

高等学校试用教材

● 高等数学

上册

· 生物专业用 ·

华南师范大学数学系《高等数学》编写组 编



高等教育出版社

013
93

高等学校试用教材

高等数学

(生物专业用)

上 册

华南师范大学数学系《高等数学》编写组 编

内 容 提 要

本书根据 1980 年高等师范院校生物系《高等数学》课程教学大纲而编写,可供师范院校生物系各专业作试用教材。

本书分上、下两册出版,上册为微积分,下册为数理统计。上册内容包括函数、极限、一元和多元微积分及其应用、级数和常微分方程等。

高等学校试用教材

高 等 数 学

(生物专业用)

上 册

华南师范大学数学系《高等数学》编写组 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

国营五二三厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 9.75 字数 244 000

1987 年 9 月第 1 版 1987 年 9 月第 1 次印刷

印数 00 001—5 130

书号 13010·01355 定价 1.95 元

前 言

本书根据1980年高等师范院校生物系《高等数学》课程教学大纲而编写。适用于师范院校生物系各专业。

本书主要由微积分和数理统计两部分组成。前者以一元微积分为重点；后者以统计推断、方差分析为重点，结合介绍生物科学常用的试验设计及回归分析。

此书着重对基础知识的阐述及基本原理、方法的运用，不追求内容的全面和理论上的严谨，适当注意联系生物学的实际。

我们设想讲授此书约需130至140学时。其中微积分部分需90至100学时，数理统计部分需40学时，可按实际情况增减。

本书的定理、公式和图表等均按节编号。如(1.2.3)式表示第一章第二节第三式。书中有些内容标有星号，不学这些内容，不影响全书的连贯性及系统。

本书结构及体例由编写组同志集体讨论商定，由汤尚勇、苏天视、胡男、古华民和张金华等同志编写，初稿完成后，又根据一些兄弟院校的意见和我们近两年的实践，进一步修改定稿。

在编写过程中得到北京师范大学、华东师范大学和北京师范学院等兄弟院校大力帮助。1981年他们对编写大纲进行了讨论，以后又对教材初稿作详细审阅，并提出宝贵意见。在此，我们对上述兄弟院校表示衷心的感谢。

由于水平所限，此书一定存在不少缺点和错误，恳请读者批评、指正。

编者

目 录

第一部分 微积分	(1)
第一章 变量与函数	(1)
§ 1.1 变量与函数	(1)
1.1.1 变量	(1)
1.1.2 函数	(4)
1.1.3 函数的表示法	(8)
1.1.4 几种特殊类型的函数	(9)
1.1.5 反函数	(14)
1.1.6 复合函数	(15)
1.1.7 基本初等函数	(16)
§ 1.2 极限与连续	(25)
1.2.1 数列极限	(26)
1.2.2 函数极限	(30)
1.2.3 无穷小量与无穷大量	(33)
1.2.4 极限四则运算	(37)
1.2.5 判断极限存在的两个定理	(41)
1.2.6 两个重要的极限	(42)
1.2.7 函数的连续性	(44)
1.2.8 闭区间上连续函数的性质	(47)
第一章小结	(48)
习 题	(51)
第二章 一元微分学	(55)
§ 2.1 导数	(55)
2.1.1 导数的基本概念	(55)
2.1.2 导数运算的法则	(61)
2.1.3 反函数及复合函数求导数	(65)

