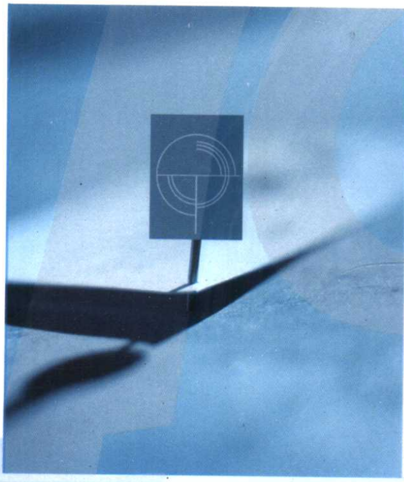
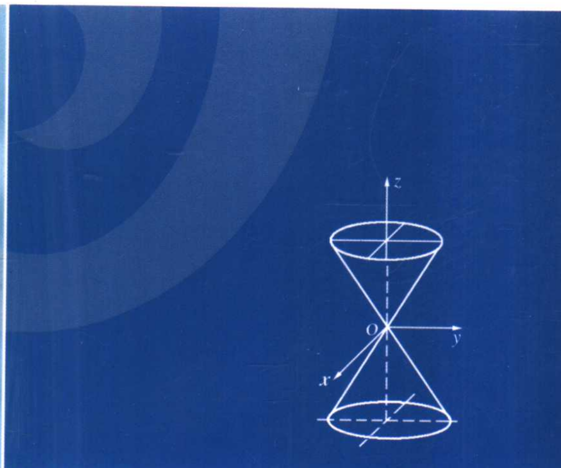
高职高专数学改革教材

Gongcheng Shuxue Xuexi Zhidao

工程数学 学习指导

主 编　朱永银　易同贸
主 审　马晓明





华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

高职高专数学改革教材

工程数学

学习指导

主编　朱永银　易同贸
主审　马晓明

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学 教程、学习指导/朱永银　易同贸　魏莹　主编. 一武汉：华中科技大学出版社，2007 年 2 月

ISBN 978-7-5609-3962-9

Ⅰ. 工…　Ⅱ. ①朱…　②易…　③魏…　Ⅲ. 工程数学-高等学校：技术学校-教学参考资料　Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 020515 号

工程数学 学习指导　　朱永银　易同贸　主编

责任编辑：徐正达　　封面设计：刘　卉

责任校对：朱　霞　　责任监印：张正林

出版发行：华中科技大学出版社

武昌喻家山　邮编：430074　电话：(027)87557437

录　　排：武汉佳年华科技有限公司

印　　刷：武汉首壹印刷厂

开本：850×1168　1/32　　印张：4.875　　字数：115 000

版次：2007 年 2 月第 1 版　　印次：2007 年 2 月第 1 次印刷　　定价：16.80 元

ISBN 978-7-5609-3962-9/TB・89　　(教程、学习指导)

内容简介

本书是“高职高专数学改革教材”之一，包括《工程数学 教程》和《工程数学 学习指导》两个分册. 内容分为五章：第一章，多元函数微积分；第二章，无穷级数；第三章，拉普拉斯变换；第四章，傅里叶变换；第五章，行列式、矩阵与线性方程组. 每章分为五个部分，即内容提要、疑难解析、范例讲评、习题选解和综合练习.

本书可作为高职高专数学教学用书，也可供高等师范专科学校非数学专业的教学用书.

前　言

为了推动我省高职高专数学教材建设，提高数学教学质量，在省教育厅高教处的直接领导下，湖北省高职高专数学研究会与华中科技大学出版社根据教育部关于高职高专教育改革的有关精神，特组织全省部分具有较高理论水平和丰富教学经验的骨干教师，编写了一套理工专业的数学改革教材.《工程数学学习指导》是这套教材中的一本，供工科专业使用.

本教材在编写过程中力求做到以应用为目的，以"必需、够用"为度，其特点是：以讲清概念为前提，强化应用为重点，在保留传统体系的基础上，力求有所创新；体现建模思想，注重应用和训练；强化实践技能，配有综合练习，并附有答案，便于自学.

本教材由朱永银、易同贸担任主编，马晓明担任主审，魏莹、林敏、郭炳艳任副主编.参加编写的还有山军、张汉萍、夏婧、姚文功、陈婷、郭文婷和吴亚敏，全书由朱永银教授统稿.

