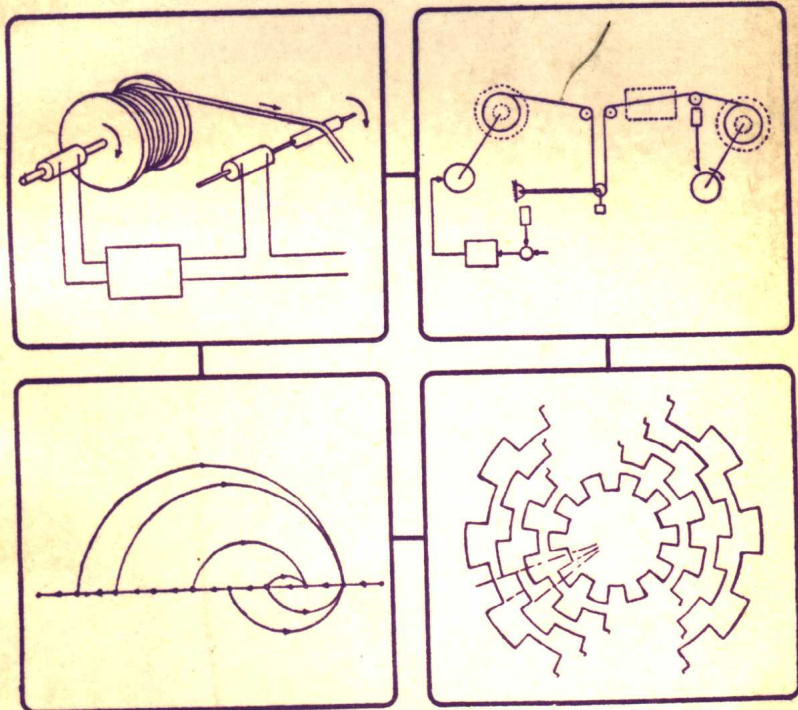


自動控制系統

Automatic Control Systems

THIRD EDITION BENJAMIN C. KUO

下冊 余政光譯



大中國圖書公司印行

TP11
9/2

大專用書

自動控制系統

Automatic Control Systems

Third Edition Benjamin-C. Kuo

下 冊 余政光 譯

大中國圖書公司印行



版權所有・翻印必究

譯者：余政光
發行人：薛瑜
出版者：大中國圖書公司
印刷者：

台北市重慶南路一段66號
電話：3111487 郵撥：2619號

登記證：局版台業字第0653號
中華民國六十七年三月初版
基本定價四元

編號：753

自動控制系統

下 冊

目 錄

第七章 控制系統的穩定性

7-1 引 言.....	1
7-2 穩定性，特性方程式與狀態過渡矩陣.....	2
7-3 有輸入的線性非時變系統的穩定性.....	5
7-4 線性控制系統的穩定性求法.....	7
7-5 羅斯 - 赫維茲法.....	9
7-6 耐氏法.....	18
7-7 耐氏法的應用.....	33
7-8 增加 $G(s)H(s)$ 的極點和零點對於耐氏軌跡的形狀之 影響.....	43
7-9 多迴路系統的穩定性.....	47
7-10 有時間延遲的線性控制系統之穩定性.....	52
7-11 非線性系統的穩定性——波普夫法.....	55

第八章 根軌跡技術

8-1 引 言.....	69
8-2 根軌跡的基本條件.....	70
8-3 完全根軌跡的作圖.....	75

8-4 利用根軌跡技術於解多項式之根	112
8-5 根軌跡作圖的一些重要概念	117
8-6 根輪廓線 —— 多參數變化	127
8-7 含時間延遲系統之根軌跡	136
8-8 根軌跡與極圖之關係	149
8-9 間斷控制系統的根軌跡	152

第九章 控制系統的頻域分析

9-1 引 言	161
9-2 頻域特性	165
9-3 二次系統的 M_P , ω_P 及 BW	166
9-4 加零點到開路轉移函數的影響	171
9-5 加極點到開路轉移函數之影響	175
9-6 相對穩定度 —— 邊際增益, 邊際相位及 M_P	177
9-7 相對穩定度與波德圖的波幅斜率之關係	187
9-8 $G(j\omega)$ 平面之定 M 軌跡	189
9-9 在 $G(j\omega)$ 平面的定相軌跡	193
9-10 在波幅對相位平面的定 M 圓與定 N 圓 —— 尼可圖表	195
9-11 非單一回授系統的閉路頻率響應分析	201
9-12 在頻域中靈敏度之研討	202

