经济应用数学基础（一）配套辅导

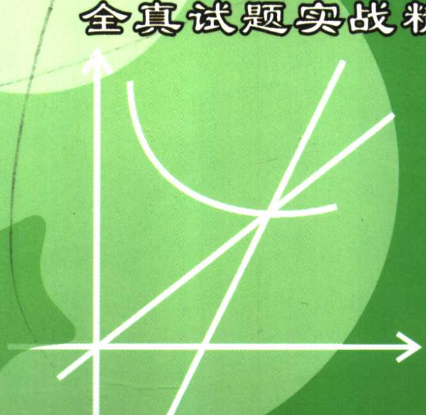
微积分

（人大修订本）

同步辅导与习题精解

俞诗秋 主编

考研趋势动态分析
重点考点精心提炼
题型一一归类举例
课后习题详尽解答
全真试题实战精练



中国科学技术大学出版社

微积分同步辅导与习题精解

主编　俞诗秋

编者　欧阳露莎　　郭丽莎

周　静　　张志刚

金凌辉

中国科学技术大学出版社

2006·合肥

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步辅导与习题精解 /俞诗秋主编 .—合肥:中国科学技术大学出版社,2006.9

ISBN 7-312-02003-8

Ⅰ. 微... Ⅱ. 俞... Ⅲ. 微积分—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086637 号

出版发行:中国科学技术大学出版社
(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)
印　　刷:中国科学技术大学印刷厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:850×1 168/32
印　　张:13
字　　数:374 千
版　　次:2006 年 9 月第 1 版
印　　次:2006 年 9 月第 1 次印刷
定　　价:14.80 元

前　言

《微积分》是大学经济学和管理学各专业的必修基础课程和硕士研究生入学的必考科目.要想学好这门课程并在考试中取得优异成绩,除了接受优质的课堂教学以外,还必须做大量的习题以不断地领会和掌握每一个定理、公式以及各种计算方法.本书就是为了使读者能够大量地接触各种类型的习题、试题从而极大地提高应试能力而编写的.

本书按照赵树嫄编写由人民大学出版社出版的《经济应用数学基础(一)——微积分》(修订本)的章节顺序编写,并给出了全部习题的详细解答.为了使读者全面掌握《微积分》这门课程,本书每一章均按照【考点综述】、【内容提要】、【经典题解】和【习题全解】四个部分编写.

【考点综述】重点介绍了本章的考试内容、考试重点、常见考点和《全国硕士研究生入学统一考试数学三试题》的历年试题分数统计,并兼顾了各大学《微积分》考试的常见考点.

【内容提要】有重点地介绍了本章的主要内容,包括必须掌握的基本概念、基本定理、基本公式和一些基本的计算方法.

【经典题解】主要收集了与本章有关的1987年到2006年《全国硕士研究生入学统一考试数学三试题》(微积分部分)全部的试题以及一些典型的习题和试题并给出了详细的解答.这些习题和试题对读者开拓视野,提高解题能力有极大的帮助.在例题中,**例8**(99.7)表示例8选自1999年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题,本题7分;而**例9**(03.8)表示例9选自2003年的数学三试题,本题

8分.

【习题全解】给出了赵树嫄编写由人民大学出版社出版的《经济应用数学基础(一)——微积分》(修订本)的全部习题及详细解答.

由于编写时间紧迫加之编者水平有限,书中难免存在谬误,恳请读者不吝来信赐教指正,来信请寄:q58@eyou.com

在此衷心感谢读者的关心与支持!

编 者

2006年7月

目　录

第一章　函　　数

考点综述

一、考试内容

集合的概念及其表示;函数的概念及表示法;函数关系的建立;函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;复合函数、反函数;基本初等函数的性质及其图形.

二、考试重点

1. 集合的表示
2. 函数的概念
3. 建立简单的函数关系
4. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性
5. 复合函数及反函数
6. 初等函数及其图形

三、常见考点

1. 函数的定义域
2. 讨论函数的有界性、单调性和奇偶性
3. 研究函数的周期
4. 讨论复合函数
5. 求函数的反函数
6. 初等函数

四、历年试题分数统计

年份	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
分数				3						
年份	97	98	99	00	01	02	03	04	05	06
分数										

内容提要

一、集合

1. 集合：具有某种属性的事物的全体，或是一些确切对象的汇总.

2. 元素：构成集合的事物或对象.

