表示不同的函数。在同一问题中不同的函数要用不同的记号来表示，以免混淆。例如研究圆时，其面积及周长均是半径 x 的函数，于是要分别用不同符号表示：$f(x)=\pi x^2$，$g(x)=2\pi x$。

函数 $y=f(x)$，当 $x=a$ 时，相应的函数值记为 $f(a)$，对于用式子表示的函数，例如

$$f(x)=3x^2+2x+3,$$

这里 $f(x)$ 就表示了对每一 x 值，作运算 $3x^2+2x+3$，便得到相应的函数值。所以当 $x=2$ 时

$$f(2)=3\cdot2^2+2\cdot2+3=19,$$

当 $x=a$ 时，

$$f(a)=3a^2+2a+3,$$

当 $x=a^2$ 时，

$$\begin{aligned}f(a^2)&=3(a^2)^2+2(a^2)+3\\&=3a^4+2a^2+3.\end{aligned}$$

2. 函数的定义域和值域

在函数定义中，自变量的变域 D 称为函数的**定义域**。对于 D 中每一个值 x，都对应一个确定的函数值，函数值的全体就叫做函数的**值域**。

要决定一个函数，除了给定对应关系外，还要明确它的定义域。在实际问题中，函数的定义域是根据它的实际意义来确定的。

例 5 圆面积 S 与它的半径 r 的关系为

$$S=\pi r^2.$$

由于半径不可能是负值，故此函数定义域为 $[0,+\infty)$。

例 6 酵母在紫外线杀伤后，活酵母细胞数 n_t 的衰减可用下式来近似描述：

$$n_t=ae^{-bt},$$

其中 t 为时间，a,b 为常数。

由于 t 是紫外线照射时间，所以 t 取值范围为 $[0,+\infty)$，故此函数定义域为 $[0,+\infty)$。

通常如果一个函数是由一个式子给出，既没有特别指出定义域，又没有附带什么实际意义，那么所指的定义域就是使得该式子有意义的全体自变量值。

例 7 指出函数

$$y=\sqrt{4-x^2}$$

的定义域。

解 当 $4-x^2\geqslant 0$ 时，此式有意义，由此得 $-2\leqslant x\leqslant 2$。故此函数定义域为 $[-2,2]$，或写为 $-2\leqslant x\leqslant 2$。

例 8 指出 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域。

解 上式中分母为 $\sqrt{1-x^2}$，故 $1-x^2>0$ 时，函数才有意义，故知定义域为 $(-1,1)$。

例 9 式子 $y=\sqrt{-x}+\lg x$，右边第一项只有当 $x\leqslant 0$ 时才有

意义，而第二项又要求 $x>0$，因而没有实数 x 使此式有意义，故此式不能定义一个函数。

要注意函数的定义域不一定是区间。例如在中学已见过的函数

$$f(n)=\frac{1}{n}\ (n\text{ 为自然数}),$$

它的定义域是自然数集，把其函数值依次写出就得到一个数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots.$$

对于一个函数，我们可以在坐标平面上作出它的图形，这点在中学已学习过，在此只作简短的说明。

设 $y=f(x)$ 是一个给定的函数，定义域是 D。又在平面上取定一直角坐标系，设其横轴为 x轴，纵轴为 y 轴。D 中任一值 x相应的函数值为$f(x)$，则 $(x,f(x))$ 便是坐标平面上的一点。所有这些点的集合就称为函数 $y=f(x)$的图象（图1.1.4）。

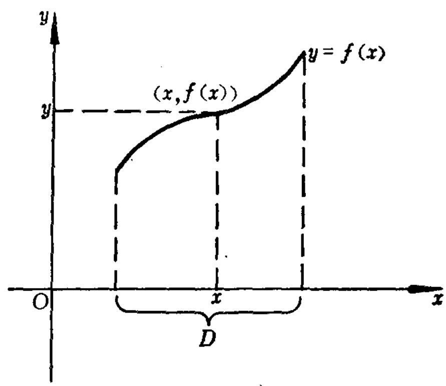

图 1.1.4

一般说来 $f(x)$的图象是一条曲线。过 D 内任一点平行于 y 轴的直线均与此曲线交于一点。把此曲线铅直投影到 x 轴上便得到函数定义域 D。

函数的图象建立了微积分的研究对象（函数）与几何的研究对象（曲线）之间的密切关系，从函数的图象可直观地看出函数的某些特征，对理解微积分的概念、方法和结论都十分重要。反过来，在研究曲线的性质时，我们又可以利用微积分的方法。

