创新优化系列

2007 高考总复习

河北省高考研究中心　编

考点指要
命题走向
复习指导
例题解析
能力训练
模拟试卷

数学

河北人民出版社

创新优化系列

河北人民出版社

2007 高考总复习

河北省高考研究中心 编

数学

考点指要

命题走向

复习指导

例题解析

能力训练

模拟试卷

河北人民出版社

主编　张慧英　张喜仲　陈云平
编者　张慧英　张喜仲　陈云平　徐俊国　薛凤琳　胡书军　闫维国　高龙胜　李拥军　何春明
阿文彦　刘志学　朱淑香　李光裕　刘志新　聂兵占　表建章　李素香　郑素艳　高巨亮
吴丽丽　魏凤英　陈书兴　张修彦　师爱芬　郭晓增　张庆疆　赵景茹

丛书名　创新优化系列
书　名　2007高考总复习/数学
编　者　河北省高考研究中心

责任编辑　王书华　宋　佳　王　轶
美术编辑　李　欣
责任校对　付敬华

出版发行　河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号）
印　刷　石家庄市东方彩印厂
开　本　880×1230毫米　1/16
印　张　19
字　数　680 000
版　次　2006年9月第1版　　2006年9月第1次印刷
印　数　1—1 000
书　号　ISBN 7-202-04420-X/G・1421
定　价　20.00元

目录 CONTENTS

第一章　集合与简易逻辑

[考点指要]

考试内容：

集合．子集．补集．交集．并集．

逻辑联结词．四种命题．充分条件和必要条件．

考试要求：

（1）理解集合、子集、补集、交集、并集的概念．了解属于、包含、相等关系的意义．掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合．

（2）理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义．理解四种命题及其相互关系．掌握充分条件、必要条件及充要条件的意义．

[命题走向]

1．近三年本章在高考中考查知识及分值比例如下表

年份		集合	简易逻辑	充要条件	反证法	分值比例
2004年	题号	(6)				3.3%
	分值	5				
2005年	题号	(2)				3.3%
	分值	5				
2006年	题号	(1)				3.3%
	分值	5				

2．近年高考试题分析

集合与简易逻辑是整个高中数学的基础，也是支撑现代数学大厦的柱石之一，它渗透到中学数学的每一个章节，是高考命题中的好材料．客观题多是基本题．主观题主要是运用集合知识解决与其它问题的综合题．

3．高考命题走向

（1）对集合的考查主要有两个方面：一是对集合基本概念的认识和理解的考查．如集合表示法，集合中元素的互异性，元素与集合的关系，集合与集合的关系，集合的运算．二是对集合知识及集合思想的应用．

（2）对逻辑联结词、四种命题和充要条件的考查更多地体现为基础性．主要是命题的四种形式、原命题与逆否命题的等价性和充要条件的判定．

（3）集合、简易逻辑、充要条件、反证法等内容的考核几乎渗透于所有的高考试题之中，考生应注意本章内容的考核特点．

[复习指导]

1．知识网络

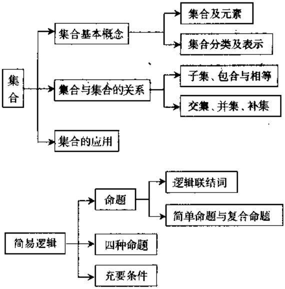


图1—1

2．在解答集合问题时，要注意灵活使用数形结合、等价转化、函数与方程的思想方法．有时利用韦恩图、数轴等图形作为辅助工具，使问题更直观、简洁．

3．含有参数的问题，要注意分类讨论，分类讨论时要做到不重不漏．

4．当用直接法判定命题较难时，可转化为其等价命题的判定或用反证法．

1.1　集合的概念与运算

[例题解析]

【例1】　已知集合 $M=\left\{x\mid x=m+\frac{1}{6},m\in Z\right\}$，$N=\left\{x\mid x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in Z\right\}$，$P=\left\{x\mid x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in Z\right\}$，则

M、N、P满足关系 （　　）

A. $M=N\subseteq P$　　B. $M\subseteq N=P$

C. $M\subseteq N\subseteq P$　　D. $N\subseteq P\subseteq M$

【解析】 本题考查集合与集合之间的关系，可以从判断元素的共性和差异入手.

解：$M=\left\{x|x=\frac{6m+1}{6},m\in Z\right\}$，

$N=\left\{x|x=\frac{3n-2}{6}=\frac{3(n-1)+1}{6},n\in Z\right\}$，

$P=\left\{x|x=\frac{3p+1}{6},p\in Z\right\}$. 由于$3(n-1)+1$和$3p+1$都表示被3除余1的整数，而$6m+1$表示被6除余1的整数，所以，$M\subseteq N=P$.

【答案】 B

【评价反思】 若通过列举法观察三个集合之间的关系，直观可行，但易产生判断失误. 解决与整数有关的问题常用分类方法.

【例2】 设A、B、I均为非空集合，且满足$A\subseteq B\subseteq I$，则下列各式中错误的是 （　　）

A. $(\complement_I A)\cup B=I$　B. $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

C. $A\cap(\complement_I B)=\phi$　D. $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I B$

【解析】 本题考查集合的基本运算及集合与集合之间的关系，可以利用韦恩图或特值法解决此问题.

解法一：韦恩图法. 由题意画出满足条件的图形.

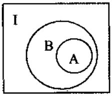


图1—2

根据韦恩图可判断A、C、D都是正确的.

解法二：特值法.

设$A=\{a\}$，$B=\{a,b\}$，$I=\{a,b,c\}$且满足$A\subseteq B\subseteq I$. 由此可判断出A、C、D都是正确的.

【答案】 B

【评价反思】 明确题目中集合间的关系，灵活掌握解决选择题的方法，本题采用“直接法”，也可用“排除法”.

【例3】 已知集合$A=\{x\mid -x^2+3x+10\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$. 若$B\subseteq A$，则实数$m$的取值范围是______.

【解析】 应先求出集合A，B. 再利用$B\subseteq A$求m的取值范围______.

解：化简$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$

(1) 若$B\neq\phi$，即$m+1\leqslant 2m-1$，所以$m\geqslant 2$.

$$B\subseteq A\Leftrightarrow\begin{cases}m\geqslant 2,\\ m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}\Leftrightarrow 2\leqslant m\leqslant 3.$$

(2) 若$B=\phi$，即$m+1>2m-1\Leftrightarrow m<2$，此时满足$B\subseteq A$.