第十章 控制系統之設計

10-1 導 論	210
10-2 控制系統之傳統設計	217
10-3 相導補償	223
10-4 相滯補償	244

10-5 滯——導補償	262
10-6 橋式T形網路補償	267

第十一章 最佳控制概論

11-1 導 論	286
11-2 分解設計	288
11-3 參數最佳	300
11-4 以特徵值設計系統——狀態控制的一種應用	303
11-5 狀態偵測設計	307
11-6 最佳線性調整系統之設計	321
11-7 含部份狀態回授之設計	343
附錄A 頻域圖	358
附錄B 拉氏轉表	381
附錄C 拉格蘭基倍數法	385

自動控制系統

下 冊

第七章 控制系統的穩定性

7-1 引 言

在第 6 章所討論的線性回授控制系統，其暫態響應受特性方程式的根位置控制。基本上，線性回授系統的設計可視為一種特性方程式根位置的安排問題，我們將在第 11 章討論如何利用任意設定的特性方程式的根，以設計一系統；但這些根必須滿足系統的條件。

在設計控制系統的許多方法中，最主要的目的就是使系統在所有的時間內均為穩定。至於決定系統的穩定性亦有許多方法。通常我們將系統分為有用的和無用的，亦即設系統是穩定的就為有用的；系統是不穩定的就為無用的。在設計和分析線性控制系統，我們都着重於穩定性的研究，這穩定性可分為絕對穩定性和相對穩定性（Absolute stability and relative stability）。絕對穩定性指出系統為穩定或不穩定；相對穩定性可測出系統的穩定度。在本章我們以討論系統的絕對穩定性為主題，即討論系統為穩定或不穩定。

由第 6 章的例題我們可將系統的暫態響應和特性方程式的根兩者的關係歸納如下：

1. 若特性方程式所有的根均在 s 一平面的左半面，則當時間趨於無窮大時，由初始條件所引起的響應將減為零。

2. 若一對或多對的根在 s 一平面的虛軸上，且無任何根在 s 一

平面的右半面，則由初始條件所引起的響應將為無阻尼的正弦振盪 (Undamped sinusoidal oscillations)。

3 若一個或多個根在 s 一平面的右半面，則由初始條件所引起的響應，其大小將隨時間增加而增大。

以上 2, 3 兩種情況在線性系統中被稱為不穩定的情況。這裡我們所討論的為零輸入響應，因為其響應僅由初始條件所引起。

7-2 穩定性, 特性方程式與狀態過渡矩陣 (Stability, Characteristic Equation, and the State Transition Matrix)

我們可由特性方程式的根位置或狀態過渡矩陣 $\phi(t)$ 的行為以決定零輸入的線性非時變系統的穩定性。

設一線性非時變系統可由狀態方程式

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \dots\dots\dots (7-1)$$

描述之，此處 $\mathbf{X}(t)$ 為狀態向量， $\mathbf{u}(t)$ 為輸入向量。對於零輸入， $\mathbf{X}(t) = 0$ 滿足齊次狀態方程式 $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$ 且 $\mathbf{X}(t) = 0$ 被定義為系統的平衡狀態。零輸入的穩定性被定義如下：若零輸入響應 $\mathbf{X}(t)$ 以有限的初始狀態 $\mathbf{X}(t_0)$ 為條件，當 $t \rightarrow \infty$ 時，其響應趨近於平衡狀態 $\mathbf{X}(t) = 0$ ，則謂此系統為穩定；否則為不穩定。這種型式的穩定性被稱為漸近的穩定性 (Asymptotic stability)。

以更清楚的數學方式將上述的定義重述如下：對於零輸入，若任意有限的初始狀態 $\mathbf{X}(t_0)$ 有一正數 M [由 $\mathbf{X}(t_0)$ 決定] 使得

$$(1) \quad \|\mathbf{X}(t)\| < M \quad \text{對於所有 } t \geq t_0 \quad \dots\dots\dots (7-2)$$

