普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

工科数学分析基础教学辅导书

(下册)

武忠祥 主编

3

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

工科数学分析基础
教学辅导书

（下册）

武忠祥　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是“高等教育百门精品课程教材建设计划”(此计划作为整体已列入新闻出版总署“十五”国家重点图书规划)研究成果之一,是与西安交通大学马知恩和王绵森教授主编的普通高等教育“十五”国家级规划教材《工科数学分析基础》(第二版)(下册)相配套的教学辅导书。

本书每章内容分为三个部分:主要内容剖析;教学要求、典型例题与讨论题;习题选解。本书可作为工科学生学习高等数学课程的学习辅导书,并兼顾任课教师的教学需要,同时也可供其他非数学类专业的学生和教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析基础教学辅导书.下册/武忠祥主编.
北京:高等教育出版社,2007.3
ISBN 978-7-04-021198-6

Ⅰ.工… Ⅱ.武… Ⅲ.数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 019757 号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 郝 林
版式设计 马静如 **责任校对** 殷 然 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京北苑印刷有限责任公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2007年3月第1版
印　　张	24.75	印　　次	2007年3第1次印刷
字　　数	460 000	定　　价	25.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　21198-00

目 录

第一部分 主要内容剖析

第二部分 教学要求、典型例题与讨论题

第三部分　习题选解

第一部分　主要内容剖析

第五章　多元函数微分学及其应用

主要内容剖析

1. 从一维空间 $\mathbf{R}$ 到多维空间 $\mathbf{R}^n$——多元函数微积分表演的舞台

我们已经知道，一元函数微积分与无穷级数研究的主要对象是一元函数. 由于一元函数是实数集到实数集的映射，所以为了很好地研究一元微积分与无穷级数，就需要学习实数集（一维空间）$\mathbf{R}$ 中极限运算性质（包括数列的收敛性与实数集的完备性），一维空间 $\mathbf{R}$ 是一元微积分表演的舞台. 在接下来的第五、六、七章中，要学习多元微积分与微分方程，研究的对象主要是多元函数，多元函数是定义在 $n(n\geqslant 2)$ 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 上的映射，因此必须对 $\mathbf{R}^n$ 空间的代数运算与极限运算性质（特别是 $\mathbf{R}^n$ 中点列的收敛性与 $\mathbf{R}^n$ 空间的完备性）有初步的了解. 就是说，需要学习多元微积分表演舞台 $\mathbf{R}^n$ 空间的一些基本知识. 下面就 $\mathbf{R}^n$ 中点列的极限与 $\mathbf{R}^n$ 中点集的初步知识再作些说明.

(1) $\mathbf{R}^n$ 中点列的极限与 $\mathbf{R}^n$ 空间的完备性

n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中点列的极限是一维空间 $\mathbf{R}$ 中数列极限概念的直接推广，它也是刻画点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 当 $k\to\infty$ 时变化趋势的. 因此，可以几乎逐字逐句地将数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义移植到点列的极限中，只要将其中的绝对值不等式“$|x_n-a|<\varepsilon$”改为距离不等式

$$\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{k,i}-a_i)^2} < \varepsilon$$

就可以了. 实际上，这种修改并无本质上的变化，因为绝对值 $|x_n-a|$ 就是一维空间（直线）$\mathbf{R}$ 中两点之间的距离，所以 $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|$ 与 $|x_n-a|$ 的大小分别刻画了 $\mathbf{R}^n$ 中点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 与点 $\boldsymbol{a}$ 以及 $\mathbf{R}$ 中点列 $\{x_n\}$ 与点 a 的接近程度. 另外，在 $\mathbf{R}$ 中还可以用邻域来刻画这种接近程度并定义点列的极限，类似地，在 $\mathbf{R}^n$ 中也可以用邻域来定义点列的极限（见《教材》下册第 5 页），只是此时的邻域是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开球

$$U(\boldsymbol{a},\delta)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta\},$$

它也是 $\mathbf{R}$ 中邻域(开区间) $U(a,\delta)=\{x\in\mathbf{R}\mid |x-a|<\delta\}$ 的自然推广. 这就表明,只要在一个空间中能定义两点间的距离或者点的邻域,就能定义其中点列的极限.