3. 集合与元素的关系

(1)a 属于 A 或 a 在 A 中：a 是集合 A 的元素，记作 $a\in A$；

(2)a 不属于 A 或 a 不在 A 中：a 不是集合 A 的元素，记作 $a\notin A$.

4. 空集：不包含有任何元素的集合，记作 $\varnothing$.

5. 全集：所研究的所有事物组成的集合，记作 U.

6. 集合的关系与运算

(1)A 是 B 的子集：如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即如果 $a\in A$，则 $a\in B$，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$；

规定：空集为任意集合的子集.

(2)A 与 B 相等：设有集合 A 和 B，如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，即 $A=B$；

(3)交集：设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合称为 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$；

(4)并集：设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$；

(5)差集：设有集合 A 和 B，属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$；

(6)补集：全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为 A 的补集，记为 A'.

7. 集合运算律

(1)交换律：①$A\cup B=B\cup A$；②$A\cap B=B\cap A$.

(2)结合律：①$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

②$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3)分配律:①$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

②$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4)摩根律:①$(A\cup B)'=A'\cap B'$;②$(A\cap B)'=A'\cup B'$.

8.笛卡尔乘积:设有集合 A 和 B,所有二元有序数组(x,y)构成的集称为 A 与 B 的笛卡尔乘积,记为 $A\times B$.

二、实数集

1.数轴:设有一条水平直线,在这条直线上取定一点 O,称为原点,规定一个正方向,再规定一个长度,称为单位长度.这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴.

2.绝对值:一个实数的绝对值 x,记为$|x|$,定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

3.有限区间:设 a,b 为实数,且 $a<b$,

(1)开区间——$(a,b)=\{x|a<x<b\}$;

(2)闭区间——$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$;

(3)半开区间——$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$,$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$,

其中:a,b 分别称为区间的左端点和右端点;在有限区间中,$b-a$ 称为区间的长度.

4.无限区间:引入记号$+\infty$及$-\infty$,分别读作正无穷大和负无穷大.

(1)$(a,+\infty)=\{x|a<x\}$;

(2)$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$;

(3)$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$;

(4)$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$;

(5)$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

5.点 a 的邻域(称 $\delta>0$ 为邻域的半径)

(1)点 x_0 的 δ 邻域:实数集合$\{x||x-x_0|<\delta,\delta>0\}$,称为点 x_0 的 δ 邻域.x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.

(2)点 x_0 的 δ 空心邻域:实数集合$\{x|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$,称

为以点 x_0 中心，半径为 δ 的空心邻域.

三、函数

1. 函数：设 D 是一个非空实数集合，设有一个对应规则 f，使每一个 $x\in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 是定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数. 记作

$$y=f(x),x\in D.$$

其中：(1)x 称为自变量，y 称为因变量；

(2)集合 D 称为映射 f 的定义域，也记作 $D(f)$；

(3)全体函数值的集合$\{y\mid y=f(x),x\in D(f)\}$，称为函数 $y=f(x)$的值域，记作 $Z(f)$；

(4)对于 $x_0\in D(f)$所对应的 y 值，记作 y_0 或 $y\Big|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$时函数 $y=f(x)$的函数值.

2. 函数的图形：平面点集$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D(f)\}$即为定义在 $D(f)$上的函数 $y=f(x)$的图形.

四、函数的几种简单性质

1. 奇偶性：给定函数 $y=f(x)$，$D=D(f)$关于原点对称，

(1)如果对所有的 $x\in D(f)$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；

(2)如果对所有的 $x\in D(f)$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数.

2. 周期性：对于函数 $y=f(x)$如果存在正的常数 a 使得

$$f(x+a)=f(x)$$

恒成立，则称此函数为周期函数. 满足这个等式的最小正数 a，称为函数的周期.

3. 单调性：如果函数 $y=f(x)$对区间(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在区间(a,b)内是单调增加的(或称单调递增)；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在区间(a,b)内是单调减少的(或称单调递减).

4. 有界性：设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$

在(a,b)内是有界的. 如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$在(a,b)在内是无界的.

五、反函数与复合函数

1. 反函数：设 $y=f(x)$是定义在 $D(f)$上的一个函数，值域为 $Z(f)$. 如果对每一个 $y\in Z(f)$，有一个确定的且满足 $y=f(x)$的 $x\in D(f)$与之对应，其对应规则记作 f^{-1}，这个定义在 $Z(f)$上的函数 $x=f^{-1}(y)$称为 $y=f(x)$的反函数，或称它们互为反函数.

