全国硕士研究生入学统一考试备考用书

2016

考研数学（一）

真题精讲与热点分析（2006~2015）

考研辅导名师 陈启浩 编著

名师权威解析
高频考点强化
备考必做真题



真题都一样，解答真不一样

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

需要全本请访问 www.ertongbook.com

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

2016 考研数学（一）

真题精讲与热点分析

（2006～2015）

考研辅导名师　　陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是全国硕士研究生入学统一考试备考用书. 主要内容包括 2006 年到 2015 年十年的考研数学一的真题及其精讲，以及对考试热点问题的分析.

本书适合参加全国硕士研究生入学统一考试“数学一”的同学阅读，也可作为教师的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

2016 考研数学（一）真题精讲与热点分析：2006 ~ 2015/陈启浩编著. —2 版. —北京：机械工业出版社，2015.3

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

ISBN 978-7-111-49525-3

Ⅰ.①2… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学 – 研究生 – 入学考试 – 自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 044701 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：汤 嘉 责任编辑：汤 嘉

封面设计： 责任印制：

印刷厂印刷

2015 年 4 月第 2 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 14.25 印张 · 351 千字

0001— 册

标准书号：ISBN 978-7-111-49525-3

定价： 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务 网络服务

服务咨询热线：010-88361066 机工官网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-68326294 机工官博：weibo.com/cmp1952

010-88379203 金书网：www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版 教育服务网：www.cmpedu.com

全国硕士研究生入学统一考试备考用书介绍

为了帮助同学们在考研复习时，在较为紧张的时间安排下，有效加深对概念与理论的理解，熟练掌握常用的解题方法与技巧，针对考研同学的实际需要，我社特组织出版了由考研辅导名师陈启浩教授编写的全国硕士研究生入学统一考试备考用书.

本套丛书分别针对参加数学一、数学二和数学三考试的同学，其中针对数学一考试的包括四本书，分别是：

《2016 考研数学（一）真题精讲与热点分析（2006 ~ 2015）》（简称《真题精讲》）

《2016 考研数学（一）典型题 660》（简称《典型题 660》）

《2016 考研数学（一）高分突破 135》（简称《高分突破》）

《2016 考研数学（一）名师精选全真模拟冲刺题 10 套》（简称《全真模拟》）

本套系列丛书是在陈启浩教授对全国硕士研究生入学统一考试大纲的深入研究和对历届考研真题的精细分析的基础上写成的，也是他长期大学数学教学，特别是近十几年来考研数学辅导的结晶.

本套系列丛书，无论是内容编写还是解题方法都比较精练、新颖，富有启迪性和前瞻性，实用性、针对性也很强，可以明显提高复习的效率. 这套书贴近考纲、考试，更贴近考生，是广大考生值得拥有的一套好书.

机械工业出版社

前　言

参加考研的同学，一定要认真练习近十年的全国硕士研究生入学统一考试的真题. 因为这样既可以评估复习的效果，找出不足，尽快补上，也可以获得试题形式、广度和难度等有价值的信息.

为了帮助同学们从考研真题的练习中发现更多不足，掌握更多方法，我们对 2006 年至 2015 年的考试试题，作了精心的解析，编成本套丛书的《2016 考研数学（一）真题精讲与热点分析（2006 ~ 2015）》一书. 本书由三部分组成：

A. 十年真题（单独成册）

B. 十年真题精讲

C. 热点分析

“十年真题精讲”是对每一道真题通过“分析”“精讲”和“附注”三部分进行精细、完整的解析，特别在“精讲”中大量采用了既普遍实用又富有技巧性的方法给出解答，十分贴近考生，**这是本书的一个亮点，也是本书与其他同类书籍的一个区别**.

“热点分析”是对最近十几年考研真题进行全面分析、研究后，提出的经常出现于试题中的、对考生来说较为困难或容易失分的问题，通过例题进行讲解，十分贴近考试.

希望同学们在使用真题进行练习时，不要轻易翻阅真题解答，只有当百思不得其解时才查阅解答，这样练习才能起作用. 在练习结束之后，针对每一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道题的分析、精讲和附注的内容，进行比对和总结，内化为自己的能力.