然而,按照 $\mathbf{R}^n$ 中点列极限的上述定义,无论是研究收敛点列的性质还是求极限的方法都显得比较繁杂. 经过数学家的努力,很快发现了判断 $\mathbf{R}^n$ 中点列收敛的一个充要条件,这就是《教材》中的定理 1.1. 该定理断言, $\mathbf{R}^n$ 中点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$ 的充要条件是该点列的各个分量所构成的数列 $\{x_{k,i}\}$ 收敛于点 $\boldsymbol{a}$ 的相应分量 a_i. 这样,就将研究 $\mathbf{R}^n$ 中点列的收敛问题转化为数列收敛的相应问题,使我们很容易利用这个充要条件将收敛数列的性质和审敛准则推广到 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列,得到《教材》中的定理 1.2,1.3,1.4,并且利用求数列极限的方法求 $\mathbf{R}^n$ 中点列的极限,不需要另外再建立一些其他的法则和公式. 实际上,定理 1.1 为研究高维空间的问题提供了一个重要的思想方法,就是将高维空间的问题转化为一维(或低维)空间的相应问题,利用一维(或低维)空间的已知结论去解决高维空间中的未知问题. 这种思想方法在研究多元函数微积分中经常用到,希望读者注意学习. 现以证明定理 1.4 为例来说明这种思想方法的应用.

定理 1.4(Cauchy 收敛原理)　$\mathbf{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\mathbf{R}^n$ 中点的充要条件为 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Cauchy 点列.

证　为简单计,仅证明 $n=2$ 的情形.

必要性　设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^2$. 则由定理 1.1,对 $i=1,2$,都有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{k,i}=a_i$. 根据数列的 Cauchy 收敛原理,每个 $\{x_{k,i}\}$ 都是 Cauchy 数列,即

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N_i\in\mathbf{N}_+$,使得 $\forall k>N_i$ 及 $p\in\mathbf{N}_+$,恒有

$$|x_{k+p,i}-x_{k,i}|<\varepsilon\ (i=1,2).$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则 $\forall\varepsilon>0$,当 $k>N$, $p\in\mathbf{N}_+$ 时,恒有

$$\|\boldsymbol{x}_{k+p}-\boldsymbol{x}_k\|=\sqrt{(x_{k+p,1}-x_{k,1})^2+(x_{k+p,2}-x_{k,2})^2}<\sqrt{2}\varepsilon,$$

故 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的 Cauchy 点列.

充分性　设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的 Cauchy 点列,则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$,使得对 $k>N$ 及 $p\in\mathbf{N}_+$,恒有 $\|\boldsymbol{x}_{k+p}-\boldsymbol{x}_k\|<\varepsilon$. 由于对 $i=1,2$,都有

$$|x_{k+p,i}-x_{k,i}|\leqslant\|\boldsymbol{x}_{k+p}-\boldsymbol{x}_k\|,$$

所以, $\forall k>N$ 及 $p\in\mathbf{N}_+$,恒有 $|x_{k+p,i}-x_{k,i}|<\varepsilon$,故每个 $\{x_{k,i}\}$ 都是 Cauchy 数列. 根据数列的 Cauchy 收敛原理,对 $i=1,2$,都有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{k,i}=a_i$. 由定理 1.1 知 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)\in\mathbf{R}^2$.

实际上,定理 1.4 是刻画实数(一维空间) $\mathbf{R}$ 完备性的数列的 Cauchy 收敛原理的自然推广,它刻画了 n 维 Euclid 空间的完备性. 就是说, $\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列

(即 Cauchy 点列)的极限仍在该空间中,在 $\mathbf{R}^n$ 中的极限运算是畅行无阻的,从而使 $\mathbf{R}^n$ 空间为多元函数微积分提供了一个完备的表演舞台. 读者可能还记得,实数完备性除了可以用数列的 Cauchy 收敛原理刻画外,还可以用与其等价的确界存在定理、单调有界准则以及 Bolzano - Weierstrass 定理来刻画. 由于空间 $\mathbf{R}^n$ 中的元素都是向量,而向量不能比较大小,所以与大小顺序有关的确界存在定理和单调有界准则都不能推广到 $\mathbf{R}^n$ 中来,《教材》中仅列出了 $\mathbf{R}^n$ 中的 Bolzano - Weierstrass 定理. 实际上,正是由于上述原因,现代数学中都以 Cauchy 收敛原理作为空间完备性的定义.