2.1.4 基本初等函数的导数	(68)
2.1.5 高阶导数	(71)
§ 2.2 导数的应用	(72)
2.2.1 动植物的繁殖生长	(72)
2.2.2 函数的增减性	(74)
2.2.3 极值	(77)
2.2.4 函数作图	(84)
2.2.5 未定式的定值法	(93)
§ 2.3 微分	(96)
2.3.1 微分的概念	(96)
2.3.2 微分在近似计算中的应用	(98)
2.3.3 微分运算公式及法则	(100)
2.3.4 高阶微分	(102)
第二章小结	(104)
习 题	(105)
第三章 一元积分学	(112)
§ 3.1 不定积分	(112)
3.1.1 不定积分的概念	(112)
3.1.2 一些基本的积分方法	(116)
3.1.3 常见函数的积分法	(124)
3.1.4 积分表的使用法	(133)
§ 3.2 定积分	(135)
3.2.1 定积分的概念	(135)
3.2.2 定积分与不定积分之间的联系 ——牛顿-莱布尼兹公式	(138)
3.2.3 定积分性质	(141)
3.2.4 定积分的计算	(143)
3.2.5 定积分的近似计算	(146)
§ 3.3 广义积分	(150)
3.3.1 无限区间上的积分	(150)
3.3.2 无界函数的积分	(153)

§ 3.4 定积分的应用	(155)
3.4.1 求平面图形的面积	(156)
3.4.2 求旋转体体积	(158)
3.4.3 变力作功	(159)
3.4.4 函数平均值及其在分析生物生长中的应用	(161)
第三章小结	(164)
习 题	(168)
第四章 常微分方程	(172)
§ 4.1 基本概念	(172)
§ 4.2 一阶微分方程	(176)
4.2.1 可分离变量微分方程	(176)
4.2.2 一阶线性微分方程	(179)
* § 4.3 二阶线性常系数微分方程	(183)
4.3.1 二阶线性常系数齐次微分方程	(183)
4.3.2 二阶线性常系数非齐次微分方程	(187)
第四章小结	(192)
习 题	(193)
第五章 无穷级数	(196)
§ 5.1 无穷级数的定义	(196)
§ 5.2 数项级数	(198)
5.2.1 级数收敛与发散的概念	(198)
5.2.2 级数收敛的必要条件	(200)
5.2.3 绝对收敛与比值判别法	(203)
§ 5.3 幂级数	(205)
§ 5.4 初等函数的幂级数展式	(210)
5.4.1 初等函数展开为台劳级数	(210)
5.4.2 台劳级数在近似计算中的应用	(215)
第五章小结	(218)
习 题	(220)
第六章 多元微积分	(223)
§ 6.1 空间直角坐标系	(223)

6.1.1	空间直角坐标系	(223)
6.1.2	曲面方程与曲线方程	(227)
6.1.3	空间的平面与直线	(229)
6.1.4	二次曲面	(234)
§ 6.2	多元微分法	(237)
6.2.1	多元函数的概念	(237)
6.2.2	二元函数的极限与连续	(238)
6.2.3	偏导数	(240)
6.2.4	全微分	(244)
6.2.5	复合函数及隐函数求导	(247)
6.2.6	二元函数极值的必要条件	(252)
§ 6.3	二重积分	(255)
6.3.1	二重积分的概念	(255)
6.3.2	二重积分的计算	(257)
第六章小结		(264)
习 题		(267)
附录 I	简单积分表	(274)
附录 II	行列式和矩阵	(283)

第一部分 微 积 分

第一章 变量与函数

微积分是研究变量的数学。函数概念是现实世界中变量相依关系在数学中的反映，函数是微积分的研究对象。本章主要讲三方面内容：一、函数的基本知识；二、极限理论——研究函数的基础；三、函数的连续性。

§ 1.1 变量与函数

1.1.1 变 量

我们在观察自然现象，或进行科学研究时，总会碰到量的概念。例如，长度、面积、体积、重量、速度、温度、湿度和力等都是量。

在我们研究的过程中，有两种不同的量，一是在整个过程中取相同数值的量，叫做常量（也称常数），另一是在研究过程中取不同数值的量，叫做变量（也称变数）。例如火车在两站间行驶，乘客的数目，行李的重量等就是常量，而火车与两站的距离，燃料的储存量等就是变量。应注意某一量是常量还是变量是对某一过程而言的。例如，火车到站是这个过程的结束，在这个过程中，乘客数目是常量，到站后，乘客数目就要改变了。火车停在站上，假如不增加燃料，在停车这段时间，燃料就不是变量而