武汉职业技术学院、长江工程职业技术学院、荆州职业技术学院、鄂东职业技术学院、咸宁职业技术学院对于本教材的顺利出版给予了大力的支持.本教材还参考吸收了有关教材和著作的成果，在此一并致谢.

由于时间紧迫，书中难免有疏漏之处，恳请读者提出批评建议，以便再版时修订完善.

编　者

2007 年 1 月 10 日

目　　录

第一章　多元函数微积分

一、内容提要

(一) 空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的概念

过空间一定点O作三条互相垂直的数轴Ox,Oy,Oz,指定正向(它的正向符合右手法则)并选定相同的长度单位,即在空间建立了直角坐标系.

2. 空间中两点间的距离公式

空间中任意两点$P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$间的距离公式为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

3. 空间图形简介

(1) 空间曲面的概念

如果曲面S与三元方程

$$F(x,y,z)=0 \qquad ①$$

有如下关系:

1° 曲面S上任一点的坐标都满足方程①,

2° 不在曲面S上的点的坐标都不满足方程①,

则方程①就称为曲面S的方程.

(2) 两种常见的曲面

(i) 旋转曲面　一条平面曲线绕其平面上的一条定直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

(ii) 柱面　一直线沿已知平面定曲线C(直线和曲线C不在同一平面上)平行移动所形成的曲面称为**柱面**.

(3) 空间平面

空间中任一平面可用三元一次方程$Ax+By+Cz+D=0$表示,反之,任一三元一次方程的图形都是空间中的平面.

(4) 空间曲线与直线

(i) 空间曲线　空间曲线可以看做两曲面的交线,设$F(x,y,z)=0$和$G(x,y,z)=0$是两个曲面,它们的交线为C,方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

就称为曲线C的一般方程.

(ii) 空间直线　空间中的直线可看作两平面的交线,方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

就称为空间直线的一般方程.

(二) 多元函数的概念

1. 多元函数的定义

设有变量x,y,z,D是平面上的一个点集,如果对于每一个点$P(x,y)\in D$,按照一定法则,变量z有唯一确定的值与之对应,则称z是变量x,y的**二元函数**,记为$z=f(x,y)$. 点集D称为该函数的**定义域**,x,y称为**自变量**,z称为**因变量**,数集$\{z\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$称为该函数的**值域**.

类似地可以定义三元函数$u=f(x,y,z)$以及三元以上的函数,二元及二元以上的函数统称为**多元函数**.

2. 二元函数的几何意义

设函数$z=f(x,y)$的定义域为D,空间点集

$$\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为二元函数$z=f(x,y)$的图形．通常也说二元函数的图形是一曲面．

3．二元函数的极限与连续

设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一邻域内有定义(点P_0可以除外)，$P(x,y)$是该邻域内异于P_0的任何一点，如果当点P以任何方式趋于P_0时，函数$f(x,y)$的值无限接近于一个确定的常数A，则称A是函数$z=f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的**极限**，记为$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 或 $f(x,y)\to A\ (x\to x_0,y\to y_0)$．如果当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)$的极限存在，且等于它在该点处的函数值$f(x_0,y_0)$即$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处连续．如果函数$f(x,y)$在区域$D$内的每一点都连续，则称函数$f(x,y)$在$D$内**连续**．

(三) 偏导数与全微分

1．偏导数的定义

设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一邻域内有定义，当$y=y_0$时，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处对x的偏导数，记为$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$或$f'_x(x_0,y_0)$．类似地可定义$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$或$f'_y(x_0,y_0)$．

2．偏导数的求法

由偏导数的定义可知，求多元函数对某一个自变量的偏导数时，只需将其他自变量看做常量，用一元函数求导法则求解即可．

3．高阶偏导数

设函数$z=f(x,y)$在区域D内具有偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=$

$f'_y(x,y)$. 一般说来，在D内$f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$均是x,y的函数. 如果这两个函数的偏导数也存在，则称它们是函数$z=f(x,y)$的二阶偏导数. 依此类推，二阶及二阶以上的偏导数称为**高阶偏导数**. 二元函数依照对自变量求导的次序不同有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

其中$f''_{xy}(x,y)$和$f''_{yx}(x,y)$称为**二阶混合偏导数**.

