简明微积分

（第三版）

龚 昇 张声雷 编

中国科学技术大学出版社

简明微积分

（第三版）

龚 昇 张声雷 编

中国科学技术大学出版社出版
（安徽省合肥市金寨路96号，邮编：230026）
中国科学技术大学印刷厂印刷
中国科学技术大学出版社发行

开本：850×1168 印张：20.875 字数：542千
1976年6月第3版 1997年6月第2次印刷
印数：3001—8000册
ISBN7-312-00920-4/O·193 定价：20.00元

第二版前言

自从1958年中国科学技术大学成立以来，我有多次从事非数学专业的高等数学课程的教学工作的机会.在实际教学工作中，感到有对这门课程进行教学改革的必要，于是于1965年萌发了在中国科学技术大学近代物理系搞一个试点班的想法.当时一面讲、一面写，希望课讲完，讲义也就有了个初稿，可惜由于10年浩劫而中断.直到浩劫结束，一切重新开始，于1978年由人民教育出版社出版讲义的第一册——《简明微积分》，直到1981年3册全部出齐.这是一本小书，从某种意义上讲，是反映了我对微积分的认识与看法，读者也许可以发现，其在内容以及处理方法上与国内通行的一些高等数学的教科书相比较，是有自己的特色的，之所以起名“简明微积分”是因为我认为:非数学专业高等数学这门课程讲的是微分与积分这对矛盾，起名微积分比高等数学更切题;还因为我认为:微积分的主要内容也就是这些，与其繁琐不如简明，这可以说是我写这本小书的一些主导思想.这本教材在中国科学技术大学已经用了10多年了，从实际教学效果来看，应该说是令人满意的.同时在10多年的教学过程中也发现了有些地方需要作些补充，有些地方需要补缺，于是由张声雷、朱国城、毛瑞庭、汪芳庭等四位同志花了很大力气，在总的框架不动、原有的特色保留的基础上，仔细推敲、反复斟酌，对本书进行了修订，合订成一册，由中国科学技术大学出版社再版出版.我十分感谢这四位老同事的辛勤劳动.10多年来以本书为教材的广大师生们也曾对本书提出过不少有益的意见，我也同样十分感谢.这本小书若经过修订再版后，可以更好地为广大师生服务，那会是一件使我很愉快的事情.

龚　昇

1992年2月

第一版前言

1965年,在中国科学技术大学近代物理系搞一个高等数学试点班时,我与张声雷同志合写了这本《简明微积分》.

当时我校非数学专业的高等数学课程,在教学工作中存在着三个问题:一是新同学刚入大学,学习高等数学这门主要课程时,普遍感到进度快、难度大,与中学数学距离较大,有不少困难;二是与物理课程的配合问题,物理上要用到的数学知识,却要到较后才能讲到,既影响物理教学,也影响数学的教学质量;三是学生学了这门课往往消化不良、掌握不牢、不会灵活应用.怎样才能改变这个局面呢?

毛主席教导我们:"在复杂的事物的发展过程中,有许多的矛盾存在,其中必有一种是主要的矛盾,由于它的存在和发展,规定或影响着其他矛盾的存在和发展."高等数学这门课程实际上讲的是微分和定积分这一对矛盾,而以往在教学中这对主要矛盾十分不突出.由于同学未能掌握住主要矛盾,以致学到的东西不易串起来,容易忘掉.我们要使同学不仅得到一颗颗的珍珠,而且应该使他们得到一串珍珠,而把这些珍珠串起来的线,应该是这门课程的主要矛盾,所以在讲课中,就把这对主要矛盾及早引出,尽力突出.

在第一章中,首先介绍了定积分和微分的概念,然后通过微积分基本定理揭示它们如何成为对立统一的;第二章讲运算时,强调了这对主要矛盾在运算过程中的体现,指出微分和积分之间的紧密关系;第三章讲应用,训练同学用微积分作工具处理实际问题,特别注意与物理课程相配合,在用的过程中更牢固、更灵活地掌握这对主要矛盾;第四章讲的是常微分方程,把它看作微分和积分这一对矛盾的进一步发展和应用.

第二册讲多变量微积分时,应用外微分形式讲清楚微分和积分

是如何成为一对矛盾的．在本书第三册要讲 ε-δ 语言以及富氏分析等，并强调连续与离散的关系，使同学在前面学习的基础上更深刻地认识微积分这一对矛盾．

在教学过程中，在讲述微分和积分这对主要矛盾的同时，也指出数学中的一些基本矛盾，如：连续与离散，有限与无限，必然与偶然，数与形……等等，这对同学深入了解与掌握课程内容是有好处的．

关于编写这套《简明微积分》的想法，我曾写过一篇短文："对高等数学课程改革的一些尝试"，发表在《自然辩证法研究通讯》1966年第1期上．希望进一步了解想法的读者，请参阅这篇短文．《简明微积分》第一册现在出版了，除了一些小的修改外，基本上是13年前写的稿子．由于自己水平不高，又缺乏足够的教学实践，本书肯定有很多缺点、错误，诚恳地希望广大读者给予批评指正．

龚　昇

1978年3月

目　次

第一章　微积分的概念

1.1 函　数　与　极　限

1.1.1　数列极限与函数极限

我们先介绍一下极限的概念，而不予以证明及深入的讨论.

