全国硕士研究生入学统一考试备考用书

2016

考研数学（一）

名师精选全真模拟冲刺题10套

考研辅导名师 陈启浩 编著

依据大纲选题
难易匹配真题
符合命题趋势



不止是模拟，更接近实战

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

需要全本请访问 www.ertongbook.com

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

2016 考研数学（一）名师精选全真模拟冲刺题 10 套

考研辅导名师　陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是考研数学冲刺阶段的复习指导书，适用于参加“数学一”考试的学生．书中包含了10套精心设计的模拟试题，题目难度稍高于考研真题．这些题目大部分为首次公开发布，非常适合考生用来检验复习效果和临考重点复习．本书的解答部分，不仅给出详尽解答，还特别针对考试重点和难点进行了扩展复习．

本书可作为考生自学的复习材料，也可作为考研培训班的辅导教材，还可供大学数学基础课程的相关教学人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

2016考研数学（一）名师精选．全真模拟冲刺题10套/陈启浩编著．—2版．—北京：机械工业出版社，2015.5

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

ISBN 978-7-111-48611-4

Ⅰ.①2… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第269302号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：郑 玫 责任编辑：郑 玫

版式设计：霍永明 责任校对：张莉娟

封面设计：路恩中 责任印制：刘 岚

北京京丰印刷厂印刷

2015年4月第2版·第1次印刷

184mm×260mm·13印张·314千字

0 001—3 000册

标准书号：ISBN 978-7-111-48611-4

定价：29.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务 网络服务

服务咨询热线：010-88361066 机 工 官 网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-68326294 机 工 官 博：weibo.com/cmp1952

010-88379203 金 书 网：www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版 教育服务网：www.cmpedu.com

前　言

深入地读完我们编写的2016全国硕士研究生入学统一考试备考用书(包括认真地推演了其中的每道例题和练习题)的考生，已经具有了较强的分析问题和解决问题的能力，具有了能够从容面对即将来临的研究生考试的实力．但是为了把准备工作做得更充分，为了践行“战前多流汗，战时少流血”，应在考试前进行10场“实战演习”——认真、独立地做完10套模拟试题(各套模拟试题的难度稍高于考研真题)，作为最后的冲刺.

书中的10套试题是根据考研的数学大纲和编者的教学经验精心设计的，它既涵盖性强，又重点突出，其中的题目新颖，既有较强的针对性，又有明显的前瞻性．书中给出了这10套试题的详细、规范的解答，每题之后都加有附注，用简明的词语指明了与本题有关的概念、方法等值得注意的考点．当然，我们在“实战演习”时，不应一遇到困难就翻看解答，一定要认真、反复地思索，这样才能达到使用本书冲刺的目的——进一步提高应试能力，向着高分进发．使用本书的实践表明：弄通模拟试题，不想拿高分都难.

衷心祝愿考生们取得骄人的成绩，也欢迎考生们对本书提出宝贵意见，可发邮件到cqh-shuxue@gmail.com，非常感谢!

北京邮电大学教授

陈启浩

目　　录

前言
模拟试题(一) …… 1
模拟试题(二) …… 8
模拟试题(三) …… 15
模拟试题(四) …… 22
模拟试题(五) …… 29
模拟试题(六) …… 36
模拟试题(七) …… 43
模拟试题(八) …… 50
模拟试题(九) …… 57
模拟试题(十) …… 64
模拟试题(一)解答 …… 71
模拟试题(二)解答 …… 82
模拟试题(三)解答 …… 95
模拟试题(四)解答 …… 110
模拟试题(五)解答 …… 124
模拟试题(六)解答 …… 138
模拟试题(七)解答 …… 151
模拟试题(八)解答 …… 164
模拟试题(九)解答 …… 176
模拟试题(十)解答 …… 189

需要全本请访问 www.ertongbook.com

模拟试题（一）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上

（A）处处可导．　　（B）恰好有一个不可导点．

（C）恰好有两个不可导点．　　（D）至少有三个不可导点．

[　　]

（2）设函数 $F(x)=\int_0^{2x}\cos^2(2x-t)\mathrm{d}t$，则 $F''(x)$ 为

（A）$4\sin 4x$．　　（B）$4\cos 4x$．　　（C）$-4\cos 4x$．　　（D）$-4\sin 4x$．

[　　]

（3）设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内具有二阶连续偏导数，且 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则以下结论不正确的是

（A）当 $A>0$，$AC-B^2>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极小值．

（B）当 $C>0$，$AC-B^2>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极小值．

（C）当 $AC-B^2=0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值．

（D）当 $AC-B^2<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值．

[　　]

（4）设空间区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\ z\geqslant 0\}$（其中 $R>0$）和 $\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$，则下列四式中正确的是

（A）$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}v$．　　（B）$\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}v$．

（C）$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}v$．　　（D）$\iiint\limits_{\Omega}xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}v$．

[　　]

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶可逆矩阵，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & (2\boldsymbol{A})^{*}\\ (3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}$ 等于

（A）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \dfrac{1}{4}\boldsymbol{A}\\ 3\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$．　　（B）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}\\ \dfrac{1}{4}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$．

（C）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \dfrac{1}{4}\boldsymbol{B}\\ 3\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$．　　（D）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}\\ \dfrac{1}{4}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$．

[ ]

(6) 已知矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$ 及 3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，则

(A) $t=6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=1$.　　(B) $t=6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=2$.

(C) $t\neq 6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=1$.　　(D) $t\neq 6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=2$.