希望同学们认真专注地进行复习，取得满意的成绩！

欢迎同学们对本书提出建议和意见，发邮件到 cqhshuxue@ gmail. com，非常感谢！

编　者

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目　录

全国硕士研究生入学统一考试备考用书介绍

前言

A　十年真题

2015 年全国硕士研究生入学统一考试试题 …… 2

2014 年全国硕士研究生入学统一考试试题 …… 6

2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题 …… 9

2012 年全国硕士研究生入学统一考试试题 …… 12

2011 年全国硕士研究生入学统一考试试题 …… 16

2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题 …… 19

2009 年全国硕士研究生入学统一考试试题 …… 22

2008 年全国硕士研究生入学统一考试试题 …… 26

2007 年全国硕士研究生入学统一考试试题 …… 29

2006 年全国硕士研究生入学统一考试试题 …… 33

B　十年真题精讲

2015 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 …… 2

2014 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 …… 18

2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 …… 33

2012 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 …… 48

2011 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 …… 64

2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 …… 78

2009 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 …… 93

2008 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 …… 109

2007 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 …… 122

2006 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲 …… 137

C　热点分析

一、高等数学 …… 153

1. 未定式极限的计算 …… 153

2. 数列极限存在准则的应用 …… 160

3. 零点定理、罗尔定理、拉格朗日中值定理与积分中值定理的综合应用 …… 163

4. 定积分的计算 …… 166

5. 二重积分与三重积分的计算 …… 172

6. 格林公式和高斯公式 …… 179

7. 幂级数的收敛域与和函数的计算 …… 184

8. 二阶常系数线性微分方程的求解 …… 187

二、线性代数 …… 191

9. 向量组的线性相关性的判定 …… 191

10. 线性方程组解的结构与求解 …… 194
11. 矩阵的特征值与特征向量的计算 …… 197
12. 二次型化标准形与规范形的方法 …… 201
三、概率论与数理统计 …… 207
13. 各类随机事件概率的计算 …… 207
14. 各种概率密度的计算 …… 210
15. 常用样本统计量分布的计算 …… 213
16. 点估计量的计算与评判 …… 216
参考文献 …… 221

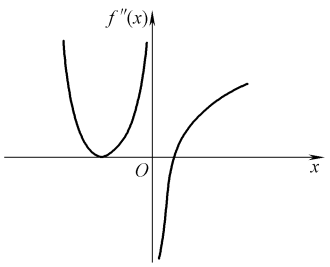
A 十年真题

2015 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、选择题(第 1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如下图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.



[ ]

(2) 设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{x}$ 是 2 阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则

(A) $a=-3$，$b=2$，$c=-1$. (B) $a=3$，$b=2$，$c=-1$.

(C) $a=-3$，$b=2$，$c=1$. (D) $a=3$，$b=2$，$c=1$.

[ ]

(3) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的

(A) 收敛点，收敛点. (B) 收敛点，发散点.

(C) 发散点，收敛点. (D) 发散点，发散点.

[ ]

(4) 设 D 是第一象限中曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\,dxdy=$

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$.

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$.

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,dr$.

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,dr$.

[ ]

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解的充分必要条件为

(A) $a\notin\Omega$，$d\notin\Omega$.　　(B) $a\notin\Omega$，$d\in\Omega$.

(C) $a\in\Omega$，$d\notin\Omega$.　　(D) $a\in\Omega$，$d\in\Omega$.

[　　]

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.　　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

[　　]

(7) 若 A，B 为任意两个随机事件，则

(A) $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$.　　(B) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

(C) $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.　　(D) $P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

[　　]

(8) 设随机变量 X，Y 不相关，且 $EX=2$，$EY=1$，$DX=3$，则 $E[X(X+Y-2)]=$

(A) -3.　　(B) 3.　　(C) -5.　　(D) 5.

[　　]

二、填空题(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.)

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$_____.

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$_____.

(11) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$_____.

(12) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$_____.

(13) $n(n\geqslant3)$ 阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=$_____.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则 $P(XY-Y<0)=$_____.

三、解答题(15~23小题，共94分. 解应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分10分)

设函数$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$. 若$f(x)$与$g(x)$在$x\to 0$是等价无穷小，求$a$，$b$，$k$值.