4. 全微分

(1) 定义

若二元函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为
$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中A,B仅与x,y有关，而与$\Delta x,\Delta y$无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$o(\rho)$表示关于$\rho$的高阶无穷小量，则称函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$处可微，并称$A\Delta x+B\Delta y$为$f(x,y)$在点$(x,y)$处的全微分.

(2) 必要条件

若函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处可微，且$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$都存在，则

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

(3) 充分条件

若函数$z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$处存在且连续，则函数在该点的全微分存在.

(四) 偏导数的应用

1. 二元函数的极值

(1) 极值的定义

设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某个邻域内有定义，对于

该邻域内任何异于$P_0(x_0,y_0)$的点(x,y)，如果都有不等式$f(x,y)<f(x_0,y_0)$成立，则称$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处有**极大值**$f(x_0,y_0)$；如果都有不等式$f(x,y)>f(x_0,y_0)$成立，则称函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处有**极小值**$f(x_0,y_0)$. 极大值、极小值统称为**极值**.

(2) 极值存在的必要条件

设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处具有偏导数，且在点$P_0(x_0,y_0)$处有极值，则在该点处的偏导数必为零，即

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

(3) 极值存在的充分条件

设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某个邻域内具有一阶及二阶连续偏导数，且$f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$，记$f''_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f''_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f''_{yy}(x_0,y_0)=C$，则

1° 当$B^2-AC<0$时，函数在点$P_0(x_0,y_0)$处有极值，且当$A<0$时有极大值，当$A>0$时有极小值；

2° 当$B^2-AC>0$时，函数在点$P_0(x_0,y_0)$处没有极值；

3° 当$B^2-AC=0$时，函数在点$P_0(x_0,y_0)$处可能有极值，也可能没有极值.

2. 条件极值、拉格朗日乘数法

(1) 条件极值的定义

带有约束条件的函数的极值称为条件极值.

$$\text{极值问题}\begin{cases}\max(\text{或}\min) z=f(x,y),\\ \text{s.t.}\\ \varphi(x,y)=0.\end{cases}$$

(2) 拉格朗日乘数法

按下列步骤求解条件极值的方法称为拉格朗日乘数法：

1° 构造函数$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，其中$\lambda$是待定常数.

2° 分别求$L(x,y)$对x,y的一阶偏导数，并解联立方程组

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x,y) + \lambda\varphi_x(x,y) = 0, \\ L'_y = f'_y(x,y) + \lambda\varphi_y(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

3° 消去λ，解出x,y，一般可以根据问题的性质判断(x,y)是否为极值点.

（五）二重积分的概念与性质

1. 二重积分的概念

（1）二重积分的概念

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k,$$

其中$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$是将平面区域$D$任意划分成的$n$个小区域，$(\xi_k,\eta_k)$是$\Delta\sigma_k$（$k=1,2,\cdots,n$）上的任意一点，$d$是$n$个小区域的直径的最大值.

（2）存在定理

若函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$存在，即$f(x,y)$在$D$上可积.

2. 二重积分的性质

性质 1 $\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$（$k$为常数）.

性质 2 $\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$

性质 3 若平面闭区域D可用曲线分成D_1,D_2两部分，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 4 若$f(x,y)=1$，则$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \sigma$，其中$\sigma$为平面区域$D$的面积.

性质 5 若$f(x,y)\leqslant g(x,y)$（$(x,y)\in D$），则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 6 $\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$

性质 7 设 M,m 分别是 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值、最小值，σ 是 D 的面积，则

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma.$$

（六）二重积分的计算

1. 利用直角坐标计算二重积分

在直角坐标系中的计算，面积元素 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

若
$$D:\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b, \\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x), \end{cases}$$
则
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

若
$$D:\begin{cases} c\leqslant y\leqslant d, \\ \psi_1(y)\leqslant x\leqslant \psi_2(y), \end{cases}$$
则
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

2. 利用极坐标计算二重积分

1° 当极点 O 在区域 D 外部时，若区域 D 是由射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ $(\alpha<\beta)$ 及曲线 $r=r_1(\theta)$ 和 $r=r_2(\theta)$（当 $\alpha\leqslant\beta$ 时，$r_1(\theta)\leqslant r_2(\theta)$）所围成的闭区域，即

$$D:\begin{cases} \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, \\ r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta), \end{cases}$$
则有
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

2° 当极点 O 在区域 D 内部时，若 D 的边界曲线为 $r=r(\theta)$，即

$$D:\begin{cases} 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \\ 0\leqslant r\leqslant r(\theta), \end{cases}$$

则有 $$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

3° 当极点 O 在区域 D 的边界上，若 D 的边界曲线为 $r=r(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$，即

$$D:\begin{cases}\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\\0\leqslant r\leqslant r(\theta),\end{cases}$$

则有 $$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

二、疑难解析

1. 三元方程与曲面.