所以，$m\leqslant 3$.

【评价反思】 注意空集是任何集合的子集.

【例4】 已知集合$A=\{(x,y)\mid x^2+mx-y+2=0\}$和$B=\{(x,y)\mid x-y+1=0,0\leqslant x\leqslant 2\}$，如果$A\cap B\neq\phi$，求实数$m$的取值范围.

【解析】 若仅在集合范围内考虑，不易找到解题思路，事实上，此题的实际背景是：“抛物线$x^2+mx-y+2=0$与线段$x-y+1=0$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$有公共点，求实数$m$的取值范围.”

解：由$\begin{cases}x^2+mx-y+2=0\\ x-y+1=0\ (0\leqslant x\leqslant 2)\end{cases}$

得$x^2+(m-1)x+1=0$　①

因为$A\cap B\neq\Phi$，所以方程在区间$[0,2]$上至少有一个实数解.

由$\Delta=(m-1)^2-4\geqslant 0$，得$m\geqslant 3$或$\leqslant -1$.

当$m\geqslant 3$时，由$x_1+x_2=-(m-1)<0$及$x_1x_2=1$知，方程①只有负根，不符合要求；

当$m\leqslant -1$时，由$x_1+x_2=-(m-1)>0$及$x_1x_2=1$知，方程①有两个互为倒数的正根，故必有一根在区间$[0,1]$内，从而方程①至少有一个根在区间$[0,2]$内. 所以，m的取值范围是$(-\infty,-1]$.

【评价反思】 上述解法应用了数形结合的思想. 另外，若注意到抛物线$x^2+mx-y+2=0$与线段$x-y+1=0$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$的公共点在已知线段上，此题也可以用公共点内分线段的比λ的取值范围建立关于m的不等式来解.

【解题方法归纳】

1. 对于集合问题，要首先认清集合的特征，然后借助直观图形解决已给问题.

2. 要正确理解集合交、并、补运算的含义.

3. 解集合问题时，要注意集合元素的互异性. 注意空集是任何集合的子集.

4. 注意等价条件的不同形式，如$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$等.

5. 集合问题多与函数、方程、不等式有关，要注意各类知识的融会贯通. 解决集合问题常用数形结合、等价转化、分类讨论等数学思想.

[能力训练]

一、选择题

1. 设I为全集，S_1、S_2、S_3是I的三个非空子集且$S_1\cup S_2\cup S_3=I$，则下面论断正确的是 （　　）

A. $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\phi$

B. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \phi$

D. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3)$

2. 设集合 $M=\{x \mid x^2-x<0\}$，$N=\{x \mid |x|<2\}$，那么下列结论正确的是　（　）

A. $M\cap N=\phi$　　B. $M\cap N=M$

C. $M\cup N=M$　　D. $M\cup N=R$

3. 已知集合 $M=\{x \mid x=2^y, y\in R\}$，$N=\{x \mid x=y^2, y\in R\}$，则 $M\cap N$ 等于　（　）

A. $\{4, 2\}$　B. $\{(4, 2)\}$　C. N　D. M

4. 数集 $A=\{(2n+1)\pi \mid n\in Z\}$，$B=\{(4m\pm1)\pi \mid m\in Z\}$ 之间的关系是　（　）

A. $A\subset B$　B. $A\supset B$　C. $A=B$　D. $A\neq B$

5. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，$B=\{x \mid x^2+px+q<0\}$，则适合 $A\cap B=\{x \mid -1\leqslant x<2\}$ 的 p、q 满足　（　）

A. $2p+q+4=0$　　B. $p+q+5=0$

C. $p+q=0$　　D. $p-q=0$

6. 定义集合 A、B 的一种运算：$A*B=\{x \mid x=x_1+x_2, x_1\in A, x_2\in B\}$，若 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 2\}$，则 $A*B$ 中所有元素之和为　（　）

A. 9　B. 14　C. 18　D. 21

7. 设集合 $A=\{(x, y) \mid y\sqrt{x}=0\}$，$B=\{(x, y) \mid x^2+y^2=1\}$，且 $C=A\cap B$，则 C 中元素的个数是　（　）

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

二、填空题

8. 设集合 $A=\{5, \log_2(a+3)\}$，$B=\{a, b\}$，若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$______.

9. 已知集合 $A=\{x \mid ax^2+2x+1=0, a\in R\}$ 只有一个元素，则 a 的值为______.

10. 已知 $A=\{0, 1\}$，$B=\{x \mid x\in A, x\in N^*\}$，$C=\{x \mid x\subseteq A\}$，则 A、B、C 之间的关系是______.

11. 若全集 $U=R$，$f(x)$、$g(x)$ 均为 x 的二次函数，$P=\{x \mid f(x)<0\}$，$Q=\{x \mid g(x)\geqslant 0\}$，则不等式组 $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$ 的解集可用 P、Q 表示为______.

三、解答题

12. 设 $S=\{2, 4, 1-a\}$，$A=\{2, a^2-a+2\}$. 若 $\complement_S A=\{-1\}$，求 a 的值.

13. 已知集合 $A=\{x, xy, \lg(xy)\}$，$B=\{0, |x|, y\}$ 若 $A=B$，

求：$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2005}+\frac{1}{y^{2005}}\right)$ 的值.

14. 已知集合 $A=\{y \mid y=\left(\frac{2}{3}\right)^x, x\in R\}$，集合 $B=\{x \mid (m+2)x^2+2mx+1\leqslant 0\}$，试讨论是否存在实数 m，使 $B\cup A=A$.

1.2　逻辑联结词与四种命题

[例题解析]

【例1】 指出下列复合命题的形式及其构成，并指出复合命题的真假.

(1) 若 α 是一个三角形的最小内角，则 α 不大于 $60°$.

(2) 一个内角为 $90°$，另一个内角为 $45°$ 的三角形是等腰直角三角形.

(3) 有一个内角为 $60°$ 的三角形是正三角形或直角三角形.

【解析】 由简单命题构成复合命题时，关键是直接利用逻辑联结词.

解：(1) 是非 p 形式的复合命题，是真命题. 其中 p：若 α 是三角形的最小内角，则 $\alpha>60°$.

(2) 是 p 且 q 形式的复合命题，是真命题. 其中 p：一个内角为 $90°$，另一个内角为 $45°$ 的三角形是等腰三角形. q：一个内角为 $90°$，另一个内角为 $45°$ 的三角形是直角三角形.