(2) $\mathbf{R}^n$ 中点集的基本知识

如(1)中所述,$\mathbf{R}^n$ 中点列的极限可以借助于球形邻域 $U(\boldsymbol{a},\delta)$ 与点列之间的位置关系来定义,由此可见,微积分中的许多问题都与球形邻域以及由其产生的集合(特别是开集和闭集等)理论密切相关. 因此,适当介绍一些 $\mathbf{R}^n$ 中点集的基本知识,对于学习多元函数微积分是有益的. 实际上,《教材》中所讲的 $\mathbf{R}^n$ 中点集的知识对一维空间 $\mathbf{R}$ 也是适用的,而且一元函数微积分理论也可在 $\mathbf{R}$ 中点集(开集、闭集等)的基础上展开. 只是为了使初学者集中精力更好地理解微积分的基本思想方法,上册中才将所研究的一元函数微积分理论大都限定在区间上,而没有介绍一维空间 $\mathbf{R}$ 中的点集知识.

开集、闭集和区域是几类常用的点集. 为了理解这些概念,关键在于弄清 $\mathbf{R}^n$ 中点集的内点、外点、边界点和聚点的定义. 这几类点都可以通过邻域来定义,如果用 $\mathbf{R}^2$ 空间中的图形来表示,它们都具有很形象很直观的几何意义. 为了便于读者复习,将它们的定义与含义列表如下,其中 A 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集,即 $A \subseteq \mathbf{R}^n$.

名　称	定　义	含　义
$\boldsymbol{a}$ 是 A 的内点 ($\boldsymbol{a} \in \operatorname{int} A$)	$\exists \delta>0$,使 $U(\boldsymbol{a},\delta) \subseteq A$	存在 $\boldsymbol{a}$ 的一个邻域,使它的每个点都属于 A
$\boldsymbol{a}$ 是 A 的外点 ($\boldsymbol{a} \in \operatorname{ext} A$)	$\exists \delta>0$,使 $U(\boldsymbol{a},\delta) \cap A=\varnothing$	存在 $\boldsymbol{a}$ 的一个邻域,使它的每个点都不属于 A
$\boldsymbol{a}$ 是 A 的边界点 ($\boldsymbol{a} \in \partial A$)	$\forall \delta>0, U(\boldsymbol{a},\delta) \cap A \neq \varnothing$,且 $U(\boldsymbol{a},\delta) \cap A^c \neq \varnothing$	$\boldsymbol{a}$ 的任何邻域中既有 A 中的点,又有不是 A 中的点
$\boldsymbol{a}$ 是 A 的聚点 ($\boldsymbol{a} \in A'$)	$\forall \delta>0, \mathring{U}(\boldsymbol{a},\delta) \cap A \neq \varnothing$	$\boldsymbol{a}$ 的任何去心邻域中都含有 A 中的点

下面再作几点说明,它们往往是初学者容易混淆的.

1°　A 的内点必是 A 中的点,外点不是 A 中的点,边界点与聚点可能是也可

能不是 A 中的点；

2° 《教材》中 A 的聚点 $\boldsymbol{a}$ 是利用极限来定义的：若存在 A 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，$\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}$，使 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}(k \to \infty)$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为 A 的一个聚点. 表中的定义是 $\boldsymbol{a}$ 为聚点的一个充要条件，因此也能作为定义，而且更为形象直观. 由此易见，A 的内点与边界点（除孤立点外）都是 A 的聚点. 根据开集和区域（含闭区域）的定义，开集和区域中的点都是聚点；

3° 闭集是指包含它的所有聚点的集. 因此，集 A 是闭集的充要条件为其中任一收敛点列的极限 $\boldsymbol{a}$ 都在 A 中. 这就是说，闭集是关于极限运算封闭的集合. 虽然闭集 A 的聚点都属于 A，但闭集 A 中的点不一定都是聚点. 例如，有限点集是闭集，但其中的每个点都不是它的聚点；

4° 开集与闭集的关系：A 是开集的充要条件为 A^c 是闭集. 由此，利用对偶原理可以证明开集与闭集的一些对偶的本质属性（见《教材》）. 但不能认为开集和闭集是两个对立的概念，从而得到一个集合"非开即闭"的结论. 事实上，不但存在着很多非开非闭的集合（例如有理数集、无理数集等），而且还存在着既开且闭的集合（如空集 $\varnothing$ 与全空间 $\mathbf{R}^n$）.

