新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

罗承忠 编著

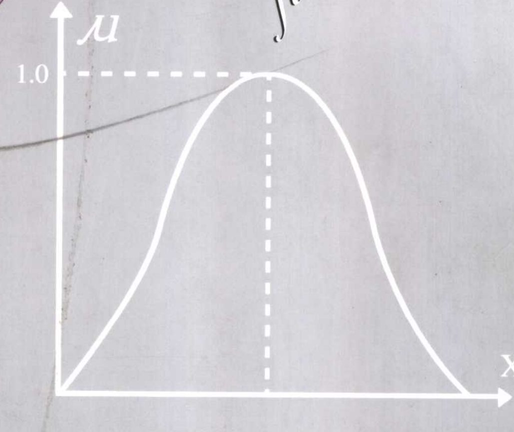
北京师范大学数学科学学院 组编

模糊集引论

MOHU JI YINLUN

（下 册）

fuzzy set



fuzzy set

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

（下 册）

北京师范大学数学科学学院 组编

模糊集引论

MOHUJI YINLUN

罗承忠 编著

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS
北 京

图书在版编目（CIP）数据

模糊集引论. 下册/罗承忠编著. —2版. —北京：北京师范大学出版社，2007.2
（数学及应用数学专业主干课程系列教材）
新世纪高等学校教材
ISBN 978—7—303—02079—9

Ⅰ.模…　Ⅱ.罗…　Ⅲ.模糊集—高等学校—教材　Ⅳ.0159

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第013704号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
出版人：赖德胜
印　刷：唐山市润丰印务有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170 mm×230 mm
印　张：19.25
字　数：345千字
印　数：1～3 000
版　次：2007年2月第2版
印　次：2007年2月第1次印刷
定　价：27.00元

责任编辑：岳昌庆　　美术编辑：贾　刚
责任校对：李　菡　　责任印制：董本刚

联系本书编辑部：1kb@bnup.com.cn
编辑部电话：010－58806185　58807762　58800827
发行部电话：010－58800013

内容简介

本书是在汪培庄先生《模糊集合论及其应用》基础上,参考国内外的有关著作,结合作者的教学实践而总结编写的.全书共分上、下两册.下册包括:模糊系统、模糊概率与模糊信息、L - 模糊集、可能性测度与 Fuzzy 积分、Fuzzy 测度与积分、Fuzzy 拓扑、Fuzzy 群与 Fuzzy 范畴、因素空间、落影理论与真值流推理共八章内容.每章后面都配备了一定的习题,最后一章介绍了汪培庄先生20 世纪 90 年代初提出的三个理论及北京师范大学在这方面的研究工作,包括模糊推理机和专家系统.

本书是模糊数学的基础教材,可供高等学校有关专业选用,下册可作为研究生基础课教材,同时也可供模糊数学工作者及有关科技工作者参考.

北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于1922年,其前身为1915年创建的北京高等师范学校数理部,1983年成立了数学与数学教育研究所,2004年成立了数学科学学院.学院现有教师71人,其中教授32名(博士生导师27名),副教授21名;有博士学位的教师占90%.特别地,有中国科学院院士2名,国家杰出青年基金获得者4人,教育部长江学者奖励计划特聘教授4人和讲座教授1人,入选新世纪百千万人才工程国家级人选2人,入选教育部跨/新世纪人才培养计划7人.

数学科学学院1981年获基础数学、概率论与数理统计学博士学位授予权,1986年获应用数学博士学位授予权,1988年,基础数学、概率论与数理统计学被评为国家级重点学科,1990年建立了北京师范大学第一个博士后流动站,1996年,数学学科成为国家211工程重点建设的学科,1997年成为国家基础科学人才培养基金基地,1998年获数学一级学科博士授予权,2001年概率论方向被评为国家自然科学基金创新群体,2002年概率论与数理统计学再次被评为国家级重点学科,2005年进入"985工程"科技创新基础建设平台,2006年国家教育部数学与复杂系统重点实验室已经通过专家论证,目前正在建设中.学院还有基础数学、计算数学、概率论与数理统计学、应用数学、课程与教学论(数学)、科学技术史(数学)、计算机软件与理论、控制理论与控制工程8个硕士点.学院下设数学系、统计与金融数学系,有数学与应用数学、统计学2个本科专业;有分析、代数、几何、方程、概率论、数理统计、计算数学、应用数学、数学教育与数学史9个教研室和《数学通报》杂志编辑部.数学与数学教育研究所有随机数学、生物信息、模糊系统与模糊信息处理、统计数据分析、数学现代分析、科学计算、动力系统7个研究中心,有复杂系统实时控制、数据统计与分析2个实验室.