(3) 是 p 或 q 形式的复合命题，是假命题. 其中 p：有一个内角为 $60°$ 的三角形是正三角形. q：有一个内角为 $60°$ 的三角形是直角三角形.

【评价反思】 判断复合命题的构成形式不能只从字面上来考虑，应在理解“或”、“且”、“非”的含义的基础上进行，并能利用真值表判断一个复合命题的真假.

【例2】 分别写出下列命题的否定及否命题.

(1) 若 $a^2-4b=0$，则函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 的图象与 x 轴有唯一交点.

(2) 若$x=3$或$x=4$，则方程$x^2-7x+12=0$.

【解析】 能区分“否命题”和“命题的否定”不同含义是解答的关键.

解：(1) 命题的否定即命题的“非P”形式为：若$a^2-4b=0$，则函数$f(x)=x^2+ax+b$的图象与x轴没有交点或至少有两个交点.

否命题为：若$a^2-4b\neq 0$，则函数$f(x)=x^2+ax+b$的图象与x轴没有交点或至少有两个交点.

(2) 命题的否定即命题的“非P”形式为：若$x=3$或$x=4$，则方程$x^2-7x+12\neq 0$.

否命题为：若$x\neq 3$且$x\neq 4$，则方程$x^2-7x+12\neq 0$.

【评价反思】 命题的否定及否命题是完全不同的概念，应加以区别.

【例3】 已知$c>0$，设P：函数$y=c^x$在R上单调递减；Q：不等式$x+|x-2c|>1$的解集为R. 如果P和Q有且仅有一个正确，求c的取值范围.

【解析】 由命题P、Q正确求出c的取值范围. 再由P和Q有且仅有一个正确进行分类讨论.

解：函数$y=c^x$在R上单调递减$\Leftrightarrow 0<c<1$.

不等式$x+|x-2c|>1$的解集为R$\Leftrightarrow$函数$y=x+|x-2c|$在R上恒大于1.

$\because x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c, & (x\geqslant 2c)\\ 2c, & (x<2c)\end{cases}$

$\therefore$函数$y=x+|x-2c|$在R上的最小值为$2c$.

$\therefore$不等式$x+|x-2c|>1$的解集为R$\Leftrightarrow 2c>1\Leftrightarrow c>\frac{1}{2}$.

如果P正确而Q不正确，则$0<c\leqslant\frac{1}{2}$

如果Q正确而P不正确，则$c\geqslant 1$

所以c的取值范围为$\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

【评价反思】 本题考查了集合、函数、不等式、命题等基础知识. 在解答过程中蕴涵着分类讨论和转化思想.

【例4】 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假.

(1) 若$m<1$，则方程$x^2+2x+m=0$有实数根；

(2) 若$ab\neq 0$，则$a\neq 0$或$b\neq 0$.

【解析】 掌握四种命题及其关系是解答的关键.

解：(1) 逆命题：若方程$x^2+2x+m=0$有实数根，则$m<1$. 是假命题.

否命题：若$m\geqslant 1$，则方程$x^2+2x+m=0$无实数根. 是假命题.

逆否命题：若方程$x^2+2x+m=0$无实数根，则$m\geqslant 1$. 是真命题.

(2) 逆命题：若$a\neq 0$或$b\neq 0$，则$ab\neq 0$. 是假命题.

否命题：若$ab=0$，则$a=0$且$b=0$. 是假命题.

逆否命题：若$a=0$且$b=0$，则$ab=0$. 是真命题.

【解题方法归纳】

1. 有的“p或q”与“p且q”形式的复合命题语句中，字面上未出现“或”与“且”字，此时应从语句的陈述中搞清含义.

2. 会用真值表判断命题真假.

3. 判断命题真假时，常常把原命题转化为一个与其等价的命题，然后再判断命题的真假.

[能力训练]

一、选择题

1. 已知复合命题：“P或Q”为真，“$\neg P$”为假，则必有 ( )

A. P真，Q假　　B. P假，Q真

C. P真，Q可能真也可能假　D. P真，Q真

2. 下列命题中真命题是 ( )

①“若$xy=1$则x，y互为倒数”的逆命题；

②“面积相等的三角形全等”的否命题；

③“若$m\leqslant 1$，则方程$x^2-2x+m=0$有实根”的逆否命题；

④“若$A\cap B=B$，则$A\subseteq B$”的逆否命题.

A. ①②　B. ②③　C. ①②③　D. ③④

3. 与命题“若$a\in M$，则$b\notin M$”等价的命题是 ( )

A. 若$a\notin M$，则$b\notin M$

B. 若$b\notin M$，则$a\in M$

C. 若$a\notin M$，则$b\in M$

D. 若$b\in M$，则$a\notin M$

4. “至多有一个”的否定是 ( )

A. 至少有一个　　B. 至少有两个

C. 恰有两个　　D. 一个也没有

5. 给出命题p：$3\geqslant 3$；q：函数$y=\begin{cases}1, & (x\geqslant 0)\\ -1, & (x<0)\end{cases}$在R上是连续函数，则在下列三个复合命题：“$p$或$q$”，“$p$且$q$”，“非$p$”中，真命题的个数 ( )

A. 0个　B. 1个　C. 2个　D. 3个

6. 已知命题p：若$a^2+b^2=0$，则a、b都为0，那么下列结论中正确的是 ( )

A. 命题p的逆否命题是：若a、b都不为0，则$a^2+b^2\neq 0$；它是真命题

B. 命题p的逆否命题是：若a、b都不为0，则$a^2+b^2\neq 0$；它是假命题

C. 命题p的逆否命题是：若a、b不都为0，则$a^2+b^2\neq 0$；它是真命题

D. 命题p的逆否命题是：若a、b不都为0，则$a^2

$+b^2\neq 0$；它是假命题

7. 若命题 p，q 是简单命题，且“p 或 q”的非命题是真命题，则必有 （　　）

A. p 真 q 真　　B. p 假 q 假

C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

8. 设有两个命题：P：关于 x 的不等式 $x^3+2ax+4>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，Q：函数 $y=-(5-2a)^x$ 在 R 上是减函数，若“P 且 Q”为真命题，则实数 a 的取值范围是 （　　）

A. $(-2,2)$　　B. $(-\infty,2)$

C. $(-\infty,-2]$　　D. $(-\infty,2]$

二、填空题

9. 命题 $a\notin A$ 或 $a\notin B$ 的否定形式________.