2. 关于多元数量值函数的极限与连续性

我们以二元函数的极限与连续性为例，着重说明它们的概念以及与一元函数的区别.

(1) 二重极限的概念

在现行的用于非数学类专业的微积分教材中，关于二重极限的定义大体上有两种：

定义 1 设 f 是定义在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某去心邻域 $\mathring{U}(P_0)$ 内的二元函数，a 为一实常数. 若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当点 $P(x,y) \in \mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，恒有

$$|f(x,y) - a| < \varepsilon,$$

则称 a 为 $f(x,y)$ 当 $(x,y) \to (x_0,y_0)$ 时的二重极限.

定义 2 设 f 是定义在点集 $A \subseteq \mathbf{R}^2$ 上的二元函数，$P_0(x_0,y_0)$ 是 A 的一个聚点，$a \in \mathbf{R}$ 是一常数. 若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当点 $P(x,y) \in \mathring{U}(P_0,\delta) \cap A$ 时，恒有

$$|f(x,y) - a| < \varepsilon,$$

则称 a 为 $f(x,y)$ 当 $(x,y) \to (x_0,y_0)$ 时的二重极限.

定义 1 是一元函数 $y = f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限定义的直接推广，定义 2 则是我们的《教材》中所采用的定义方法. 从表面上看，定义 2 似乎显得抽象，不易理

解，实际上，它也是一元函数极限定义的自然推广.《教材》中从一元函数极限是研究当 $x\to x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 变化趋势这个基本思想出发，说明了一方面函数的变化趋势与 x_0 是否在 f 的定义域中无关，另一方面，又应要求 f 在 x_0 的任何去心邻域内都含有使 f 有定义的点（不需要 f 在其中每个点都有定义），这就是说，在定义函数的极限时，应当要求 x_0 是 f 定义域的聚点. 因此，定义 2 是一元函数极限定义的合理推广.

然而，作为一元函数极限定义的两种不同推广，二重极限的上述两种定义是有显著区别的. 定义 1 要求 f 在 P_0 的去心邻域 $\mathring{U}(P_0)$ 内的每一点都有定义，因而要求 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 中的每个点都满足不等式 $|f(x,y)-a|<\varepsilon$；而定义 2 则允许 f 在 P_0 的任一去心邻域内都有使 f 无定义的点，并且仅要求 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 内使 f 有定义的点满足该不等式. 上述差异使定义 2 较定义 1 适用范围广泛得多. 例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{xy}, & xy\neq 0,\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的定义域是挖去两个坐标轴（但包含原点）的平面. 由于原点 $(0,0)$ 的任何邻域中都包含使该函数无定义的点，所以不能用定义 1 讨论当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限. 又如，“十字架”函数

$$f(x,y)=1,D(f)=\{(x,y)\mid xy=0\}$$

仅定义在两个坐标轴上，它的图像是平面 $z=1$ 上两条平行于 x 轴与 y 轴的相互垂直的直线，也不能用定义 1 讨论当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限. 但是，由于 $(0,0)$ 是定义域的聚点，所以它们都能用定义 2 求得当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限，并且极限值为 1.