90多年来,数学科学学院已毕业全日制本科生6317人.20多年来,已毕业博士研究生168人,硕士研究生740人.据不完全统计,在博士毕业生中:有2人当选为中国科学院院士,5人获国家杰出青年基金,4人获国家自然科学奖,3人获国家级有突出贡献的中青年专家称号,2人入选新世纪百千万人才工程国家级人选,2人入选教育部优秀青年教师资助计划,6人入选教育部跨/新世纪人才培养计划,1人入选全国百篇优秀博士学位论文.(李仲来执笔)

2007－02－02

第二版前言

1915 年北京高等师范学校成立数理部，1922 年成立数学系. 2005 年适逢数理部诞辰 90 周年，也是北京师范大学数学科学学院建院 1 周年. 经过 90 年的风风雨雨，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验. 将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1980 年，北京师范大学出版社成立，给教材的出版提供了一个很好的契机. 我院教师编著的数十种教材已先后在这里出版. 除了北京师范大学现代数学丛书外，就大学教材而言，共有五种版本. 第一种是列出编委会的高等学校教学用书，这是在 20 世纪 80 年代初期，由北京师范大学出版社王文湧先生约请北京师范大学数学与数学教育研究所所长严士健教授等组成编委会，研究编写出版一套数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材. 在出版社的大力支持下，这一计划完全实现，满足了当时教学的需要. 第二种是标注高等学校教学用书，但未列编委会的教材. 第三种是(北京师范大学)面向 21 世纪课程教材. 第四种是北京师范大学现代数学课程教材. 第五种是未标注高等学校教学用书，但实际上是高等学校教学用书. 在这些教材中，除再次印刷外，已经有五部教材进行了修订或出版了第二版.

前一段时间，王建华老师和王琦老师分别搜集了我院本科生的所有教材和研究生 12 门基础课教材的使用情况，李仲来教授汇总了我院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作，由李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商，准备对数学科学学院教师目前使用或誊印(出版社已经没有存书的教材)的北京师范大学出版社出版的部分教材进行修订后再版. 计划用几年时间，出版数学和应用数学、数学教育、数学学科硕士研究生三个系列的主要课程教材.

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2005 年 8 月 8 日

第一版编者的话

《模糊集引论》是在汪培庄先生《模糊集合论及其应用》(上海科技出版社)基础上,参考 D. Dubois、H. Prede《Fuzzy Sets and Systems》及浅居喜代治等《模糊系统理论入门》赵汝怀译(北京师范大学出版社),结合作者的教学实践总结编写的. 本书采用“集合套”观点来解释模糊集,因而使一些概念直观易懂,同时使理论严密系统,便于与经典数学联系,具有适合教学的特点.

本书是模糊数学基础教材,可用作大专院校有关专业基础课或选课教材(适当选择部分章节),也可用作研究生基础课教材,还可供模糊数学工作者及有关科技工作者参考. 上册前六章是基础知识,七、八、九章及下册十、十一章介绍了模糊规划、模糊逻辑、模糊控制、模糊系统、模糊概率与信息等联系实际的内容. 下册十二至十六章给出 L－模糊集、可能性测度与 Fuzzy 积分、Fuzzy 测度与积分、Fuzzy 拓扑、Fuzzy 群与 Fuzzy 范畴等理论基础,可列入数学专业研究生课程,其中 Fuzzy 测度与积分主要参考王震源先生的科研成果,Fuzzy 拓扑参考了蒲保明、刘应明先生的工作,十七章的因素空间、落影理论与真值流推理是汪培庄先生 20 世纪 90 年代初提出的三个基本理论,它为知识表示技术、模糊信息处理与机器智能提供新的数学方法,该章介绍了北京师范大学 20 世纪 90 年代初在这三个方面的研究工作,其中包括模糊推理机和专家系统.

由于作者水平所限,书中一定存在不少缺点,恳请批评指正.