10. 命题“若方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的 $\Delta=b^2-4ac<0$，则方程无实根”的否命题的逆否命题是________.

11. 在空间中，①若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线；②若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线．以上两个命题中，逆命题正确的是______.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，有命题

①$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$；②$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$；

③若 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形；

④若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$，则 $\triangle ABC$ 为锐角三角形.

上述命题正确的是________.

三、解答题

13. 写出命题“若 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2=0$，则 $x=2$ 且 $y=-1$”的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假.

14. 已知命题 P：函数 $y=\log_{0.5}(x^2+2x+a)$ 的值域为 R；命题 Q：函数 $=-(5-2a)^x$ 在 R 上是减函数，若“P 或 Q”为真命题，“P 且 Q”为假命题，求实数 a 的取值范围.

15. 已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，a，$b\in\mathbf{R}$，对命题“若 $a+b\geqslant 0$，则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$”.

(1) 写出其逆命题，判断其真假，并证明你的结论；

(2) 写出其逆否命题，判断其真假，并证明你的结论.

1.3　充要条件与反证法

[例题解析]

【例 1】　指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件.

(1) p：$a>2$ 且 $b>2$，q：$a+b>4$ 且 $ab>4$；

(2) 对于实数 x，y，p：$x+y\neq 8$，q：$x\neq 2$ 或 $y\neq 6$；

【解析】　从充分条件和必要条件的定义入手.

解：(1) 当 $a=3$，$b=\frac{3}{2}$ 时，满足 $a+b>4$ 且 $ab>4$，但不满足 $a>2$ 且 $b>2$，$\therefore p$ 是 q 充分而不必要条件.

(2) $\because$ 逆否命题是：$x=2$ 且 $y=6\Rightarrow x+y=8$，但 $x+y=8\nRightarrow x=2$ 且 $y=6$，$\therefore p$ 是 q 充分而不必要条件.

【例 2】　已知 P：$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$Q$：$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ $(m>0)$，若 $\neg P$ 是 $\neg Q$ 的充分而不必要条件，求实数 m 的取值范围.

【解析】　根据已知条件先写出 $\neg P$ 和 $\neg Q$，然后由 $\neg P\Rightarrow\neg Q$ 但 $\neg Q\nRightarrow\neg P$，求得 m 的取值范围.

解：由得 $\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$ 得 $-2\leqslant x\leqslant 10$，所以 $\neg P$：$A=\{x\mid x>10$，或 $x<-2\}$．由 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ 得 $1-m\leqslant x\leqslant 1+m$ $(m>0)$，所以 $\neg Q$：$B=\{x\mid x>1+m$，或 $x<1-m$，$m>0\}$．因为 $\neg P$ 是 $\neg Q$ 的充分而不必要条件，所以 $A\subsetneqq B$，结合数轴有 $\begin{cases}m>0\\1+m\leqslant 10\\1-m\geqslant -2\end{cases}$ 解得 $0<m\leqslant 3$

【评价反思】　本题是由 $\neg P$ 是 $\neg Q$ 的充分而不必要条件，求实数 m，也可用它的等价命题，Q 是 P 的充分而不必要条件，求实数 m.

【例 3】　设 x，$y\in\mathbf{R}$，求证：$|xy|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy\geqslant 0$.

【解析】　证明充要条件，需要证充分性，又要证必要性.

证明：先证必要性，即若 $|x+y|=|x|+|y|$ 成立，则 $xy\geqslant 0$.

由 $|x+y|=|x|+|y|$ 两边平方得

$x^2+2xy+y^2=x^2+2|xy|+y^2$

$\therefore |xy|=xy$，$\therefore xy\geqslant 0$.

再证充分性，即 $xy\geqslant 0$，则 $|x+y|=|x|+|y|$；

若 $xy\geqslant 0$，则 $xy>0$ 或 $xy=0$ 下面分类证明

(1) 若 $x>0$，$y>0$，则 $|x+y|=x+y=|x|+|y|$．(2) 若 $x<0$，$y<0$，则 $|x+y|=(-x)+(-y)=|x|+|y|$．(3) 若 $xy=0$，不妨设 $x=0$，则 $|x+y|=0+|y|=|x|+|y|$．

综合 (1) (2) (3) 得，当 $xy\geqslant 0$ 时，有 $|x+y|=|x|+|y|$

因此 $|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy\geqslant 0$

【评价反思】 证明充要条件，一般先证必要性，再证充分性．

【例 4】 已知 a，b，c 是互不相等的非零实数．求证：三个方程 $ax^2+2bx+c=0$，$bx^2+2cx+a=0$，$cx^2+2ax+b=0$ 中至少有一个方程有两个相异实根．

【解析】 此题若采用直接法讨论将很复杂，应采用反证法．

证明：假设三个方程都没有两个相异实根，则

$$\begin{cases}\Delta_1=4b^2-4ac\leqslant 0\\ \Delta_2=4c^2-4ab\leqslant 0\\ \Delta_3=4a^2-4bc\leqslant 0\end{cases}$$

相加得 $(a+b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\leqslant 0$．　①

由题意 a，b，c 是互不相等的非零实数，∴①式不能成立．

∴假设不成立，即三个方程中至少有一个方程有两个相异实根．

【评价反思】 反证法是通过证明命题的结论的反面不成立而肯定原命题成立的方法．其步骤是①否定结论，②推出矛盾，③否定假设，④肯定结论．

反证法的关键是推出矛盾，往往是与公理、定理、定义矛盾或与反设矛盾或与题设矛盾或自相矛盾．

当命题的结论涉及"至多"、"至少"、"唯一"、"存在"等字眼时，常常可用反证法．

【解题方法归纳】

1．处理充分、必要条件问题时，首先要分清条件与结论，然后才能进行推理和判断．为了便于由条件推出结论或由结论推出条件，往往要利用四种命题的关系对命题进行等价转化．

2．证明充要条件要从充分性和必要性两个方面来论证．

3．要注意一些常用的"结论的否定形式"，从而注意应用反证法．

[能力训练]

一、选择题

1．$ac^2>bc^2$ 是 $a>b$ 成立的　　(　　)

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件

C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

2．一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$ $(a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充分不必要条件是　　(　　)