对于无穷数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

来说，当项数 n 无限增大时，数列的项如果无限趋近于一个固定的常数 A，就是说，无论预先给定怎样小的正数，在数列里都能找到一项，从这一项起，以后所有项与 A 的差的绝对值，都小于预先给定的小的正数，那么固定常数 A 就叫做这个无穷数列的极限，记作

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A.$$

如果两个数列有极限，那么，这两个数列各对应项的和、差、积、商组成的数列的极限，分别等于这两个数列的极限的和、差、积、商(作为除数的数列的极限不能是零).

就是说，如果 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n \to \infty} b_n = B$，那末

$$\lim_{n \to \infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B,$$

$$\lim_{n + \infty}(a_n \cdot b_n) = AB,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

如果 k 为常数，那么

$$\lim_{n\to\infty} k \cdot a_n = kA.$$

再如果有 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = C$，且 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$，则

$$A \leqslant B \leqslant C.$$

而对于函数 $y=f(x)$，如果当自变量 x 无限接近 a 时，函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个固定的常数 A，那么这个常数 A 就叫做函数 $y=f(x)$ 当 x 趋向于 a 时的极限，记作

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

这里，a 可以是有限数，也可以是无穷大.

和数列的情形相仿，有下述结果：若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 都存在且有限，则有

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x).\ (\text{假定} \lim_{x\to a} g(x) \neq 0)$$

此外，如在点 a 的附近成立不等式

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x),$$

且 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$.

关于极限的概念，将在本书第九章中严格、仔细地加以讨论.

1.1.2 连续函数

当我们观察或研究客观世界的各种过程时，会遇到很多不同的量，这些量一般来说都是在不断变化的，这是客观世界不断变化、不断运动、不断发展在量的方面的表现. 例如，由于热胀冷缩的原因，金属杆的长度 L 是依赖于温度 T 的，由实验知道，

$$L = L_0(1 + \alpha T),$$

这里 L_0 表示在 0℃ 时金属杆的长度，α 叫做线胀系数，上面的关系就是长度 L 与温度 T 之间的一个简单的函数关系. L 和 T 是变化

着的量，叫做变量.

当然，任何过程中的变量都有一定的变化范围，即变量所能取的数值有一定的限制，如物体的温度永远不会低于 -273℃. 变量的变化范围常常是一个区间，而区间有开的、有闭的等等. 适合不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的全体记为 $[a, b]$，称为闭区间. 适合不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的全体记为 (a, b)，称为开区间. 适合不等式 $a \leqslant x < b$ 的实数 x 的全体记为 $[a, b)$. 同样，读者可以不难理解 $(a, b]$，$[a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, +\infty)$ 等.

但是在某一特定问题中，某些因素的变化极小，因而可以看作不变，这时相应的量叫做常量. 例如，地面上自由落体的重力加速度 g 在一定的范围内(例如在北京市的范围内)是看做常量的. 还有一种表现变化事物之间的一定关系的量也看作是常量，例如，无论一个圆的直径如何变化，相应的圆周长随着变化，但周长与直径之比却是不变的，是个常量(即 $\pi = 3.14159265\cdots$).

我们知道，客观世界中各个事物是互相联系、互相依赖与互相制约的，因此，从量的侧面来看，各个变量之间也是相互依赖、相互制约的，变量之间的这种互相依赖的关系叫做函数关系.

例 1 物体从离地面某一高度处自由落下，设经过时间 t 落下的距离为 s，s 与 t 之间的关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 表示重力加速度.

例 2 一天中气温 θ 与时间 t 是两个变量，某日气温的自动记录仪记录了这两者的关系如图 1.1. 从图可确定某一时刻 t_0 相应的气温 θ_0.

例 3 寄往外埠的信件，重量在 20g 以下者邮资为 20 分，每增加 20g，邮资增加 20 分，因此邮资是重量 x 的函数，可以记作

$$y = \begin{cases} 20, & 0 \leqslant x \leqslant 20; \\ 40, & 20 < x \leqslant 40; \\ 60, & 40 < x \leqslant 60; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

作图如图 1.2.