是常量了。在数学中常用 x, y, z 等表示变量, a, b, c 等表示常量。但要注意, 任何一个字母本身并没有指明这个量是常量还是变量, 因此当我们利用字母表示量时, 一般应说明它代表的是常量还是变量。

本书所谈的量均取实数值, 因而可用数轴上的点表示。如果 x 是常量, 则可用数轴上一个定点来表示; 如果 x 是变量, 那么在过程中它取不同的值, 在数轴上用不同的点表示。因此, 我们可以说变量 x 在数轴上是用动点表示的。

变量所取的值的全体叫做**变域**。常见的变域就是**区间**, 区间有下列几种 (下面均设 a, b 为实数, $a < b$) :

1. 开区间。满足不等式 $a < x < b$ 的实数全体叫做**开区间**, 记作 (a, b) ;

2. 闭区间。满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的实数全体叫做**闭区间**, 记作 $[a, b]$;

3. 半开区间。满足不等式
 $a < x \leq b$ 或 $a \leq x < b$

的实数全体叫做**半开区间**, 前者称为**左半开区间**, 后者称为**右半开区间**, 分别用 $(a, b]$, $[a, b)$ 表示。

开区间在数轴上用 a, b 两点之间的所有点表示, 即用不包

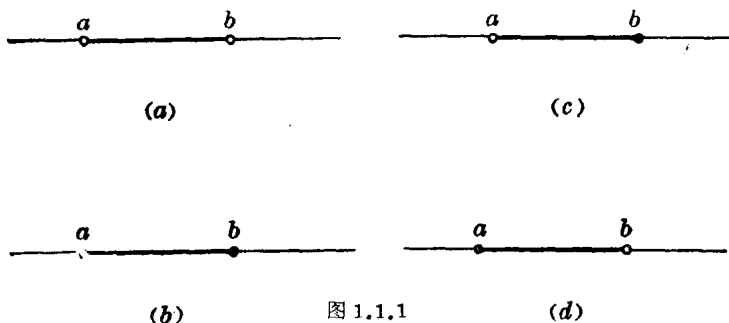


图 1.1.1

括端点的线段来表示 (图 1.1.1(a), 图中 a, b 点用空心点“ $\circ$ ”

表示区间不包括 a 和 b 点)。

闭区间 $[a, b]$ 在数轴上用 a, b 为端点的线段来表示 (端点包括在线段内) (图 1.1.1(b), 图中 a, b 用实心点 “ $\cdot$ ” 表示区间包括 a, b 点)。

同样, 左半开区间 $(a, b]$ 和右半开区间 $[a, b)$ 在数轴上的表示法分别如图 1.1.1(c) 和 图 1.1.1(d) 所示。

此外, 全体实数, 即满足不等式 $-\infty < x < +\infty$ 的实数 x (“ $-\infty$ ” 读作负无穷大, “ $+\infty$ ” 读作正无穷大) 用符号 $(-\infty, +\infty)$ 表示。注意, “ ∞ ” 不是数, $(-\infty, +\infty)$ 只是表示所有实数的意思, 而 $[-\infty, +\infty]$, $[-\infty, +\infty)$ 或 $(-\infty, +\infty]$ 一般是没有意义的。

类似地有:

$[a, +\infty)$ 表示满足 $a \leq x < +\infty$ 的全体实数 x 。

$(a, +\infty)$ 表示满足 $a < x < +\infty$ 的全体实数 x 。

$(-\infty, b]$ 表示满足 $-\infty < x \leq b$ 的全体实数 x 。

$(-\infty, b)$ 表示满足 $-\infty < x < b$ 的全体实数 x 。

这类区间统称为**无穷区间**。它们在数轴上的表示法, 例如,

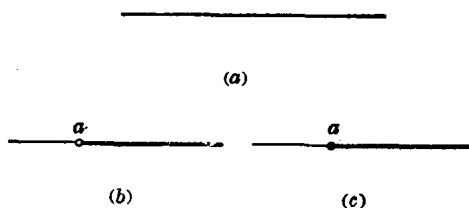


图 1.1.2

$(-\infty, +\infty)$ 可用整条数轴表示 (图 1.1.2(a)),

$(a, +\infty)$ 可用数轴上 a 点右边的部分表示 (不包括 a 点, 图 1.1.2(b)),

$[a, +\infty)$ 可用数轴上 a 点及 a 点右边的部分表示

(图 1.1.2(c)), 其余依此类推。

为了表示 x 是区间 (a, b) (或 $[a, b)$, $[a, b]$ 等) 的点, 常写为 $x \in (a, b)$ 。

我们要注意, 在数学里常把常量看成取相同数值的变量, 在

这种观点下，常量就是变量的一种特殊情况。这样，在处理问题上方便之处。

1.1.2 函 数

在同一过程中所出现的几个变量，通常彼此间有某种关系。先看几个例子。

例 1 圆面积 S 和它的半径 r 有关，其关系为 $S = \pi r^2$ 。

例 2 从静止位置自由落下的物体其下落的距离 s 和下落时间 t 都是变量，它们有如下依赖关系

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度。

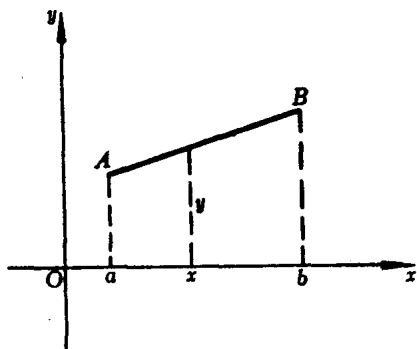


图 1.1.3

例 3 如图 1.1.3 的一段线段 AB ，其上的任一点的纵坐标 y 与横坐标 x 有关，只要知道横坐标 x 的值，便可量出纵坐标 y 的值。

例 4 水稻亩产量与施肥量有关系。

前三个例子中只要分别知道 r 、 t 或 x 的值，便可唯一确定另一个变量的值。而例 4 则不同，即使知道施肥量，亩产量仍不能确定。在微积分里只研究如前三例那种确定性关系。把这些例子所反映的变量之间的关系抽象概括后就得到函数的概念。

定义 1 设在某一过程中有两个变量 x 和 y ， x 的变域为 D ，如果对于 D 中的每一个值 x ，依某种规律， y 都有唯一的值与它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数， x 称为自变量， y 称为因变

量.

于是可说例 1 中 S 是 r 的函数, 例 2 中 s 是 t 的函数, 例 3 中 y 是 x 的函数.

对上述定义作如下说明:

1. 对应规律及函数的记号. 在函数定义中, 对应规律是一个重要因素. 如在例 1 中 r 与 S 的对应规律就由公式 $S = \pi r^2$ 表示, 即对每一 r 值有一个 πr^2 值与它对应.

在定义中要特别注意“对于每一个值 x , y 都有唯一的值与它对应”一语, 它只要求每一 x 值有一个 y 与之对应, 并不要求不同的 x 对应不同的 y , 特别, 对每一 x 值, 对应的 y 都取同一值 c , 即 $y = c$ (常数) 也是函数, 称为常量函数.

对于 y 是 x 的函数, 常用符号 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = y(x)$, $y = F(x)$, $\dots$ 等表示, 其中不同的字母 $f, g, y, F, \dots$ 等表示不同的函数. 在同一问题中不同的函数要用不同的记号来表示, 以免混淆. 例如研究圆时, 其面积及周长均是半径 x 的函数, 于是分别用不同符号表示: $f(x) = \pi x^2$, $g(x) = 2\pi x$.