1.1.3 函数的表示法

函数的表示法就是表示函数对应关系的方法。常用的表示法有三种：

1. 解析法 就是用解析式子表示函数关系，例如，

$$S=\pi r^2,\qquad s=\frac{1}{2}gt^2,\qquad y=\frac{1}{1+x^2}$$

等都是用解析法表示的函数。

要注意解析法不一定只有一个式子，它可以用几个式子表示一个函数。例如，

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{当 } x\leqslant 0,\\ x+1, & \text{当 } x>0,\end{cases}$$

便是用两个式子给定的一个函数，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，当 x 在 $(-\infty,0]$ 中取值时，函数值按公式 $y=x^2$ 计算；当 x 在 $(0,+\infty)$ 中取值时，函数值按 $y=x+1$ 计算，它的图象见图 1.1.5 .

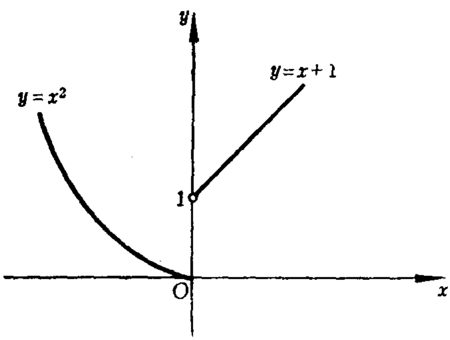

图 1.1.5

用几个式子表示一个函数是有实际意义的，在生物学科中也常会遇到。例如，某植物种植密度为 x，产量为 y，我们发现，当 $0<x<a$ 时有关系

$$y=K_1x^{-3/2}\ (a,\ K_1\ \text{为常数}),$$

当 $a\leqslant x<b$ 时，有关系

$$y=K_2x^{-1}\ (b,\ K_2\ \text{为常数}).$$

于是这种植物的种植密度与产量的关系可表示为

$$y=\begin{cases}K_1x^{-\frac{3}{2}}, & 0<x<a,\\ K_2x^{-1}, & a\leqslant x<b.\end{cases}$$

（参看 D·梅钦著《生物数学入门》①第 31 页。）

2. 图象表示法 就是用坐标平面上的曲线来表示函数（不是先有一函数后作其图象）。这种表示法在物理、工程、气象、生物等方面经常使用。例如，在气温自动记录计上，把某天内的气温 T 与时间 t 的关系描绘如图 1.1.6，它就反映出 T 与 t 的函数关系，当 t 取某值 t_0，从图上就找出相应的 T_0 值。

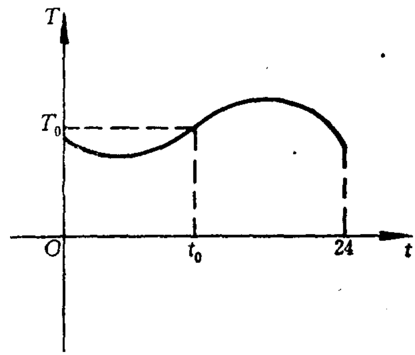

图 1.1.6

3. 列表法 就是把自变量的取值与其对应的函数值列成表格。大家熟知的对数表，三角函数表就是这方面的例子。

1.1.4 几种特殊类型的函数

我们经常要研究函数的一些特殊性质，就是单调性，有界性，奇偶性和周期性。

1. 单调函数 我们常会见到一个函数 $y=f(x)$ 随 x 的增加其函数值也增加或随 x 增加其函数值减少。这种函数就称为单调函数。下面给出确切的定义。

定义 2 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 内的函数，对 D 内任意二数 x_1 和 x_2，如果当 $x_1<x_2$ 时，有

① ［英］David Machin，马斌荣译，刘曾复校，人民卫生出版社出版，1979 年 7 月第一版。