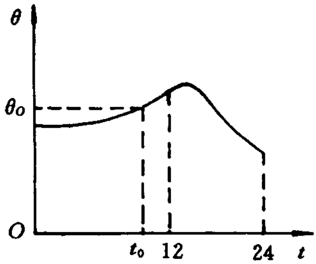

图 1.1

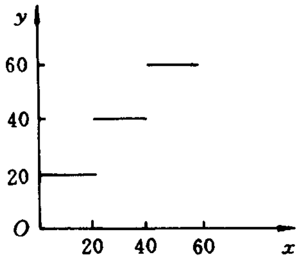

图 1.2

从这些例子可以看出，所谓函数关系，就是两个变量之间的一种对应规律，依据它，可以从一个变量 x 所能取到的每个值，确定出另一个变量 y 的相应值. 这种关系一般地常用 $y=f(x)$ 表示，即 y 是 x 的函数，符号 f 表示对应规律，x 称为自变量，y 称为因变量. 自变量变化的范围称为函数的定义域，函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的值记为 $f(a)$，函数值全体称为函数 $f(x)$ 的值域.

在很多自然现象中，遇到的函数往往是“连续”的. 例如，一个质点运动时，它的一个坐标 x 就是时间 t 的连续函数 $x=f(t)$，因为质

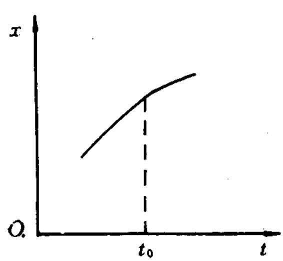

图 1.3

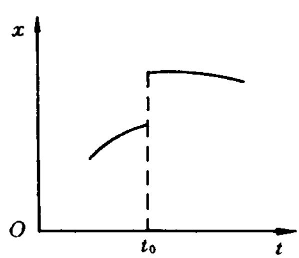

图 1.4

点从一个位置过渡到另一位置时,它必须经过一切中间位置.函数 $x = f(t)$的图形如图 1.3,这是一条连续不断的曲线.考察其中的一个时刻,例如 $t = t_0$.当 t 在 t_0 处有很小变化 Δt 时,$f(t)$也相应地有很小的变化 $\Delta x = f(t+\Delta t) - f(t)$,且当 $\Delta t \to 0$ 时,Δx 也趋向于零,即当 $t \to t_0$ 时,有 $f(t) \to f(t_0)$.反之,如果当 $\Delta t \to 0$ 时,$f(t)$的相应的变化 $\Delta x = f(t+\Delta t) - f(t)$不趋于零,那么曲线在 $t = t_0$ 处就会有一间断,如图 1.4.

一般来说,函数 $f(t)$在 $t = t_0$ 点处连续,是指$\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$成立,否则称为间断.由图 1.3 也可看出,如 $f(x)$在 t_0 点处连续,且 $f(t_0) > 0$,则在 t_0 的附近 $f(t) > 0$..

如 $x = f(t)$在闭区间 $a \leqslant t \leqslant b$(或开区间 $a < t < b$)上每点都连续,则称 $f(t)$为$[a, b]$(或(a, b))上的连续函数.

设 $f(t)$是$[a, b]$上的连续函数,又设 $f(a)$与 $f(b)$有相反的符号,即点$(a, f(a))$,$(b, f(b))$是处在 t 轴上下不同的两侧.因为 $x = f(t)$是连续函数,所以 $x = f(t)$的图形是一条联接点$(a, f(a))$及($(b, f(b))$的连续曲线,它必定穿过 t 轴(图 1.5),即在(a, b)中至少有一点 c,使 $f(c) = 0$.从这里可以推出:若 $f(t)$在$[a, b]$上连续,r 是介于$f(a)$与 $f(b)$之间的任一数,则必有一点 $c(a < c < b)$,使 $f(c) = r$.这只要考虑函数 $F(t) = f(t) - r$ 即可.显然 $F(t)$仍为$[a, b]$上的连续函数,且 $F(a) = f(a) - r$,与 $F(b) = f(b) - r$ 异

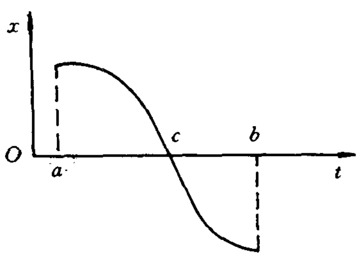

图 1.5

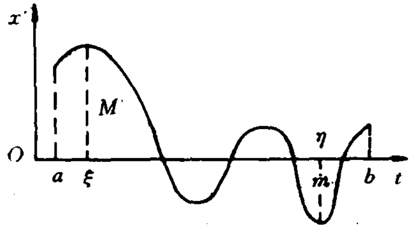

图 1.6