顺便指出，在二重极限的定义中，可以用去心方邻域

$$\mathring{V}((x_0,y_0),\delta)=\{(x,y)\mid |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\}\setminus\{(x_0,y_0)\}$$

代替去心圆邻域 $\mathring{U}((x_0,y_0),\delta)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}\setminus\{(x_0,y_0)\}$. 也就是说，用去心方邻域 $\mathring{V}((x_0,y_0),\delta\}$ 定义的二重极限与用去心圆邻域 $\mathring{U}((x_0,y_0),\delta)$ 定义的二重极限是等价的. 这是因为在极限的定义中，我们所关心的只是对于任给的 $\varepsilon>0$，是否存在 (x_0,y_0) 的一个去心邻域，使当 (x,y) 在这

个邻域中时有$|f(x,y)-a|<\varepsilon$,至于这个邻域是去心的圆邻域还是去心的方邻域不是本质性的. 实际上,在平面$\mathbf{R}^2$上,去心方邻域$\mathring{V}((x_0,y_0),\delta)$就是去掉中心$(x_0,y_0)$的边长为$\delta$的正方形内部. 由图5.1易见,在任一方邻域内总能作一同心的圆邻域,反之亦然. 因此,只要当(x,y)在(x_0,y_0)的某一去心方邻域内时恒有不等式$|f(x,y)-a|<\varepsilon$成立,那么当(x,y)在此方邻域内的同心去心圆邻域中时该不等式也成立;反过来也对.

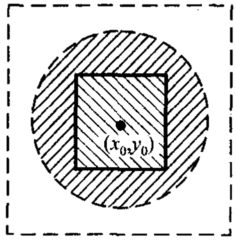

图5.1

但应注意,去心方邻域不能用满足不等式

$$0<|x-x_0|<\delta,0<|y-y_0|<\delta$$

的所有(x,y)的集合来表示,因为此二不等式表示去掉直线$x=x_0$与$y=y_0$的中心为(x_0,y_0),边长为δ的正方形内部.

(2) 极限概念推广到二元函数后产生的本质变化

由于自变量的增多,在二重极限中出现了一些比一元函数极限复杂得多的重要变化. 在一元函数极限中,x只能从x_0的左右两侧沿直线趋近于x_0,所以$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$的充要条件为左右极限存在且都等于$a$. 在二重极限中,点$(x,y)$在平面点集(定义域)$A$中趋于$(x_0,y_0)$的路径可能有无穷多种. 既可以沿直线趋于$(x_0,y_0)$,也可以沿各种各样的曲线趋近于$(x_0,y_0)$. 因此,二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=a$的定义中蕴含着当$(x,y)$在$A$中以任何路径和任何方式趋于$(x_0,y_0)$时,$f(x,y)$都趋近于同一常数$a$的要求. 这就使我们判断二重极限的存在性以及求二重极限的值产生了更多的困难. 由于这两个问题不是讨论的重点,所以《教材》中只举了利用定义证明二重极限存在的例子(在本书的《典型例题》中还将介绍几种求简单二重极限的方法),没有就这两个问题再作深入的研究. 然而,二重极限定义的上述要求为我们判定二重极限不存在提供了简便的方法:即若当(x,y)沿两种不同的路径或方式趋近于(x_0,y_0)时$f(x,y)$趋近于不同的数,或者当(x,y)沿某一路径或方式趋于(x_0,y_0)时$f(x,y)$不趋于一个确定的数,则可断定二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$不存在. 注意,即使当$(x,y)$沿任何直线趋于$(x_0,y_0)$时$f(x,y)$都趋于同一常数,也不能由此断定二重极限存在,还需要考察沿曲线趋于(x_0,y_0)的情况.

例1　考察二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & |y|\geqslant x^2\text{ 或 }y=0,\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时的极限.

解　易见，当(x,y)沿任何直线$l:y=kx$（k为任意常数）趋于$(0,0)$时，都有$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$（图5.2），但当$(x,y)$沿抛物线$L:y=\frac{1}{2}x^2$趋于$(0,0)$时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=1$. 所以$f$在$(0,0)$处的二重极限不存在.