本书出版得到国家教委博士点基金与国家自然科学基金资助. 得到中国管理科学院模糊信息与决策研究所的支持. 得到曾文艺、于福生、向勇、刘增良、高家富等同志的帮助. 作者特向他们表示衷心的感谢.

罗承忠

1992 年 12 月

目 录

第十章　模糊系统

§1　普通系统

系统理论是一个新兴的数学分支，它对客观世界提供了一个相当广泛的描述框架. 研究事物，总可以将被研究的对象同与它有联系的对象分离，称被研究的对象为一个系统，称外界施于系统的影响为输入，称系统传递给外界的信息或影响为输出. 现代系统论中，用状态空间的概念描述系统，一个系统可用状态变量、输入、输出以及它们之间的关系来表示.

一些小系统可以耦合成大系统，一个复杂系统可以分解为一些子系统，对大系统来说，子系统之间的输入、输出变成了自己状态的内容.

设 X 为状态空间，U 为输入集，Y 为输出集(如图 10.1). 从输入信息至输出信息的过程可以分解为两个步骤：

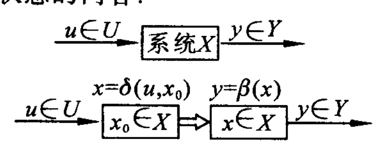


图　10.1

1)向系统输入 $u\in U$，系统状态由 x_0 转移为 x；

2)系统状态 x 向外界输出信息 $y\in Y$. 两个步骤各自用状态转移函数 δ 与输出函数 β 来描述.

定义 10.1　一个普通的决定性系统是一个组合

$$\tau=(X,U,Y,\delta,\beta),$$
$$\delta: U\times X\rightarrow X,\quad \beta: X\rightarrow Y.$$

称 X 为状态空间，U 为输入集，Y 为输出集，δ 为状态转移函数，β 为输出函数，$\beta\circ\delta$ 为响应映射.

$$(\beta\circ\delta)(u,x_0)=\beta(\delta(u,x_0)).$$

定义 10.2　给出一个决定性系统 $\tau=(X,U,Y,\delta,\beta)$.

1)若固定 x_0(初始状态)，对 $\forall x\in X$，$\exists u\in U$，使得 $\delta(u,x_0)=x$，则称系

统对 x_0 是可控的.

2)若 β 是单射,则称系统是可观测的.

所谓可控,指的是通过外界输入可以使状态转移到我们所希望的状态;所谓可观测,指的是由输出可唯一确定系统所处的状态.

一些系统,$\delta(u,x_0)$,$\beta(x)$不是唯一值,而是在一定范围内,这种系统称为非决定性系统.

定义 10.3　一个普通的非决定性系统指的是一个组合

$$\tau=(X,U,Y,\delta,\beta),$$

$$\delta:U\times X\to\mathscr{P}(X),\quad \beta:X\to\mathscr{P}(Y),$$

其中 $\delta(u,x_0)\in\mathscr{P}(X)$,而 $\beta(\delta(u,x_0))$按扩展原理得到.

如果初始状态及信息输入也是集合,那么定义 10.1 和 10.3 可扩张为如下的抽象系统:

定义 10.4　一个抽象系统指的是一个组合

$$\tau_a=(X,U,Y,\delta,\beta),$$

$$\delta:\mathscr{P}(U)\times\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X),\quad \beta:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y).$$

转移映射 δ 和输出映射 β 是集合变换.

抽象系统也可记为 $\tau_a=(\mathscr{P}(X),\mathscr{P}(U),\mathscr{P}(Y),\delta,\beta)$.

给出决定性系统 $\tau=(X,U,Y,\delta,\beta)$,利用扩展原理(经典),$\delta,\beta$ 分别诱导

$$\delta:\mathscr{P}(U)\times\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X),\quad \beta:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y).$$

从而诱导一个抽象系统 $\tau_a=(\mathscr{P}(X),\mathscr{P}(U),\mathscr{P}(Y),\delta,\beta)$,对 $\xi_0\in\mathscr{P}(X)$,$\mu\in\mathscr{P}(U)$,$\delta(\mu,\xi_0)$,$\beta(\xi)$的特征函数为

$$\begin{aligned}\xi(x)&=\delta(\mu,\xi_0)(x)=\bigvee_{\delta(u,x_0)=x}(\mu(u)\wedge\xi_0(x)),\\ \eta(y)&=\beta(\xi)(y)=\bigvee_{\beta(x)=y}\xi(x)\\ &=\bigvee_{\beta(x)=y}\bigvee_{\delta(u,x_0)=x}(\mu(u)\wedge\xi_0(x)).\end{aligned}\tag{10.1}$$