2. 复合函数：设有函数 $y=f(u)$的定义域为 $D(f)$，若函数 $u=\varphi(x)$的值域为 $Z(\varphi)$，$Z(\varphi)\cap D(f)$非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$为复合函数. x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量.

六、初等函数

1. 常量：$y=c$.

2. 幂函数：$y=f(x)=x^{a}$，(a 是常数).

3. 指数函数 $y=f(x)=a^{x}$，(a 是常数且 $a>0,a\neq1$).

4. 对数函数：$y=f(x)=\log_{a}x$，(a 是常数且 $a>0,a\neq1$).

5. 三角函数

(1)正弦函数：$y=\sin x$；

(2)余弦函数：$y=\cos x$；

(3)正切函数：$y=\tan x$；

(4)余切函数：$y=\cot x$；

(5)正割函数：$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$；

(6)余割函数：$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

6. 反三角函数

(1)反正弦函数：$y=\arcsin x$；

(2)反余弦函数：$y=\arccos x$；

(3)反正切函数：$y=\arctan x$；

(4)反余切函数：$y=\mathrm{arccot}\,x$.

7. 初等函数

(1)基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反

三角函数.

(2)初等函数:由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数.

经典题解

【例 1】 求下列函数的自然定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;

解 $\begin{cases}1-x^2\neq 0,\\ x+2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq\pm 1,\\ x\geqslant -2\end{cases}$

$\Rightarrow D(f)=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;

(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$;

解 $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1\Rightarrow |x-1|\leqslant 2\Rightarrow D(f)=[-1,3]$;

(3) $y=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$;

解 $\begin{cases}3-x>0,\\ |x|-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3,\\ |x|>1\end{cases}\Rightarrow D(f)=(-\infty,-1)\cup(1,3)$;

(4) $y=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$.

解 $\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,\\ x^2-x-6>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|2x-1|\leqslant 7,\\ (x-3)(x+2)>0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4,\\ x<-2 \text{ 或 } x>3\end{cases}$

$\Rightarrow D(f)=[-3,-2)\cup(3,4]$.

【例 2】 函数 $f(x)$ 定义在 $[0,1]$ 上,且 $f(0)=f(1)$,若对任意的 $x_1,x_2\in[0,1]$,都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$,证明

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{1}{2}.$$

证 任取 $x_1, x_2 \in [0,1]$，不妨设 $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$，有

若 $x_2 - x_1 < \frac{1}{2}$，则 $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2| < \frac{1}{2}$；

若 $x_2 - x_1 \geqslant \frac{1}{2}$，由于 $f(0) = f(1)$，有

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |f(x_1) - f(0) - f(x_2) + f(1)| \\ &\leqslant |f(x_1) - f(0)| + |f(x_2) - f(1)| \\ &\leqslant |x_1 - 0| + |x_2 - 1| \\ &= x_1 + 1 - x_2 = 1 - (x_2 - x_1) \leqslant \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以 $$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

【例 3】 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证 任取 $x_1, x_2 \in (-l, 0)$，若 $x_1 < x_2$，有

$$-x_2 < -x_1 \in (0, l).$$

因 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加，所以

$$f(-x_2) < f(-x_1).$$

又 $f(x)$ 为 $(-l, l)$ 内的奇函数，则

$$f(x_1) = -f(-x_1) < -f(-x_2) = f(x_2),$$

所以 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义，$a > 0, b > 0$，若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少，证明：对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$，$f(x_1 + x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2)$.

证 任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$，不妨设 $x_1 \leqslant x_2$，由 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少，

则 $\frac{f(x_1)}{x_1} \geqslant \frac{f(x_2)}{x_2}$，即

$$x_1 f(x_2) \leqslant x_2 f(x_1), \qquad ①$$

而 $x_1 \leqslant x_1 + x_2$，同理，$\frac{f(x_1)}{x_1} \geqslant \frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2}$，即

$$x_2 f(x_1 + x_2) \leqslant (x_1 + x_2) f(x_2), \qquad ②$$

由①、②得，

$$x_2 f(x_1+x_2)\leqslant x_1 f(x_2)+x_2 f(x_2)\leqslant x_2(f(x_1)+f(x_2)),$$

又 $x_2\in(0,+\infty)$，得

$$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2).$$

【例 5】 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的，证明：

(1)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2)两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证 (1)①设 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均为定义在区间 $(-l,l)$ 上的偶函数，即

$$f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=f_2(x),$$

则

$$f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=f(x),$$

故 $f(x)$ 为 $(-l,l)$ 上的偶函数. 即两个偶函数的和是偶函数.