函数 $y = f(x)$, 当 $x = a$ 时, 相应的函数值记为 $f(a)$, 对于用式子表示的函数, 例如

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 3,$$

这里 $f(x)$ 就表示了对每一 x 值, 作运算 $3x^2 + 2x + 3$, 便得到相应的函数值. 所以当 $x = 2$ 时

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = 19,$$

当 $x = a$ 时,

$$f(a) = 3a^2 + 2a + 3,$$

当 $x = a^2$ 时,

$$\begin{aligned} f(a^2) &= 3(a^2)^2 + 2(a^2) + 3 \\ &= 3a^4 + 2a^2 + 3. \end{aligned}$$

2. 函数的定义域和值域

在函数定义中，自变量的变域 D 称为函数的**定义域**。对于 $\bar{D}$ 中每一个值 x ，都对应一个确定的函数值，函数值的全体就叫做函数的**值域**。

要决定一个函数，除了给定对应关系外，还要明确它的定义域。在实际问题中，函数的定义域是根据它的实际意义来确定的。

例5 圆面积 S 与它的半径 r 的关系为

$$S = \pi r^2.$$

由于半径不可能是负值，故此函数定义域为 $[0, +\infty)$ 。

例6 酵母在紫外线杀伤后，活酵母细胞数 n_t 的衰减可用下式来近似描述：

$$n_t = ae^{-bt},$$

其中 t 为时间， a, b 为常数。

由于 t 是紫外线照射时间，所以 t 取值范围为 $[0, +\infty)$ ，故此函数定义域为 $[0, +\infty)$ 。

通常如果一个函数是由一个式子给出，既没有特别指出定义域，又没有附带什么实际意义，那么所指的定义域就是使得该式子有意义的全体自变量值。

例7 指出函数

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

的定义域。

解 当 $4 - x^2 \geq 0$ 时，此式有意义，由此得 $-2 \leq x \leq 2$ 。故此函数定义域为 $[-2, 2]$ ，或写为 $-2 \leq x \leq 2$ 。

例8 指出 $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ 的定义域。

解 上式中分母为 $\sqrt{1 - x^2}$ ，故 $1 - x^2 > 0$ 时，函数才有意义，故知定义域为 $(-1, 1)$ 。

例9 式子 $y = \sqrt{-x} + \lg x$ ，右边第一项只有当 $x \leq 0$ 时才有

意义，而第二项又要求 $x > 0$ ，因而没有实数 x 使此式有意义，故此式不能定义一个函数。

要注意函数的定义域不一定是区间。例如在中学已见过的函数

$$f(n) = \frac{1}{n} \quad (n \text{ 为自然数}),$$

它的定义域是自然数集，把其函数值依次写出就得到一个数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

对于一个函数，我们可以在坐标平面上作出它的图形，这点在中学已学习过，在此只作简短的说明。

设 $y = f(x)$ 是一个给定的函数，定义域是 D 。又在平面上取定一直角坐标系，设其横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴。 D 中任一值 x 相应的函数值为 $f(x)$ ，则 $(x, f(x))$ 便是坐标平面上的一点。所有这些点的集合就称为函数 $y = f(x)$ 的图象（图1.1.4）。

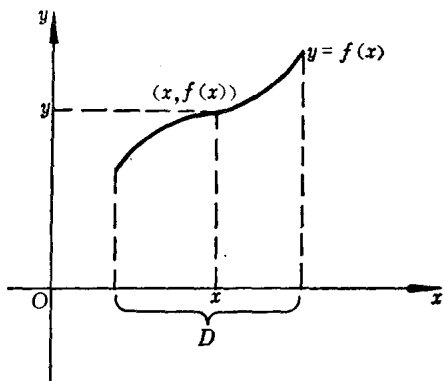


图 1.1.4

一般说来 $f(x)$ 的图象是一条曲线。过 D 内任一点平行于 y 轴的直线均与此曲线交于一点。把此曲线铅直投影到 x 轴上便得到函数定义域 D 。

函数的图象建立了微积分的研究对象（函数）与几何的研究对象（曲线）之间的密切关系，从函数的图象可直观地看出函数的某些特征，对理解微积分的概念、方法和结论都十分重要。反过来，在研究曲线的性质时，我们又可以利用微积分的方法。