给出非决定性系统 $\tau=(X,U,Y,\delta,\beta)$,利用扩展原理(经典)(见第五章§4).由集值映射 δ,β 分别诱导出集合变换

$$\delta:\mathscr{P}(U)\times\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X),\quad \beta:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y),$$

对 $\xi_0\in\mathscr{P}(X)$,$\mu\in\mathscr{P}(U)$,

$$\begin{aligned}&\delta(\mu,\xi_0)=(\mu\times\xi_0)\circ\boldsymbol{R}_\delta=\xi\in\mathscr{P}(X),\\ &\beta(\xi)=\xi\circ\boldsymbol{R}_\beta\in\mathscr{P}(Y),\end{aligned}\tag{10.2}$$

关系 $\boldsymbol{R}_\delta\in\mathscr{P}(U\times X\times X)$与 $\boldsymbol{R}_\beta\in\mathscr{P}(X\times Y)$是集值映射 δ 与 β 的图象,它们的

特征函数

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{\delta}(u, x_0, x) &= \delta(u, x_0)(x)(=\chi_{\delta(u, x_0)}(x)), \\ \boldsymbol{R}_{\beta}(x, y) &= \beta(x)(y)(=\chi_{\beta(x)}(y)), \end{aligned} \tag{10.3}$$

$\xi=\delta(\mu, \xi_0)$及$\beta(\xi)$的特征函数为

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \bigvee_{u \in U} \bigvee_{x_0 \in X} (\mu(u) \wedge \xi_0(x_0) \wedge \boldsymbol{R}_{\delta}(u, x_0, x)) \\ &= \bigvee_{u \in U} \bigvee_{x_0 \in X} (\mu(u) \wedge \xi_0(x_0) \wedge \delta(u, x_0)(x)), \\ \beta(\xi)(y) &= \bigvee_{x \in X} (\xi(x) \wedge \boldsymbol{R}_{\beta}(x, y)) \\ &= \bigvee_{x \in X} \bigvee_{u \in U} \bigvee_{x_0 \in X} (\mu(u) \wedge \xi_0(x_0) \wedge \delta(u, x_0)(x) \wedge \beta(x)(y)), \end{aligned} \tag{10.4}$$

于是,系统$\tau=(X, U, Y, \delta, \beta)$诱导一个抽象系统$\tau_a=(\mathscr{P}(X), \mathscr{P}(U), \mathscr{P}(Y), \delta, \beta)$.

§2 模 糊 系 统

复杂的系统往往伴随着模糊性，尤其是和人有某种联系的系统，如人机系统、管理系统、经济系统、社会系统等．可用模糊集来表现模糊性的系统．它可以看作抽象系统的扩张，将抽象系统中 X, U, Y 的子集换为模糊子集．

定义 10.5 一个模糊系统指的是一个组合

$$\tau_f=(\mathscr{F}(X),\mathscr{F}(U),\mathscr{F}(Y),\delta,\beta),$$
$$\delta:\mathscr{F}(U)\times\mathscr{F}(X)\rightarrow\mathscr{F}(X),\quad \beta:\mathscr{F}(X)\rightarrow\mathscr{F}(Y),$$

X 为状态空间，$\xi\in\mathscr{F}(X)$ 为模糊状态；U 为输入集，$\mu\in\mathscr{F}(U)$ 为模糊输入；Y 为输出集，$\eta\in\mathscr{F}(Y)$ 为模糊输出；δ 为模糊转移变换，β 为模糊输出变换，$\beta\circ\delta$ 为模糊响应变换．

当连续输入 n 个信息 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\in\mathscr{F}(U)$ 时，如果初始状态为 $\xi_0\in\mathscr{F}(X)$，那么系统状态转移到 $\xi\in\mathscr{F}(X)$，我们有

$$\delta(\mu_1,\xi_0)=\xi_1,\delta(\mu_2,\xi_1)=\xi_2,\cdots,\delta(\mu_n,\xi_{n-1})=\xi,\tag{10.5}$$