A．$a<0$　B．$a>0$　C．$a<-1$　D．$a>1$

3．已知数列 $\{a_n\}$，则"对任意的 $n\in N^*$，点 $P_n(n, a_n)$ 都在直线 $y=2x+1$ 上"是"$\{a_n\}$ 为等差数列"的　　(　　)

A．必要不充分条件　B．充分不必要条件

C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

4．"$a=1$"是"函数 $y=\cos^2ax-\sin^2ax$ 的最小正周期为 π"的　　(　　)

A．必要不充分条件　B．充分不必要条件

C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

5．已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为非零的平面向量．甲：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，乙：$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则　　(　　)

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件

B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙得充要条件

D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

6．函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间 $[1, 2]$ 上存在反函数的充要条件是　　(　　)

A．$a\in(-\infty, 1]$　B．$a\in[2, +\infty)$

C．$a\in[1, 2]$

D．$a\in(-\infty, 1]\cup[2, +\infty)$

7．用反证法证明命题：若整系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 有有理根，则 a、b、c 中至少有一个是偶数，下列假设中正确的是　　(　　)

A．假设 a、b、c 都是偶数

B．假设 a、b、c 都不是偶数

C．假设 a、b、c 至多有一个偶数

D．假设 a、b、c 至多有两个偶数

8．设 a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 均为非零实数，不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集分别为集合 M 和 N，则"$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$"是"$M=N$"的(　　)

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件

C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

二、填空题

9．在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A>\angle B$ 是 $\sin A>\sin B$ 的________条件．

10．在 $\triangle ABC$ 中，"$A>30°$"是"$\sin A>\frac{1}{2}$"的________．

11．已知 A 和 B 是两个命题，如果 A 是 B 的充分条件，那么 B 是 A 的________条件，$\neg A$ 是 $\neg B$ 的________条件．

12．有下列四个命题：

① "$x\notin A$ 且 $x\notin B$"是"$x\notin A\cap B$"的充分不必要

条件

②若$\neg P \Rightarrow \neg Q$，则$P$是$Q$的必要条件

③$x \neq \pm 1$是$|x| \neq 1$（$x \in \mathbf{R}$）的必要不充分条件

④$(x-1)(y-2)=0$是$(x-1)^2+(y-2)^2=0$（$x, y \in \mathbf{R}$）的既不充分也不必要条件.

正确命题的序号是________.

三、解答题

13. 设$A=\{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant a\}$，$B=\{y \mid y=2x+3, x \in A\}$，$C=\{z \mid z=x^2, x \in A\}$，求使$C \subseteq B$的充要条件.

14. 求证：关于x的方程$ax^2+bx+c=0$（$a \neq 0$）有一个根是1的充要条件是$a+b+c=0$.

15. 已知两个函数$f(x)=x^2+2ax-(1-\sqrt{3})a+\sqrt{3}$，$g(x)=-x^2+2x+3a^2$，求证：无论$a$取怎样的实数，这两个函数的图象至少有一个位于$x$轴的上方.

[单元检测]

一、选择题

1. 已知集合$U=\{2, 3, 5, 7, 11\}$，$A=\{2, |a-5|, 7\}$，$\complement_U A=\{5, 11\}$，则$a$的值为（　　）.

A. 2　　B. 8　　C. 2或8　　D. -2或8

2. 已知集合$A=\left\{(x, y) \mid \dfrac{y-3}{x-2}=1, x, y \in \mathbf{R}\right\}$，$B=\{(x, y) \mid y=ax+2, x, y \in \mathbf{R}\}$，若$A \cap B=\phi$，则$a$的值为（　　）

A. $a=1$或$a=\dfrac{3}{2}$　　B. $a=1$或$a=\dfrac{1}{2}$

C. $a=2$或$a=3$　　D. 以上都不对

3. 设$M=\{0, 1\}$，$N=\{11-a, \lg a, 2^a, a\}$，是否存在$a$值使$M \cap N=\{1\}$.（　　）

A. 存在，且有两个值　　B. 存在，但只有一个值

C. 不存在　　D. 无法确定

4. 定义$A-B=\{x \mid x \in A, 且 x \notin B\}$，若$M=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$P=\{2, 3, 6\}$，则$P-M$等于（　　）

A. M　　B. P　　C. $\{1, 4, 5\}$　　D. $\{6\}$

5. 下列四个命题中，与命题$A \subseteq B$等价的共有（　　）

①$A \cap B=A$　②$A \cup B=B$　③$A \cap \complement_U B=\phi$　④$A \cup B=U$（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

6. 若$A=\{x \mid |x-1|<2\}$，$B=\left\{x \mid \dfrac{x-2}{x}>0\right\}$，则$A \cap B$等于（　　）

A. $\{x \mid 1<x<3\}$　　B. $\{x \mid x<0 或 x>2\}$

C. $\{x \mid -1<x<0\}$

D. $\{x \mid -1<x<0 或 2<x<3\}$

7. 函数$y=x|x+a|+b$是奇函数的充要条件是（　　）

A. $ab=0$　　B. $a+b=0$　C. $a=b$　　D. $a^2+b^2=0$

8. 满足$-3<\dfrac{1}{x}<2$的x的集合是（　　）

A. $\left\{x \mid \dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}\right\}$　　B. $\left\{x \mid x>\dfrac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{x \mid x<\dfrac{1}{3}\right\}$　　D. $\left\{x \mid x<-\dfrac{1}{3} 或 x>\dfrac{1}{2}\right\}$

9. 用反证法证明命题“三角形的内角中至少有一个不大于60°”时，反设正确的是（　　）

A. 假设三个内角都不大于60°

B. 假设三个内角都大于60°

C. 假设三个内角至多有一个大于60°

D. 假设三个内角至少有一个大于60°

10. 假设命题$\neg p$或$\neg q$是真命题，命题$\neg p$且$\neg p$是假命题，则（　　）

A. 命题p或命题q是假命题

B. 命题p和命题q都是真命题

C. 命题p和命题$\neg q$真值不同

D. 命题p和命题$\neg q$真值相同

11. 已知：p：$|x-3|>1$，q：$\dfrac{x-4}{x^2+3x-10}>0$，则$\neg p$是$\neg q$的（　　）

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

12. 若集合A_1、A_2满足$A_1 \cup A_2=A$，则称(A_1, A_2)为集合A的一种分拆，并且规定当且仅当$A_1=A_2$时，(A_1, A_2)与(A_2, A_1)为集合A的同一种分拆，则集合$A=\{a_1, a_2, a_3\}$的不同分拆种数是（　　）

A. 27　　B. 36　　C. 9　　D. 8

二、填空题

13. 不等式$\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{x-3} \geqslant 0$的解集为______.