(16)(本题满分10分)

设函数$f(x)$在定义域I上的导数大于零，若对任意的$x_0\in I$，曲线$y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线与直线$x=x_0$及x轴所围成的区域D的面积为4，且$f(0)=2$，求$f(x)$的表达式.

(17)(本题满分10分)

已知函数$f(x, y)=x+y+xy$，曲线C：$x^2+y^2+xy=3$，求$f(x, y)$在曲线C上的最大方向导数.

(18)(本题满分10分)

(Ⅰ)设函数$u(x)$，$v(x)$可导，利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)';$$

(Ⅱ)设函数$u_1(x)$，$u_2(x)$，…，$u_n(x)$可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出$f(x)$的求导公式.

(19)(本题满分10分)

已知曲线L的方程为$\begin{cases}z=\sqrt{2-x^2-y^2},\\ z=x,\end{cases}$起点为$A(0, \sqrt{2}, 0)$，终点为$B(0, -\sqrt{2}, 0)$，计算曲线积分$I=\int_L (y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$.

(20)(本题满分11分)

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$是3维向量空间$\mathbb{R}^3$的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$是$\mathbf{R}^3$的一个基；

(Ⅱ)当k为何值时，存在非零向量$\boldsymbol{\xi}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$与基$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标相同，并求出所有的$\boldsymbol{\xi}$.

(21)(本题满分11分)

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$相似于矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求a，b的值.

(Ⅱ)求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$为对角阵.

(22)(本题满分11分)

设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2 & x>0,\\ 0 & x\leqslant 0.\end{cases}$$

对X进行独立重复的观测，直到第2个大于3的观测值出现时停止，记Y为观测次数.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

（Ⅰ）求 Y 的概率分布；

（Ⅱ）求 EY.

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\ \theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta} & \theta\leqslant x\leqslant 1,\\ 0 & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，X_1，X_2，…，X_n 为来自该总体的简单随机样本.

（Ⅰ）求 θ 的矩估计量.

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计量.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、选择题(第 1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求．)

(1) 下列曲线有渐近线的是

(A) $y=x+\sin x$.　　(B) $y=x^2+\sin x$.

(C) $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$.　　(D) $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$.

[　　]

(2) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上

(A) 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$.　　(B) 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$.

(C) 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$.　　(D) 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$.

[　　]

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x=$

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x-1} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$.

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r$.

[　　]

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2\mathrm{d}x=\min\limits_{a,b\in\mathbf{R}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x\right\}$，则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$

(A) $2\sin x$.　　(B) $2\cos x$.　　(C) $2\pi\sin x$.　　(D) $2\pi\cos x$.

[　　]

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0\\ a & 0 & 0 & b\\ 0 & c & d & 0\\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$

(A) $(ad-bc)^2$.　　(B) $-(ad-bc)^2$.　　(C) $a^2d^2-b^2c^2$.　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$.

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量，则对任意常数 k，l，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的

(A) 必要而非充分条件. (B) 充分而非必要条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分又非必要条件.

[ ]

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$
(A) 0.1. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) 0.4.

[ ]

(8) 设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，且方差均存在，X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则
(A) $EY_1>EY_2$，$DY_1>DY_2$. (B) $EY_1=EY_2$，$DY_1=DY_2$.
(C) $EY_1=EY_2$，$DY_1<DY_2$. (D) $EY_1=EY_2$，$DY_1>DY_2$.

[ ]

二、填空题(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.)

(9) 曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为_____.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，则 $f(7)=$_____.

(11) 微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 $y=$_____.

(12) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$_____.

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围_____.

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中 θ 是未知参数，X_1，X_2，…，X_n 为来自总体 X 的简单随机样本，若 $c\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，则 $c=$_____.

三、解答题(15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(z+e^x\cos y)e^{2x}$. 若

$f(0)=0$, $f'(0)=0$,求$f(u)$的表达式.

(18)(本题满分10分)

设Σ为曲面$z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$的上侧,计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(19)(本题满分10分)

设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足$0<a_n<\frac{\pi}{2}$,$0<b_n<\frac{\pi}{2}$,$\cos a_n-a_n=\cos b_n$,且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

(Ⅰ)证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;

(Ⅱ)证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛.