如果把 $\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}$ 看作一个输入串 $\lambda^*=\mu_1\cdot\mu_2\cdot\cdots\cdot\mu_n$，记 $\Lambda=\varnothing$，令 $\{\mathscr{F}(U)\}^*$ 是全体输入串的集合，在 $\{\mathscr{F}(U)\}^*$ 中定义运算“$\bullet$”

$$\begin{aligned}&\lambda_1^*=\mu_1\cdot\mu_2\cdot\cdots\cdot\mu_{n_1},\quad \lambda_2^*=\mu'_1\cdot\mu'_2\cdot\cdots\cdot\mu'_{n_2},\\&\lambda_1^*\bullet\lambda_2^*=\mu_1\cdot\mu_2\cdot\cdots\cdot\mu_{n_1}\cdot\mu'_1\cdot\mu'_2\cdot\cdots\cdot\mu'_{n_2},\end{aligned}\tag{10.6}$$

显然 $\{\mathscr{F}(U)\}^*$ 构成一个串群，Λ 为单位元，称为由 $\mathscr{F}(U)$ 生成的自由单串群．于是 δ 可扩张为

$$\begin{aligned}&\delta^*:\{\mathscr{F}(U)\}^*\times\mathscr{F}(X)\rightarrow\mathscr{F}(X),\\&\delta^*(\lambda^*,\xi_0)=\delta^*(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n,\xi_0)=\xi,\\&\xi_1=\delta(\mu_1,\xi_0),\xi_2=\delta(\mu_2,\xi_1)=\delta^*(\mu_1\mu_2,\xi_0),\cdots\cdots,\\&\xi=\delta(\mu_n,\xi_{n-1})=\delta^*(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n,\xi_0)=\delta^*(\lambda^*,\xi_0)\end{aligned}\tag{10.7}$$

且 $\delta^*(\Lambda^*,\xi_0)=\xi_0$(由于没有输入，状态不变化)．

固定初始状态 $\xi_0\in\mathscr{F}(U)$，可定义

$$\delta_{\xi_0}:\{\mathscr{F}(U)\}^*\rightarrow\mathscr{F}(X),\quad \delta_{\xi_0}(\lambda^*)=\delta^*(\lambda^*,\xi_0),\tag{10.8}$$

模糊状态 ξ 仅依赖于输入串 λ^*，$\xi=\delta_{\xi_0}(\lambda^*)$，然后再向外界输出信息

$\eta \in \mathscr{F}(Y)$,此时映射变换可表示为

$$\begin{aligned} & f_{\xi_0}: \{\mathscr{F}(U)\}^* \to \mathscr{F}(Y)(f_{\xi_0} = \beta \circ \delta_{\xi_0}), \\ & f_{\xi_0}(\lambda^*) = \beta(\delta_{\xi_0}(\lambda^*)) = \beta(\delta^*(\lambda^*, \xi_0)). \end{aligned} \tag{10.9}$$

类似普通系统,可定义可控与可观测的概念.

定义 10.6　给出一个模糊系统 $\tau_f = (\mathscr{F}(X), \mathscr{F}(U), \mathscr{F}(Y), \delta, \beta)$.

1)若固定 $\xi_0 \in \mathscr{F}(X)$, $\forall \xi \in \mathscr{F}(X)$, $\exists \lambda^* \in \{\mathscr{F}(U)\}^*$,使得 $\delta_{\xi_0}(\lambda^*) = \xi$,则称系统对 ξ_0 是可控的.

2)若响应变换 $f_{\xi_0} = f_{\xi'_0} \Rightarrow \xi_0 = \xi'_0$,则称系统是可观测的.

所谓可控指的是通过输入可达到任一模糊状态;所谓可观测指的是任何状态 ξ 与以 ξ 为初始状态的响应变换 f_ξ 是一对一的.

定理 10.1　设 $\lambda_1^*, \lambda_2^* \in \{\mathscr{F}(U)\}^*$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathscr{F}(X)$,满足 $\delta_{\xi_1}(\lambda_1^* \cdot \lambda_2^*) = \xi_2$,则存在 $\xi \in \mathscr{F}(X)$,满足 $\xi = \delta_{\xi_1}(\lambda_1^*)$, $\xi_2 = \delta_\xi(\lambda_2^*)$.