和

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}(t)\| = 0 \quad \dots\dots\dots (7-3)$$

則謂此線性非時變系統為穩定。此處 $\|X(t)\|$ 表示狀態向量 $X(t)$ 的模根 (Norm)，亦即表向量 $X(t)$ 的長度，通常 $\|X\|$ 為一實數。或

$$\|X(t)\| = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2(t) \right]^{1/2} \dots\dots\dots (7-4)$$

在式 (7-2) 說明對於任何 $t \geq t_0$ 時，狀態的過渡性 (the transition of state) 均可以向量 $X(t)$ 的模根表示，但 $\|X(t)\|$ 必須為有界限的。又式 (7-3) 說明在時間趨於無窮大時，系統必須達到它的平衡狀態。

討論狀態空間的穩定性可由二階的情況來說明。對於有限的初始狀態 $X(t_0)$ ，在 $t > t_0$ 時，其 $X(t)$ 的過渡可由圖 7-1 的狀態軌跡表示。由圖可知 $X(t_0)$ 乃由一向量的尖端點表示，而 $X(t_0)$ 為 $t_1(t_0)$ 和 $t_2(t_0)$ 的向量和；又對於所有 $t > t_0$ 的軌跡均有一上限，如圖示圓柱體的半徑 M 即為軌跡的上限值；又當 $t \rightarrow \infty$ 時，系統達到它的平衡狀態 $X(t) = 0$ 。

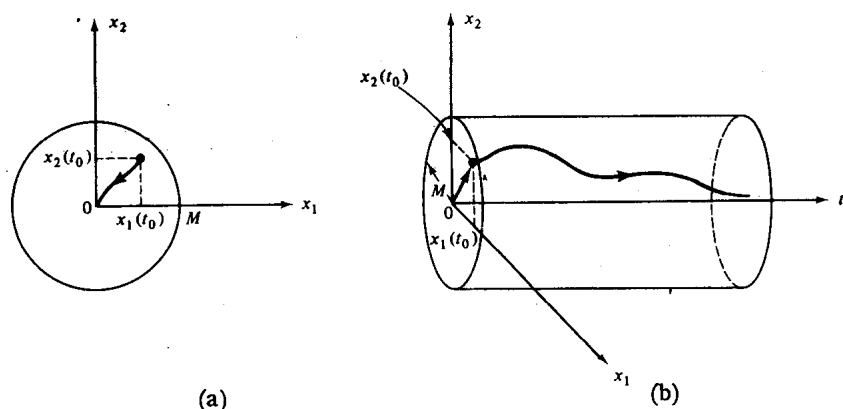


圖 7-1 以狀態空間說明穩定性的觀念

其次我們可以特性方程的根來表示一線性非時變系統之穩定性的定義，所得的結果與上述相同。考慮零輸入的情況，系統的狀態過渡方程式為

$$\mathbf{X}(t) = \phi(t - t_0) \mathbf{X}(t_0) \quad \dots\dots\dots (7-5)$$

此處 $\phi(t - t_0)$ 為狀態過渡矩陣。

取式(7-5)兩邊的模根(Norm)，可得

$$\|\mathbf{X}(t)\| = \|\phi(t - t_0) \mathbf{X}(t_0)\| \quad \dots\dots\dots (7-6)$$

因向量的模根有一重要的特性為

$$\|\mathbf{X}(t)\| \leq \|\phi(t - t_0)\| \|\mathbf{X}(t_0)\| \quad \dots\dots\dots (7-7)$$

即有類比於兩向量的長度的關係。

由此可知式(7-2)必須滿足 $\|\phi(t - t_0)\| \|\mathbf{X}(t_0)\|$ 為有限的條件，即若 $\|\mathbf{X}(t_0)\|$ 為有限的，則 $\|\phi(t - t_0)\|$ 亦必為有限的(對於 $t > t_0$)。同理，式(7-3)可導出

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t - t_0)\| = 0 \quad \dots\dots\dots (7-8)$$