14. 不等式$ax^2-ax+1>0$对一切实数x恒成立的

充要条件______.

15. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-(m+2)x+1=0, x\in R\}$，且 $A\cap\{x \mid x>0, x\in R\}=\phi$，则实数 m 的取值范围是______.

16. 已知函数 $f(x)=x|x|+px+q\ (x\in R)$，给出下列四个命题：

(1) $f(x)$ 为奇函数的充要条件是 $q=0$；

(2) $f(x)$ 的图象关于点 $(0, q)$ 对称；

(3) 当时 $p=0$，方程 $f(x)=0$ 的解集一定非空；

(4) 方程 $f(x)=0$ 的解的个数一定不超过两个，

其中所有正确的命题的序号是______.

三、解答题

17. 已知 $U=R$，$A=\{x \mid x^2-5x-6<0\}$，$B=\{x \mid |x-2|\geqslant 1\}$，求 $A\cap B$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

18. 若集合 $P=\{(x, y) \mid (x+2)^2+(y-3)^2\leqslant 4\}$，$Q=\{(x, y) \mid (x+1)^2+(y-m)^2<\frac{1}{4}\}$ 且 $P\cap Q=Q$，求实数 m 的取值范围.

19. 判断下列命题的真假

(1) 如果一个整数 n 的平方是偶数，那么这个整数 n 本身也是偶数；

(2) 不存在实数 k，使抛物线 $y=kx^2+3x-1$ 与 x 轴只有一个交点.

20. 设集合 $A=\{x \mid x^2+x-6<0\}$，$f(x)=\dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}$ 的值域为 B，求 $B\subseteq A$ 成立的实数 a 的取值范围.

21. 已知 ω 为正数，设 $S_\omega=\{\theta \mid f(x)=\cos\omega(x+\theta)$ 为奇函数$\}$，对每个实数 a，$S_\omega\cap(a, a+1)$ 的元素不超过2个，且有 a 使 $S_\omega\cap(a, a+1)$ 含2个元素，求 ω 的范围.

22. 记函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]\ (a<1)$ 的定义域为 B.

(1) 求 A；

(2) 若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

第二章　函　　数

[考点指要]

考试内容：

映射与函数；反函数；函数的图象与性质（定义域、值域、奇偶性、单调性等）；指数与指数函数；对数与对数函数；函数、方程、不等式的应用.

考试要求：

（1）理解映射与函数的概念及意义，掌握求函数的解析式、定义域、值域、最值的方法，理解函数与图象的对应关系，掌握作函数图象的基本方法，能够绘出基本函数的图象，能够应用函数思想解决实际应用方面的问题.

（2）了解函数的单调性、奇偶性的概念，能正确判断给定函数的单调区间、单调性或奇偶性，并掌握求简单函数的单调区间.

（3）理解反函数的概念及互为反函数的函数图象间的关系，会求给定函数的反函数以及反函数的定义域、值域.

（4）了解指数、对数的概念，掌握有理指数幂、对数的运算性质.

（5）掌握指数函数、对数函数的概念、解析式、图象与性质，并且能够运用各类函数的图象与性质解决与函数有关的某些简单的实际问题.

[命题走向]

1. 函数在近三年高考中的分值比例如下表

年份	题号及分值		分值比例
2004年	题号	2、4、9、17	18%
	分值	27	
2005年	题号	7、8、9、17、22（1）	20%
	分值	30	
2006年	题号	2，8，16，21（1）	17%
	分值	26	

2. 近年高考试题分析

本章是高中数学中十分重要的章节，函数的思想、方法及其基本内容是整个高中数学的主干，也是历年高考重点考查的内容. 纵观近几年高考试题，从题型上看，选择题、填空题、解答题三种题型每年都有函数试题，其分布为客观题、填空题2—4道，解答题1 2道；从难度上说，以中、低档题考查函数记号的理解，函数的概念及性质、函数的图象及变换，充分体现图象在解题中的作用；以中、高档难度试题考查函数性质的应用，函数、方程、不等式的综合应用，以及函数与导数、函数与数列的综合应用，综合性题目在新课程高考中逐年加强，以综合考查应用函数知识分析、解决问题的能力.

3. 高考命题走向

（1）考查函数的定义域、值域、奇偶性、单调性，反函数以及函数图象；

（2）试题类型仍会有选择题、填空题、解答题. 题目数量为3—5个，分值在20 30分左右.

（3）小题仍会着重考查函数的概念，基本性质及图象，这些题要求不高，属中低档题.

（4）函数应用题还是命题的一个热点，题型可以是选择题，也可以是解答题，题目新颖，且活而不难.

（5）考查运用函数的思想分析、解决问题的应用能力；函数与方程、导数、数列等内容综合，并在知识网络的交汇点设计试题；例如，用导数工具研究函数的性质、证明不等式或求最值问题等综合题目，这是新课程高考考试的又一个热点.

[复习指导]

1. 知识网络

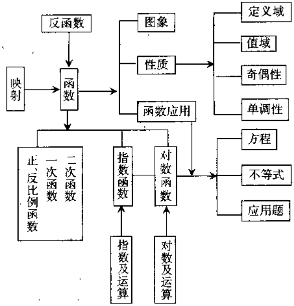


图2—1

2. 重视本章的每一个知识要点，把握重点

深刻理解常见函数（正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数、指数函数、对数函数）的解析式和图象，熟悉其性质，以及解析式与图象、性质之间的有机联系，把握数形之间的相互利用.

掌握函数图象的变换形式：平移变换、对称变换、伸缩变换等.

含参数函数的讨论是函数问题中的重点和难点，复习时应适当加强这方面的训练，做到条理清楚、分类明确、不重不漏.

函数中的最值问题在高考中多次出现，是高考中的重要题型之一，应掌握求最值的常用方法.

正确、灵活地理解函数概念．加强函数与方程、不等式、数列以及导数等各章知识之间的联系，培养运用函数观点处理问题的能力.

3. 思想方法

数学中的四大思想——函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、等价转换化归思想在函数一章都得到了充分体现，本章更应突出数形结合思想与分类讨论思想，通过对例题、习题的理解，重点培养这两方面的能力.