证明　设 $\lambda_1^* = \mu_{11}\mu_{12}\cdots\mu_{1n}$, $\lambda_2^* = \mu_{21}\mu_{22}\cdots\mu_{2m}$,

$\delta_{\xi_1}(\mu_{11}) = \delta(\mu_{11}, \xi_1) = \zeta_1$,

$\delta_{\xi_1}(\mu_{11}\mu_{12}) = \delta^*(\mu_{11}\mu_{12}, \xi_1) = \delta(\mu_{12}, \zeta_1) = \zeta_2$,

……

$\delta_{\xi_1}(\lambda_1^*) = \delta^*(\lambda_1^*, \xi_1) = \delta(\mu_{1n}, \zeta_{n-1}) = \zeta_n$,

$\delta_{\xi_1}(\lambda_1^*\mu_{21}) = \delta^*(\lambda_1^*\mu_{21}, \xi_1) = \delta(\mu_{21}, \zeta_n) = \zeta_{n+1} = \delta_{\zeta_n}(\mu_{21})$,

$$\begin{aligned} \delta_{\xi_1}(\lambda_1^*\mu_{21}\mu_{22}) &= \delta^*(\lambda_1^*\mu_{21}\mu_{22}, \xi_1) \\ &= \delta(\mu_{22}, \zeta_{n+1}) = \zeta_{n+2} = \delta_{\zeta_n}(\mu_{21}\mu_{22}), \end{aligned}$$

……

$\delta_{\xi_1}(\lambda_1^*\lambda_2^*) = \delta^*(\lambda_1^*\lambda_2^*, \xi_1) = \delta(\mu_{2m}, \zeta_{n+m-1}) = \zeta_{n+m} = \delta_{\zeta_n}(\lambda_2^*)$, $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{n+m} \in \mathscr{F}(X)$,令 $\xi = \zeta_n \in \mathscr{F}(X)$,于是

$\delta_{\xi_1}(\lambda_1^*) = \zeta_n = \xi$, $\delta_\xi(\lambda_2^*) = \delta_{\zeta_n}(\lambda_2^*) = \delta_{\xi_1}(\lambda_1^*\lambda_2^*)$.　□

最后给出两个由普通系统扩展而成的模糊系统.

设 $\tau = (X, U, Y, \delta, \beta)$ 为决定性系统,由扩展原理(第四章§1,§2),δ, β 可诱导

$$\delta: \mathscr{F}(U) \times \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(X), \quad \beta: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y),$$

于是诱导出模糊系统 $\tau_f = (\mathscr{F}(X), \mathscr{F}(U), \mathscr{F}(Y), \delta, \beta)$, $\xi = \delta(\mu, \xi_0) \in \mathscr{F}(X)$, $\zeta = \beta(\xi) \in \mathscr{F}(Y)$ 的隶属函数为

$$\xi(x)=\bigvee_{\delta(u,x_0)=x}(\mu(u)\wedge\xi_0(x_0)),$$

$$\zeta(y)=\beta(\xi)(y)=\bigvee_{\beta(x)=y}\xi(x) \tag{10.10}$$

$$=\bigvee_{\beta(x)=y}\ \bigvee_{\delta(u,x_0)=x}(\mu(u)\wedge\xi_0(x_0)).$$

设 $\tau=(X,U,Y,\delta,\beta)$为非决定性系统,

$$\delta:U\times X\to\mathscr{P}(X),\quad \beta:X\to\mathscr{P}(Y)$$

为集值映射.由广义扩展原理(第五章§4 节),δ,β 可诱导模糊变换

$$\delta:\mathscr{F}(U)\times\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X),\quad \beta:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y),$$

$$\delta(\mu,\xi_0)=(\mu\times\xi_0)\circ\boldsymbol{R}_\delta=\xi\in\mathscr{F}(X),$$

$$\beta(\xi)=\xi\circ\boldsymbol{R}_\beta\in\mathscr{F}(Y),$$

关系 $\boldsymbol{R}_\delta,\boldsymbol{R}_\beta$ 为集值映射δ,β 的图象,隶属函数

$$\boldsymbol{R}_\delta(u,x_0,x)=\delta(u,x_0)(x),$$

$$\boldsymbol{R}_\beta(x,y)=\beta(x)(y),$$

$$\xi(x)=\bigvee_{u\in U}\ \bigvee_{x_0\in X}(\mu(u)\wedge\xi_0(x_0)\wedge\boldsymbol{R}_\delta(u,x_0,x)), \tag{10.11}$$

$$\zeta(y)=\bigvee_{x\in X}(\xi(x)\wedge\boldsymbol{R}_\beta(x,y)),$$

于是诱导出一个模糊系统 $\tau_f=(\mathscr{F}(X),\mathscr{F}(U),\mathscr{F}(Y),\delta,\beta)$.