或

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{ij}(t - t_0) = 0 \quad \dots\dots\dots (7-9)$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$ ，此處 $\phi_{ij}(t - t_0)$ 為 $\phi(t - t_0)$ 的第 ij 元素。

又式(4-42)的狀態過渡矩陣可寫為

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(SI - A)^{-1}] \quad \dots\dots\dots (7-10)$$

或

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\text{adj}(SI - A)}{|SI - A|}\right] \quad \dots\dots\dots (7-11)$$

因 $|SI - A| = 0$ 為系統的特性方程式，式(7-11)說明 $\phi(t)$ 的時間響應可由特性方程式的根決定，亦即在式(7-8)的情況下必須所有的根均有負實部(Negative real parts)。

7-3 有輸入的線性非時變系統的穩定性 (Stability of Linear Time-Invariant Systems with Inputs)

對於零輸入的線性非時變系統的穩定性已在上一節討論過，一般言之，這一類的穩定性與輸入無關。我們可以另法定義線性非時變系統的穩定性如下：若對於任何有限的輸入，其輸出亦為有限的，則謂此系統為穩定。

換言之，若一線性系統為單一的輸入—輸出 (Single input-output)，其輸入為 $r(t)$ ，輸出為 $c(t)$ 。設

$$|r(t)| \leq N < \infty \quad \text{對於 } t \geq t_0 \dots\dots\dots (7-12)$$

則

$$|c(t)| \leq M < \infty \quad \text{對於 } t \geq t_0 \dots\dots\dots (7-13)$$

然而對於上述的定義有一些例外，如輸入為單位級狀函數，在 $t = t_0$ 時，則微分器將使輸出為脈衝響應。在這情況下，輸入為有限的而輸出為無限的；但微分器為有用的，則被定義為穩定的系統。同理，積分器將使輸出為斜坡狀響應，其輸出亦為無限的；但積分器亦為有用的則亦被定義為穩定的系統。

對於有限的輸入和有限的輸出系統，其穩定性的定義，我們將再度導出其為穩定的條件是特性方程式的根必須在 s —平面的左半面。

一線性系統的輸入—輸出關係可以迴旋積分 (Convolution integral) 表示如下：

$$c(t) = \int_0^{\infty} r(t-\tau) g(\tau) d\tau \dots\dots\dots (7-14)$$

此處 $g(\tau)$ 為系統的脈衝響應 (The impulse response)。

取式 (7-14) 兩邊的絕對值，可得

$$|c(t)| = \left| \int_0^{\infty} r(t-\tau) g(\tau) d\tau \right| \dots\dots\dots (7-15)$$

因積分的絕對值不能大於絕對值的積分，所以式(7-15)可寫為

$$|c(t)| \leq \int_0^{\infty} |r(t-\tau)| |g(\tau)| d\tau \dots\dots\dots (7-16)$$

現在設 $r(t)$ 為有限的輸入信號，則由式(7-12)，

$$|c(t)| \leq \int_0^{\infty} N |g(\tau)| d\tau = N \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \dots\dots (7-17)$$

因此若 $c(t)$ 亦為有限的輸出，

$$N \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq M < \infty \dots\dots\dots (7-18)$$

或

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq P < \infty \dots\dots\dots (7-19)$$

式(7-19)的物理意義即從 $t=0$ 到 $t=\infty$ ，脈衝響應 $g(t)$ 的絕對值曲線所覆蓋的面積必須為有限的。

現在我們將證明對於穩定的系統而言，在脈衝響應法的限制可與在特性方程式根法的限制相通。由定義可知系統的轉移函數 $G(s)$ 和脈衝響應 $g(t)$ 兩者的關係可由拉氏轉換積分 (Laplace transform integral) 表示如下：

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \dots\dots\dots (7-20)$$

由式(7-20)的絕對值和絕對值的特性，可得

$$|G(s)| \leq \int_0^{\infty} |g(t)| |e^{-st}| dt \dots\dots\dots (7-21)$$

特性方程式的根即為 $G(s)$ 的極點，且當取 s 為這些值時，將使

$|G(s)| = \infty$ 。又 $s = \sigma + j\omega$ ， e^{-st} 的絕對值為 $|e^{-\sigma t}|$ ，式 (7-21) 變為

$$\infty \leq \int_0^{\infty} |g(t)| |e^{-\sigma t}| dt \quad \dots\dots\dots (7-22)$$