2.1 函数的概念

[例题解析]

【例 1】 已知 $A=\{1,2,3,k\}$，$B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$，$a\in\mathbb{N}$，$k\in\mathbb{N}$，$x\in A$，$y\in B$，f：$x\to y=3x+1$ 是从定义域 A 到值域 B 的一个函数，求 a，k，A，B.

【解析】 本题可从映射与函数的定义入手解决.

解：定义域 A 中的元素在对应法则的作用下：

$1\to4$，$2\to7$，$3\to10$，$k\to3k+1$，

$\therefore a^4\neq10$，$a^2+3a=10\Rightarrow a=2$．$a=-5$（舍去）．又 $3k+1=16$，$\therefore k=5$，故，$A=\{1,2,3,5\}$，$B=\{4,7,10,16\}$

【评价反思】 函数就是从定义域到值域的映射，因此，值域中的每一个元素在定义域中一定能找到原象与之对应.

【例 2】 设集合 A 和 B 都是自然数集 N，映射 f：$A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n，则在映射 f 下，象 20 的原象是 （ ）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【解析】 本题考查映射、象、原象的概念和方程的观点.

解：由题意知：$2^n+n=20$ 经代人检验知，选 C.

【评价反思】 注意近几年高考试题在考查数学解题方法方面越来越全面深刻，如猜想、估算，直觉思维等，在选择题中多有体现，应引起重视.

【例 3】 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x\leqslant-1)\\ x^2 & (-1<x<2)\\ 2x & (x\geqslant2)\end{cases}$

且 $f(a)=3$，求 a 的值.

【解析】 对于分段函数 $f(x)$，由函数值 3 求相应的自变量 a 的值时，应分别在各个段上讨论，即分 $a\leqslant-1$，$-1<a<2$，和 $a\geqslant2$ 三种情况讨论.

解：(1) 若 $a\leqslant-1$，则 $f(a)=a+2=3$，可得 $a=1$ 与 $a\leqslant-1$ 矛盾；

(2) 若 $-1<a<2$，$f(a)=a^2=3$，可得 $a=\pm\sqrt{3}$（负值舍去），所以 $a=\sqrt{3}$；

(3) 若 $a\geqslant2$，则 $f(a)=2a=3$，可得 $a=\frac{3}{2}$ 与 $a\geqslant2$ 矛盾.

综合 (1)、(2)、(3)，得 $a=\sqrt{3}$.

【评价反思】 解决函数问题要强化分类讨论的意识，熟练掌握分类讨论的思想方法，做到条理清楚，不重不漏.

【例 4】 某家庭今年一月份、二月份和三月份煤气用量和支付费用如下表所示：

月份	用气量	煤气费
一月份	4 米^3	4 元
二月份	25 米^3	14 元
三月份	35 米^3	19 元

该市煤气收费的方法是：

煤气费＝基本费＋超额费＋保险费

若每月用量不超过最低限度 A 米^3，只付基本费 3 元和每户每月的定额保险 C 元，若用气量超过 A 米^3，超过部分每米^3 付 B 元，又知保险费 C 超不过 5 元，根据上面的表格求 A，B，C.

【解析】 可设每月用气量为 x 米^3，支付费用为 y 元，建立函数解析式解之.

解：可设每月用气量为 x 米^3，支付费用为 y 元，

则得 $y=\begin{cases}3+C & (0\leqslant x\leqslant A),\\ 3+B(x-A)+C & (x>A).\end{cases}$

由 $0<C\leqslant5$ 有 $3+C\leqslant8$．由第二、第三月价的费用都大于 8，即用气量 25 米^3，35 米^3 都大于最低限度 A 米^3，

则 $\begin{cases}3+B(25-A)+C=14,\\ 3+B(35-A)+C=19.\end{cases}$

两式相减，得 $B=0.5$.

$\therefore A=2C+3$.

再分析一月份的用气量是否超过最低限度，不妨设 $A<4$，将 $x=4$ 代人 $3+B(x-A)+C$，

得 $3+0.5\times[4-(3+2C)]+C=4$，

由此推出 $3.5=4$，矛盾.

$\therefore A\geqslant4$，一月份应付款 $3+C$.

$\therefore 3+C=4$，即 $C=1$.

将 $C=1$ 代入 $A=2C+3$，得 $A=5$.

$\therefore A=5$，$B=0.5$，$C=1$.

【评价反思】 此题为分段函数问题，题目所涉及的内容在求解过程中，要考虑结果是否满足各段的要求，这是解此类综合型应用题的特点.

【解题方法归纳】

1. 函数解析式表示函数与自变量之间的一种对应关系，是函数与自变量之间建立联系的桥梁，所以解析式与所取的字母无关，如 $y=f(x)$ 与 $u=f(t)$ 是同一个函数，可根据两个函数的“三要素”是否相同来判断两个函数是否为同一个函数.

2. 判断对应是否为映射，即看集合 A 中元素是否满足“每个元素都有象”和“象唯一”；而且集合 B 中的元素可以无原象，即集合 B 中元素可以有剩余.

3. 根据实际问题求函数表达式，是应用函数知识解决实际问题的基础，在设定或选定自变量后去寻找等量关系以求得函数表达式时，要注意函数定义域应由实际问题确定.

[能力训练]

一、选择题

1. 设集合 $A=R$，集合 $B=\{x\mid x>0, x\in R\}$，下列对应关系中，是从集合 A 到 B 的映射的是 ( )

A. $x\to y=|x|$　　B. $x\to y=\frac{1}{(x-1)^2}$

C. $x\to y=2^{-x}$　　D. $x\to y=\log_2(1+x^2)$

2. 下列四种说法中不正确的是 ( )

A. 函数值域中每一个数都有原象

B. 函数的定义域和值域一定是不包括数 0 的数集

C. 定义域和对应法则确定后，函数值域也就确定

D. 若函数的定义域只含有一个元素，则值域也只含有一个元素

3. 表示相同函数的一组函数是 ( )

A. $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$

B. $f(x)=a^{\log_a x}$ $(a>0, a\neq 1)$，$g(x)=x$

C. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，$g(x)=1-|x|$

D. $f(x)=\log_a a^x$ $(a>0, a\neq 1)$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

4. 如果 (x, y) 在映射作用下的象是 $(x+y, x-y)$，那么 $(1, 2)$ 的原象是 ( )

A. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

5. 若集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 2\}$，从集合 A 到集合 B 的对应法则 f 分别为 ( )

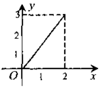
①f：$x\to y=\frac{1}{2}x$；②f：$x\to y=x-2$；

③f：$x\to y=\sqrt{x}$；④f：$x\to y=|x-2|$.