三元方程不一定都表示曲面. 三元方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形不总是曲面，有时会出现“退化”情况，有可能表示曲面或退化成一个点. 例如，方程 $x^2+y^2+4z^2-2x-4y-8z+9=0$，即 $(x-1)^2+(y-2)^2+4(z-1)^2=0$，它仅表示一个点 $(1,2,1)$.

2. 方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 与空间曲线.

所给方程组不一定都表示空间曲线，只有当 $F(x,y,z)=0$ 及 $G(x,y,z)=0$ 为曲面方程且它们所对应的曲面相交时，方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 才表示空间曲线.

3. 二元函数的可导性与连续性的关系.

一元函数可导必定连续. 然而对于多元函数，可导与连续没有必然的联系. 也就是说，多元函数可导未必连续，连续也未必可导. 例如，《工程数学教程》中已经指出，二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处的两个偏导数存在且等于零，但极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存

在，从而函数在点(0,0)处不连续；二元函数 $\varphi(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0,0)处连续，但极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(0+\Delta x,0)-\varphi(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

不存在，即 $\varphi'_x(0,0)$ 不存在，同理 $\varphi'_y(0,0)$ 也不存在.

4. 二元函数的可微与可导的关系.

对一元函数来说，可微与可导是等价的，但对二元函数及一般的多元函数来说，情形就不一样了. 它们的关系如下：

可微一定可导(见《工程数学教程》中可微的必要条件)，但反之不一定真. 就是说，函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在，并不能保证 $\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ 就是函数的全微分；只有当偏导数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 存在且连续，函数 $f(x,y)$ 才可微(见《工程数学教程》中可微的充分条件).

5. 求条件极值与拉格朗日乘数法.

求条件极值不一定要用拉格朗日乘数法. 条件极值一般有两种求法：

1° 从条件 $\varphi(x,y)=0$ 中解出 x 或 y，代入 $z=f(x,y)$，使之成为一元函数的无条件极值问题.

2° 拉格朗日乘数法.

一般情况下，若由 $\varphi(x,y)=0$ 很容易解出 x 或 y，用第一种方法较简单；若由 $\varphi(x,y)=0$ 不易解出 x 或 y，就要使用第二种方法了.

6. 二重积分与定积分的区别和联系.

联系：二重积分是定积分的推广，它们研究的都是非均匀分布量的求和问题.

区别：定积分是研究区间上非均匀分布量的求和问题，二重积分研究的是平面区域上非均匀分布量的求和问题.

三、范例讲评

例1 求过点(－1，－2，－5)且和三个坐标平面都相切的球面

方程.

解 根据题意可知，该球面位于第Ⅶ卦限. 设球面半径为a，则球心坐标为$(-a,-a,-a)$，球面方程为

$$(x+a)^2+(y+a)^2+(z+a)^2=a^2.$$

将点$(-1,-2,-5)$代入球面方程后经整理得$a^2-8a+15=0$，可解得$a=3$或$a=5$. 于是所求球面方程为

$$(x+3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=9,$$

或

$$(x+5)^2+(y+5)^2+(z+5)^2=25.$$

【讲评】 首先由球面过点$(-1,-2,-5)$且和三个坐标平面都相切确定球面所在的卦限以及球心的坐标和球半径的关系，进而写出球面方程.

例2 求下列极限或判断下列极限是否存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}$；　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}$.

解 (1)
$$\frac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}$$
$$=\frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1-x^2-y^2})}{(1-\sqrt{1-x^2-y^2})(1+\sqrt{1-x^2-y^2})}$$
$$=\frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1-x^2-y^2})}{x^2+y^2}=1+\sqrt{1-x^2-y^2},$$

故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}=2.$$

(2) 因为

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}}\frac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x-\tan x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{1-\sec^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\infty.$$

故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}$不存在.

【讲评】 (1) 因为函数$\dfrac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}$在点$(0,0)$处没有定