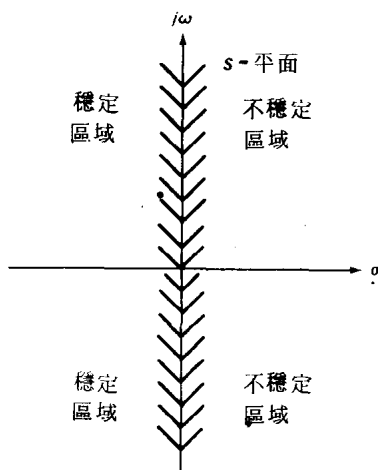
若一個或多個根在 s -平面的右半面或虛軸上， $\sigma \geq 0$ ，亦即 $|e^{-\sigma t}| \leq N=1$ ，則式 (7-22) 可寫為

$$\infty \leq \int_0^{\infty} N |g(t)| dt = \int_0^{\infty} |g(t)| dt \quad \dots\dots\dots (7-23)$$

當 $R_e(s) = \sigma \geq 0$ 。

由式 (7-23) 可知，所得的結果與式 (7-19) 相反，所以我們可得結論如下：若系統為穩定，則特性方程式的根必須都在 s -平面的左半面且不在虛軸上。

由以上的討論，我們可檢視是否有根在 s -平面的右半面或虛軸上，以決定線性非時變系統是否為穩定，如圖 7-2 所示為 s -



一平面的穩定區域和不穩定區域 圖 7-2 在 s -平面的穩定和不穩定區域，除了原點，虛軸亦被包括於不穩定區域。

7-4 線性控制系統的穩定性求法 (Methods of Determining Stability of Linear Control Systems)

雖然線性非時變系統的穩定性可由脈衝響應法、狀態過渡矩陣法、特性方程式的根位置法決定之；但這些方法很難用於實際上。譬如

，脈衝響應必須由轉移函數的反拉氏轉換求出，但這不是簡單的事；又狀態過渡矩陣 $\phi(t)$ 也必須由類似的程序才能求出。又若為高階的特性方程式，則其根的求出必須借助數位計算機 (Digital computer)。所以在實用上很少使用脈衝響應法或狀態過渡矩陣法或特性方程式的根位置法。通常我們使用疊算法 (Algorithms)，可直接得知系統為穩定或不穩定，而不需要更進一步的計算。以下的方法，我們經常使用於決定線性非時變系統的穩定性。

1 羅斯－赫維茲法 (Routh-Hurwitz criterion)：為一種代數方法，對於線性非時變系統的絕對穩定性可提供資料。由此法可測知是否有任何根在 s - 平面的右半面，且可知在 s - 平面的右半面和虛軸上根的數目。

2 耐氏法 (Nyquist criterion)：為一種半圖法，由觀察迴路轉移函數的耐氏圖可知閉路轉移函數的零點和極點兩者個數之差。此處極點即為特性方程式的根且應用此法必須知道閉路轉移函數零點的相對位置。

3 根軌跡圖 (Root locus plot) (第8章)：為一種圖形法，由改變系統的參數可得特性方程式的根軌跡圖，若根軌跡在 s - 平面的右半面，則此閉路系統為不穩定。

4 波德圖 (Bode diagram) (附錄A)：由閉路轉移函數 $G(s)H(s)$ 的波德圖可決定閉路系統的穩定性；但必須在 $G(s)H(s)$ 無任何極點和零點在 s - 平面的右半面，此法才能適用。

5 利氏法 (Lyapunov's stability criterion)：通常應用於決定非線性系統的穩定性，但亦可應用於線性系統。此法由系統之利氏函數 (Lyapunov function) 的特性來決定系統的穩定性。

7-5 羅斯-赫維茲法 (Routh-Hurwitz Criterion)