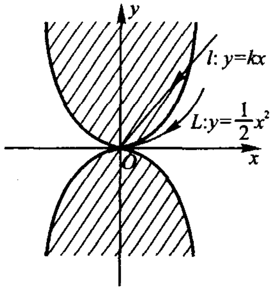

图 5.2

***(3) 二重极限与二次极限**

对二元函数来说，常常需要讨论另一种与二重极限有本质差异的极限——**二次极限**（或**累次极限**）：$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$与$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$. 从几何直观上来看（图5.3），取二次极限$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$的过程是：动点$P(x,y)$先沿平行于$x$轴的直线$y=y$趋于$(x_0,y)$，若里层极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$存在，设$Y$表示使该极限存在的$y$的集合，则该极限是$y\in Y$的函数$F(y)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$；然后再让$(x_0,y)$沿平行于$y$轴的直线$x=x_0$趋于$(x_0,y_0)$，考察函数$F(y)$的极限$\lim\limits_{y\to y_0}F(y)$. 若此极限也存在，则称之为**先对 x 后对 y** 的二次极限. 类似地，称$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$为**先对 y 后对 x** 的二次极限. 所以二次极限实际上属于一元函数极限的范畴，是接连两次求一元函数的极限. 与刻画$f(x,y)$当(x,y)在(x_0,y_0)的充分小邻域内以任意方式沿任意路径趋于(x_0,y_0)时变化趋势的二重极限有着本质的区别.

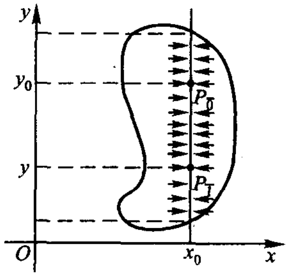

图 5.3

现在自然要问：两种不同顺序的二次极限是否同时存在，若存在是否相等？二次极限与二重极限的存在性之间有无必然的关系？这是两个很复杂的问题. 一般说来，两种二次极限不一定同时存在，即便都存在，也未必相等. 就是说，不能随便交换二次极限的顺序. 至于二重极限与二次极限的存在性之间也没有必然的蕴含关系. 举例说明如下.

例 2　一种顺序的二次极限存在不能保证另一种也存在以及两种都存在但不相等的例子：

1°　$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{x}=0$，但$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\frac{y}{x}$不存在；

2°　$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}=1$，但$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}=-1$.

例 3 二重极限存在但二次极限不存在的例子：

对函数$f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x},xy\neq 0$，由于

$$|f(x,y)|\leqslant|x|+|y|\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2},$$

所以由定义易见二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$. 但由于$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{y}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}y\sin\dfrac{1}{x}$不存在，故二次极限$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$不存在. 同理，另一种二次极限也不存在.

例 4 两个二次极限存在且相等但二重极限不存在的例子：

设函数

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},x^2+y^2\neq 0.$$

易见$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$，但二重极限不存在（见《教材》第五章例2.6）.

然而，可以证明：若二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$存在，并且两个二次极限的里层极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$与$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$都存在，则两个二次极限都存在且与二重极限相等.

(4) 关于二元函数的连续性

由于二元函数的连续性是建立在二重极限基础上的，因此，按照(1)中二重极限的两种定义，容易得到二元函数连续性的两种定义：

定义 1 设函数$f(x,y)$定义在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域内，若$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称$f(x,y)$在$P_0$处连续. 若$f(x,y)$在区域$D\subseteq\mathbf{R}^2$的每一点连续，则称$f(x,y)$为$D$上的连续函数.

定义 2 设函数f定义在点集$A\subseteq\mathbf{R}^2$上，$P_0(x_0,y_0)\in A$且为A的聚点. 若$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称$f$在$P_0$连续. 若$f$在$A$中的每一点连续（注意，这句话蕴含了$A$中的每个点都是$A$的聚点），则称$f$为$A$上的连续函数.

由于这两个定义建立在两种不同二重极限定义的基础上，所以它们也有显著差异. 定义1要求函数f在P_0的邻域内每一点上都有定义，因此要求$P(x,y)$在P_0的邻域内任意趋近（即P趋近于P_0的路径可以通过该邻域内任何点）于(x_0,y_0)时，极限等式$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$都成立. 定义2允许$f$在$P_0$的任一邻域内可以有使$f$无定义的点，因而只要求当$P$在$P_0$的邻域内沿使$f$有定义（集$A$中）的点趋于$P_0$时，上述极限等式成立. 这表明，定义2比定义1的要求宽松，因而适用范围更加广泛. 例如，(1)中所举的函数$f(x,y)=$