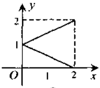
其中能构成映射的个数为 ( )

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

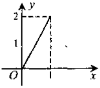
6. 若集合 $M=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 2\}$，其中能表示从集合 M 到集合 N 的函数关系的有 ( )



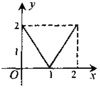
①



②



③



④

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

7. 若 $f(x)=ax^2-\sqrt{2}$，a 为一个正的常数，且 $f[f(\sqrt{2})]=-\sqrt{2}$. 那么 a 的值是 ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $2-\sqrt{2}$

C. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

8. 给出三个等式：

①$f(x+y)=f(x)+f(y)$；

②$f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$；

③$f(x\cdot y)=f(x)\times f(y)$；

则不满足其中任何一个等式的函数是 ( )

A. x^2　　B. $3x$

C. $\lg x$　　D. $\sin x$

二、填空题

9. 已知 f：$x\to y=|x|+1$ 是从集合 $A=R$ 到集合 $B=\{x\mid x>0, x\in R\}$ 的一个映射，则集合 B 中的元素 4 在集合 A 中的原象是________.

10. 集合 $A=\{3, 4\}$，$B=\{5, 6, 7\}$，那么，可建立从集合 A 到集合 B 的映射个数是________；从集合 B 到集合 A 的映射个数是________.

11. 已知 $g(x)=1-2x$，$f[g(x)]=\frac{1-x^2}{x^2}$，$(x\neq 0)$，则 $f(0)=$________.

12. 已知 $y_1=f(x)$ 表示过 $(0, -2)$ 点的一条直线，$y_2=g(x)$ 表示过 $(0, 0)$ 点的另一条直线，又 $f[g(x)]=g[f(x)]=3x-2$，则这两条直线的交点

坐标________.

三、解答题

13. 判断下列各式中哪些可确定 y 是 x 的函数？为什么？

(1) $x^2+y=1$，(2) $x+y^2=1$，

(3) $y=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-1}}$，(4) $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$.

14. 已知集合 A 到集合 $B=\left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right\}$ 的映射 f：$x\to\frac{1}{|x|-1}$，那么集合 A 中的元素最多有几个？并写出元素个数最多时的集合 A.

15. 函数 $f(x)$ 对一切实数 x，y 均有 $f(x+y)-f(y)=x\cdot(x+2y+1)$ 成立；且 $f(1)=0$.

(1) 求 $f(0)$ 的值；

(2) 当 $f(x)+2<\log_a x$，$x\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ 恒成立时，求 a 的范围.

2.2 函数的表示

[例题解析]

【例1】 (1) 求一个实系数的一次函数 $f(x)$，使得：$f\{f[f(x)]\}=8x+7$.

解：设 $f(x)=ax+b$ $(a,\ b\in R)$

又 $f\{f[f(x)]\}=a[a(ax+b)+b]+b$
$=a^3x+a^2b+ab+b=8x+7$

$\therefore\begin{cases}a^3=8\\a^2b+ab+b=7,\end{cases}$ $(a,\ b\in R)$,

$\therefore\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ 故 $f(x)=2x+1$.

【评价反思】 已知函数类型，用待定系数法. 先假定函数的解析式，由题设条件列方程，求待定系数值.

(2) 已知 $f(1-\cos x)=\sin^2 x$，求 $f(x)$.

解：令 $1-\cos x=t$ $(0\leqslant t\leqslant 2)$，

则 $\cos x=1-t$，

$\therefore f(1-\cos x)=f(t)=\sin^2 x=1-\cos^2 x$
$=1-(1-t)^2=-t^2+2t$.

故 $f(x)=-x^2+2x$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

【评价反思】 已知 $f[g(x)]$ 是关于 x 的函数，即 $f[g(x)]=F(x)$，求 $f(x)$ 的解析式，通常令 $g(x)=t$，由此能解 $x=\varphi(t)$. 将 $x=\varphi(t)$ 代人 $f[g(x)]=F(x)$ 中，求得 $f(t)$ 的解析式，再用 x 替换 t，便得 $f(x)$ 的解析式. 一定注意换元的取值范围.

【例2】 求下列函数的定义域：

(1) $y=(\sqrt{x-1}-2)^0+\log_{(x-2)}x^2$；

(2) $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$

解：(1) 由 $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\\sqrt{x-1}-2\neq 0\\x^2>0\\x-2>0\\x-2\neq 1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\geqslant 1\\x\neq 5\\x\neq 0\\x>2\\x\neq 3\end{cases}$

$\therefore$ 函数得定义域为 $(2,3)\cup(3,5)\cup(5,+\infty)$

(2) 由 $\begin{cases}25-x^2\geqslant 0,\\\cos x>0,\end{cases}$ 得

$\begin{cases}-5\leqslant x\leqslant 5,\\2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in Z)\end{cases}$

借助于数轴，解这个不等式组，得函数的定义域为

$\left[-5,\ -\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\ 5\right]$.

【评价反思】 求定义域的问题可等价转化为关于 x 的不等式（组）的求解问题，其关键是列全限制条件组；解不等式组求交集. 另外，对第（2）小题求有限个区间与无限个区间交集的方法要特别关注.

(3) 若函数 $f(2^x)$ 的定义域为 $[-1,\ 1]$，求函数 $f(\log_2 x)$ 的定义域.

解：$\because f(2^x)$ 的定义域为 $[-1,\ 1]$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$，则 $\frac{1}{2}\leqslant u=2^x\leqslant 2$，$\therefore f(u)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$，

由不等式 $\frac{1}{2}\leqslant\log_2 x\leqslant 2$，解得 $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4$，故：$f(\log_2 x)$ 的定义域为 $[\sqrt{2},\ 4]$.

【评价反思】 注意函数定义域是指自变量 x 的取值范围. 复合函数 $f(\log_2 x)$ 中的 $\log_2 x$ 与 $f(2^x)$ 中的 2^x 两者的取值范围相同，从而求得 $f(\log_2 x)$ 的定义域.

【例3】 求下列函数的值域

(1) $y=\frac{3x-1}{3x-2}$

(2) $y=x+\sqrt{2x-1}$