(20)(本题满分11分)

设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$为三阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系;

(Ⅱ)求满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$的所有矩阵$\boldsymbol{B}$.

(21)(本题满分11分)

证明n阶矩阵$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$相似.

(22)(本题满分11分)

设随机变量X的概率分布为$P(X=1)=P(X=2)=\frac{1}{2}$,在给定$X=i$的条件下,随机变量$Y$服从均匀分布$U(0,i)(i=1,2)$.

(Ⅰ)求Y的分布函数$F_Y(y)$;

(Ⅱ)求EY.

(23)(本题满分11分)

设总体X的分布函数为$F(x;\theta)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\0, & x<0,\end{cases}$其中$\theta$是未知参数且大于零,$X_1$,$X_2$,…,$X_n$为来自总体$X$的简单随机样本.

(Ⅰ)求EX与$E(X^2)$;

(Ⅱ)求θ的最大似然估计量$\hat{\theta}_n$;

(Ⅲ)是否存在实数a,使得对任何$\varepsilon>0$,都有$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-a|\geqslant\varepsilon\}=0$?

2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题

一、选择题(第 1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求.)

(1) 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k,c 为常数,且 $c\neq 0$,则

(A) $k=2$，$c=-\dfrac{1}{2}$.　　(B) $k=2$，$c=\dfrac{1}{2}$.

(C) $k=3$，$c=-\dfrac{1}{3}$.　　(D) $k=3$，$c=\dfrac{1}{3}$.

[　　]

(2) 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点(0，1，-1)处的切平面方程为

(A) $x-y+z=-2$.　　(B) $x+y+z=0$.

(C) $x-2y+z=-3$.　　(D) $x-y-z=0$.

[　　]

(3) 设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=$

(A) $\dfrac{3}{4}$.　　(B) $\dfrac{1}{4}$.　　(C) $-\dfrac{1}{4}$.　　(D) $-\dfrac{3}{4}$.

[　　]

(4) 设 L_1：$x^2+y^2=1$，L_2：$x^2+y^2=2$，L_3：$x^2+2y^2=2$，L_4：$2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线，记 $I_i=\oint\limits_{L_i}\left(y+\dfrac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y(i=1,2,3,4)$，则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$

(A) I_1.　　(B) I_2.　　(C) I_3.　　(D) I_4.

[　　]

(5) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

[　　]

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a=0$, $b=2$.　　(B) $a=0$, b 为任意常数.

(C) $a=2$, $b=0$.　　(D) $a=2$, b 为任意常数.

[　　]

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1\sim N(0,1)$, $X_2\sim N(0,2^2)$, $X_3\sim N(5,3^2)$, $P_i=P(-2\leqslant X_i\leqslant 2)(i=1,2,3)$, 则

(A) $P_1>P_2>P_3$.　　(B) $P_2>P_1>P_3$.

(C) $P_3>P_2>P_1$.　　(D) $P_1>P_3>P_2$.

[　　]

(8) 设随机变量 $X\sim t(n)$, $Y\sim F(1,n)$, 给定 $a(0<a<0.5)$, 常数 c 满足 $P(X>c)=a$, 则 $P(Y>c^2)=$

(A) a.　　(B) $1-a$.

(C) $2a$.　　(D) $1-2a$.

[　　]

二、填空题(第 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=$ _____.

(10) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$, $y_2=e^x-xe^{2x}$, $y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 则该方程的通解 $y=$ _____.

(11) 设 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t,\end{cases}$ (t 为参数), 则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ _____.

(12) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ _____.

(13) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$ _____.

(14) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零, 则 $P(Y\leqslant a+1\mid Y>a)=$ _____.

三、解答题(第 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$, 其中 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt$.

(16) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0=3$, $a_1=1$, $a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geqslant 2)$. $S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(Ⅰ) 证明: $S''(x)-S(x)=0$;

(Ⅱ) 求 $S(x)$ 的表达式.

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=\left(y+\frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值.

需要全本请访问 www.ertongbook.com