羅斯-赫維茲法可應用於單輸入-輸出系統、多輸入-輸出系統、單迴路系統、以及多迴路系統。

考慮一線性非時變系統的特性方程式如下：

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad \cdots (7-24)$$

以上所有係數均為實數。

在式(7-24)中，爲了使所有的根均沒有正實部，必須

- 1 多項式的係數都爲同號。
- 2 不缺任何係數。

這是必要條件，但非充分條件。

這兩個必要條件極易由觀察得知。然而這並非充分條件，因爲當係數均爲同號且不等於零時，仍可能有零點存在 s 一平面的右半面。

在式(7-24)中，所有的根均在 s 一平面的左半面的充要條件爲多項式的赫維茲行列式 (Polynomial's Hurwitz determinants) D_k 必須都爲正，此處 $k=1, 2, \cdots, n$ 。

式(7-24)的赫維茲行列式如下

$$\begin{aligned}
 D_1 &= a_1 & D_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} & D_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \\
 \cdots & & D_n &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2n-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{2n-4} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{2n-5} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} & & \cdots \cdots \cdots (7-25)
 \end{aligned}$$

此處指數為負或大於 n ，其係數可以 0 代替。

在式 (7-25) 中，乍看以為是極為困難的多項式，但我們可利用羅斯-赫維茲法簡化成表格，就不必求解式 (7-25) 的行列式。

羅斯-赫維茲法的第一步驟是將多項式的係數排成兩列。

$$a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad a_6 \quad a_8 \quad \cdots$$

$$a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad a_7 \quad a_9 \quad \cdots$$

羅斯-赫維茲法的第二步驟依下面指定方法，列表如下：（以六階系統為例）

s^6	a_0	a_2	a_4	a_6
s^5	a_1	a_3	a_5	0
s^4	$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = A$	$\frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} = B$	$\frac{a_1 a_6 - a_0 \times 0}{a_1} = a_6$	0
s^3	$\frac{A a_3 - a_1 B}{A} = C$	$\frac{A a_5 - a_1 a_6}{A} = D$	$\frac{A \times 0 - a_1 \times 0}{A} = 0$	0
s^2	$\frac{BC - AD}{C} = E$	$\frac{C a_6 - A \times 0}{C} = a_6$	$\frac{C \times 0 - A \times 0}{C} = 0$	0
s^1	$\frac{ED - C a_6}{E} = F$	0	0	0
s^0	$\frac{F a_6 - E \times 0}{F} = a_6$	0	0	0

上述的排列和操作方法被稱為羅斯表 (Routh tabulation) 或羅斯排列 (Routh array)。在最左邊的 s 行僅作為區別用。

羅斯-赫維茲法的最後步驟就是由羅斯表的第一行的符號以決定是否所有的根都在 s -平面的左半面。我們可討論如下：若羅斯表第一行的元素均為同號，則多項式的根都在 s -平面的左半面。若羅斯表第一行的元素不全為同號，則變號的次數即表有正實部的根的個數。

由以上的討論知此法極為簡便，但必須先知道赫維茲行列式，因

爲羅斯表第一行的元素和赫維茲行列式之間的關係如下：

$$s^6 \quad a_0 = a_0$$

$$s^5 \quad a_1 = D_1$$

$$s^4 \quad A = \frac{D_2}{D_1}$$

$$s^3 \quad C = \frac{D_3}{D_2}$$

$$s^2 \quad E = \frac{D_4}{D_3}$$

$$s^1 \quad F = \frac{D_5}{D_4}$$

$$s^0 \quad a_6 = \frac{D_6}{D_5}$$

因此，若所有的赫維茲行列式均爲正，則羅斯表第一行的元素均爲同號。

以下兩個例題說明如何應用羅斯－赫維茲法以簡化問題。

例題 7-1 考慮方程式

$$(s-2)(s+1)(s-3) = s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0 \quad \cdots (7-26)$$

此處有一負係數，由必要條件可知至少有一根帶有正實部；但爲了說明羅斯－赫維茲法，我們寫出羅斯表如下：

變號	s^3	1	1
	s^2	-4	6
	s^1	$\frac{(-4)(1) - (6)(1)}{-4} = 2.5$	
變號	s^0	$\frac{(2.5)(6) - (-4)(0)}{2.5} = 6$	

因爲在羅斯表第一行有兩次變號，所以多項式有兩根在 s - 平面