1.1.3 函数的表示法

函数的表示法就是表示函数对应关系的方法。常用的表示法有三种：

1. **解析法** 就是用解析式子表示函数关系，例如，

$$S = \pi r^2, \quad s = \frac{1}{2}gt^2, \quad y = \frac{1}{1+x^2}$$

等都是用解析法表示的函数。

要注意解析法不一定只有一个式子，它可以用几个式子表示一个函数。例如，

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{当 } x \leq 0, \\ x+1, & \text{当 } x > 0, \end{cases}$$

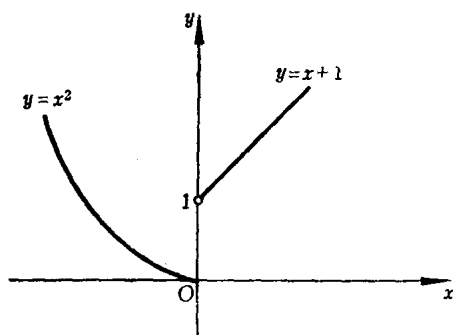


图 1.1.5

便是用两个式子给定的一个函数，它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ ，当 x 在 $(-\infty, 0]$ 中取值时，函数值按公式 $y = x^2$ 计算；当 x 在 $(0, +\infty)$ 中取值时，函数值按 $y = x + 1$ 计算，它的图象见图 1.1.5。

用几个式子表示一个函数是有实际意义的，在生物学科中也常会遇到。例如，某植物种植密度为 x ，产量为 y ，我们发现，当 $0 < x < a$ 时有关系

$$y = K_1 x^{-3/2} \quad (a, K_1 \text{ 为常数}),$$

当 $a \leq x < b$ 时，有关系

$$y = K_2 x^{-1} \quad (b, K_2 \text{ 为常数}).$$

于是这种植物的种植密度与产量的关系可表示为

$$y = \begin{cases} K_1 x^{-\frac{1}{2}}, & 0 < x < a, \\ K_2 x^{-1}, & a \leq x < b. \end{cases}$$

(参看 D·梅钦著《生物数学入门》①第 31 页.)

2. 图象表示法 就是用坐标平面上的曲线来表示函数 (不是先有一函数后作其图象). 这种表示法在物理、工程、气象、生物等方面经常使用. 例如, 在气温自动记录计上, 把某天内的气温 T 与时间 t 的关系描绘如图 1.1.6, 它就反映出 T 与 t 的函数关系, 当 t 取某值 t_0 , 从图上就找出相应的 T_0 值.

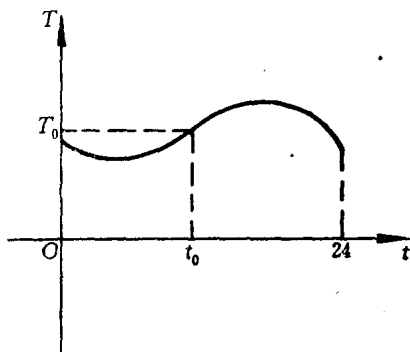


图 1.1.6

3. 列表法 就是把自变量的取值与其对应的函数值列成表格. 大家熟知的对数表, 三角函数表就是这方面的例子.

1.1.4 几种特殊类型的函数

我们经常要研究函数的一些特殊性质, 就是单调性, 有界性, 奇偶性和周期性.

1. 单调函数 我们常会见到一个函数 $y=f(x)$ 随 x 的增加其函数值也增加或随 x 增加其函数值减少. 这种函数就称为单调函数. 下面给出确切的定义.

定义 2 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 内的函数, 对 D 内任意二数 x_1 和 x_2 , 如果当 $x_1 < x_2$ 时, 有

① [英] David Machin, 马斌荣译, 刘曾复校, 人民卫生出版社出版, 1979 年 7 月第一版.