§3　模糊关系系统

一、模糊关系系统的定义

定义 10.7　一个模糊关系系统指的是一个组合

$$\tau_{rel}=(X,\ U,\ Y,\ \boldsymbol{R}_\delta,\ \boldsymbol{R}_\beta),$$

其中 $\boldsymbol{R}_\delta\in\mathscr{F}(U\times X\times X)$ 为 $U\times X$ 到 X 的模糊关系，称为系统的转移关系. $\boldsymbol{R}_\beta\in\mathscr{F}(X\times Y)$是 X 到 Y 的模糊关系，称为输出关系. 合成关系 $\boldsymbol{R}_\delta\circ\boldsymbol{R}_\beta\in\mathscr{F}(U\times X\times Y)$是 $U\times X$ 到 Y 的模糊关系，称为响应关系.

给定初始状态 $\xi_0\in\mathscr{F}(X)$及输入 $\mu\in\mathscr{F}(U)$，系统状态转移到 $\xi=(\mu\times\xi_0)\circ\boldsymbol{R}_\delta\in\mathscr{F}(X)$，输出为 $\zeta=\xi\circ\boldsymbol{R}_\beta\in\mathscr{F}(Y)$.

按照广义扩展原理(第五章§4 节)，$\boldsymbol{R}_\delta$，$\boldsymbol{R}_\beta$ 可唯一确定模糊变换

$$\delta:\mathscr{F}(U)\times\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X),\quad \delta(\mu,\xi_0)=(\mu\times\xi_0)\circ\boldsymbol{R}_\delta,$$

$$\beta:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y),\ \beta(\xi)=\xi\circ\boldsymbol{R}_\beta,$$

于是 $\tau_{rel}=(X,\ U,\ Y,\ \boldsymbol{R}_\delta,\ \boldsymbol{R}_\beta)$可唯一确定一个模糊系统 $\tau_f=(\mathscr{F}(X),\mathscr{F}(U),\mathscr{F}(Y),\delta,\beta)$.

如果模糊系统 $\tau_f=(\mathscr{F}(X),\mathscr{F}(U),\mathscr{F}(Y),\delta,\beta)$中，$\delta$，$\beta$ 为模糊线性变换，则可唯一确定模糊关系 $\boldsymbol{R}_\delta$，$\boldsymbol{R}_\beta$，从而唯一确定一个模糊关系系统 $\tau_{rel}=(X,\ U,\ Y,\ \boldsymbol{R}_\delta,\ \boldsymbol{R}_\beta)$.

二、模糊关系系统的矩阵表示

设状态空间 $X=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$，输入集 $U=\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m\}$，输出集 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_l\}$，则模糊关系系统 $\tau_{rel}=(X,\ U,\ Y,\ \boldsymbol{R}_\delta,\ \boldsymbol{R}_\beta)$可由 $\boldsymbol{R}_\delta$，$\boldsymbol{R}_\beta$ 的矩阵表示唯一确定.

显然，输出关系 $\boldsymbol{R}_\beta$ 的矩阵表示是$n\times l$ 模糊矩阵($\boldsymbol{R}_\beta\in\mathscr{M}_{n\times l}$). 如何表示转移关系 $\boldsymbol{R}_\delta$ 呢? 一般说来，$\mathscr{F}(X)$的元素 ξ 可用模糊向量表示(称向量为一阶张量)；$\mathscr{F}(U\times X)$的元素可用 $m\times n$ 模糊矩阵表示(称矩阵为二阶张量)；而 $\mathscr{F}(U\times X\times X)$的元素$\boldsymbol{R}_\delta$ 应该用一个$m\times n\times n$ 模糊立体阵表示(我们称它为三阶张量)，其前后共有 m 片，每片为 $n\times n$ 矩阵. 第 k 片就是截影$\boldsymbol{R}_\delta|_{u_k}$. 因此 $\boldsymbol{R}_\delta$ 可由其 m 个截影(即 m 个$n\times n$ 模糊矩阵)表示.