②设 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均为定义在区间 $(-l,l)$ 上的奇函数，即

$$f_1(-x)=-f_1(x),f_2(-x)=-f_2(x),$$

则

$$f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=-f_1(x)-f_2(x)=-f(x),$$

故 $f(x)$ 为 $(-l,l)$ 上的奇函数. 即两个奇函数的和是奇函数.

(2)①设 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均为定义在区间 $(-l,l)$ 上的偶函数，即

$$f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=f_2(x),$$

则

$$f(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=f(x),$$

故 $f(x)$ 为 $(-l,l)$ 上的偶函数. 即两个偶函数的乘积是偶函数.

②设 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均为定义在区间 $(-l,l)$ 上的奇函数，即

$$f_1(-x)=-f_1(x),f_2(-x)=-f_2(x),$$

则

$$f(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=f(x),$$

故 $f(x)$ 为 $(-l,l)$ 上的偶函数.即两个奇函数的乘积是偶函数.

③设 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 分别为定义在区间 $(-l,l)$ 上的偶函数与奇函数，即

$$f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=-f_2(x),$$

则

$$f(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=-f_1(x)f_2(x)=-f(x),$$

故 $f(x)$ 为 $(-l,l)$ 上的奇函数.即偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

【例 6】 设函数 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的任何不恒等于零的函数，则(　　)必是偶函数.

(A) $F(x)=f(x)-f(-x)$

(B) $F(x)=f(x)+f(-x)$

(C) $F(x)=f(-x)-f(x)$

(D) $F(x)=f(-x)+f(-x)$

答　(B).因在(B)中 $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$.

【例 7】 设 $f(x),\varphi(x)$ 都是偶函数，且它们的定义域、值域均为 $(-\infty,+\infty)$，则(　　).

(A) $\varphi[f(x)]$ 与 $f[\varphi(x)]$ 都是偶函数

(B) $\varphi[f(x)]$ 与 $f[\varphi(x)]$ 都是奇函数

(C) $\varphi[f(x)]$ 与 $f[\varphi(x)]$ 都是非奇非偶函数

(D) $\varphi[f(x)]$ 是偶函数，$f[\varphi(x)]$ 是非奇非偶函数

答　(A).因 $\varphi[f(-x)]=\varphi[f(x)],f[\varphi(-x)]=f[\varphi(x)]$.

【例 8】(90.3) 设 $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是(　　).

(A)偶函数　　　　(B)无界函数

(C)周期函数　　　　(D)单调函数

答　(B).显然 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 附近无界，应选(B).

【例 9】 设 $f(\sin x)=\cos 2x+1$，求 $f(\cos x)$.

解 1　用拼凑法

由于

$$f(\sin x)=-2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+2=-2\sin^2 x+2,$$

可见 $f(t)=-2t^2+2$,所以 $f(\cos x)=-2\cos^2 x+2=2\sin^2 x$.

解 2 用变量代换

令 $t=\sin x$,则

$$f(t)=\cos 2x+1=(1-2\sin^2 x)+1=-2t^2+2,$$

所以 $f(\cos x)=-2\cos^2 x+2=2\sin^2 x$.

【例 10】 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,求 $f(x)$.

解 1 由于

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

可见 $f(t)=t^2-2$,所以 $f(x)=x^2-2$.

解 2 令 $t=x+\frac{1}{x}$,则

$$f(t)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2,$$

所以 $f(x)=x^2-2$.

【例 11】 若 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,则 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{次}}$ 等于(　　).

(A) $\frac{x^n}{(1+x^2)^{n/2}}$　　(B) $\frac{x^n}{(n+x^2)^{n/2}}$

(C) $\frac{x^n}{(1+nx^2)^{n/2}}$　　(D) $\frac{x}{(1+nx^2)^{1/2}}$

答 (D). 因为

$$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

假设 $f_{n-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+(n-1)x^2}}$,则

$$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))=\frac{f_{n-1}(x)}{\sqrt{1+2f_{n-1}{}^2(x)}}$$