[ ]

(7) 在 10 件产品有 4 件一等品，6 件二等品. 现从中任取两次，每次取一件，取后不放回，已知其中至少有一件是一等品，则两件都是一等品的概率 p 为

(A) $\frac{1}{5}$.　　(B) $\frac{2}{5}$.　　(C) $\frac{3}{5}$.　　(D) $\frac{4}{5}$.

[ ]

(8) 设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立且同服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布，即它的概率密度同为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则对任意实数 x，下列结论中正确的为

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

[ ]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}(x\neq 0)$，则方程 $f(x)=0$ 的实根个数为_____.

(10) 设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=x+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x$，则定积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$_____.

(11) 设 $z=f(e^x,x^2+y^2)$，其中二元函数 $f(u,v)$ 可微，且 $y=y(x)$ 是由方程 $e^x+\sin y=x$ 确定的隐函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=$_____.

(12) 微分方程 $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$ 的通解为_____.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 4 阶矩阵，它们相似，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -2，-1，1，2，则行列式 $|\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{E}_4|=$_____.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$ Y 的概率分布为 $P(Y=0)=\dfrac{1}{3}$，

$P(Y=1)=\dfrac{2}{3}$，则 $E(X^3+2Y^2)=$_____.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''+y=5e^{2x}+2\sin x$ 的通解.

(16)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 由递推式 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2a_n+\dfrac{1}{a_n^2}\right)(n=1,2,\cdots)$ 确定，求

(Ⅰ)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$；

(Ⅱ)幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}x^n$ 的收敛域.

(17)(本题满分 10 分)

设二元函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y + x + 3y\iint_D f(x,y)\,d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y = x^2$ 与直线 $x = 1$ 及 x 轴围成的平面图形, 求 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且 $0 < f(x) < 1$ 及 $f'(x) \neq 1$, 证明: 存在唯一的 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = \xi$.

(19)(本题满分 10 分)

设二元函数$f(x, y)$在点$(0, 0)$的某个邻域内有定义，且$f(0, 0)=0$，$f_x'(0, 0)=3$，$f_y'(0, 0)=-1$. 记曲面$z=f(x, f(x, y))$在点$(0, 0)$处的切平面为π，求曲线积分

$$\oint_C xy\mathrm{d}x + \mathrm{d}y - z^2\mathrm{d}z,$$

其中C是π与曲面S：$z=\frac{3}{4}-x^2-y^2$的交线，且从z轴正向看去，C是逆时针的.

(20)(本题满分 11 分)

已知线性方程组(Ⅰ)$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1-2x_2+x_3=2, \\ ax_1+bx_2+cx_3=0 \end{cases}$有两个不同的解，且$a$为系数矩阵的秩. 求(Ⅰ)的通解及向量$\boldsymbol{\xi}=(a, b, c)^{\mathrm{T}}$在基$\boldsymbol{\eta}_1=(1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(-1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3=(1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$下的坐标.

(21)(本题满分 11 分)

已知 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + cx_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3\ (c \geqslant 2)$ 与 $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2$ 中有且仅有一个是正定二次型，求常数 c，并用可逆线性变换将正定二次型化为规范形以及用正交变换将非正定二次型化为标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设有随机变量 X 与 Y，其中 Y 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} 5y^4, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 且在 $Y = y$ 的条件下，X 的条件概率密度为 $f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{y^3}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 求 DX 及 $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

(23)(本题满分 11 分)

设总体 $Z = XY$，其中随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}(\lambda>0)$，$Y$ 的概率分布为

Y	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

. 又设 z_1，z_2，…，z_n 是来自 Z 的一个简单随机样本的观测值. 求 Z 的未知参数 λ 的最大似然估计值.

模拟试题（二）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设 $y=\dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}$，则 $y^{(10)}$ 为

（A）$\dfrac{1}{2(x-1)^{11}}-\dfrac{1}{x^{11}}+\dfrac{1}{2(x+1)^{11}}$．　（B）$\dfrac{10!}{2(x-1)^{11}}+\dfrac{10!}{x^{11}}+\dfrac{10!}{2(x+1)^{11}}$．

（C）$\dfrac{10!}{2(x-1)^{11}}-\dfrac{10!}{x^{11}}+\dfrac{10!}{2(x+1)^{11}}$．　（D）$\dfrac{1}{2(x-1)^{11}}+\dfrac{1}{x^{11}}+\dfrac{1}{2(x+1)^{11}}$．

[　　]

（2）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=$

（A）$\dfrac{3}{4}$．　（B）$-\dfrac{1}{4}$．　（C）$-\dfrac{3}{4}$．　（D）$\dfrac{1}{4}$．

[　　]

（3）设二元函数 $f(x,y)$ 满足 $f_x'(0,0)=1$，$f_y'(0,0)=2$，$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则

（A）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续．

（B）$\mathrm{d}f(x,y)\big|_{(0,0)}=\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$．

（C）$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)}=\cos\alpha+2\sin\alpha$．

（D）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿 x 轴负向的方向导数为 -1．

[　　]

（4）分别记函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 的余弦级数与正弦级数之和函数为 $s_1(x)$ 与 $s_2(x)(-\infty<x<+\infty)$，则 $s_1(-3)+s_2(6)$ 为

（A）-2．　（B）0．　（C）1．　（D）2．

[　　]

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n>2)$ 阶可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^*)^*$ 等于

（A）$\boldsymbol{A}$．　（B）$\boldsymbol{A}^*$．　（C）$|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$．　（D）$|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$．

[　　]

（6）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵，则下列选项中为正定矩阵的是

（A）$\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{B}^*$．　（B）$\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{B}^*$．

（C）$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$．　（D）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$．

[　　]

(7) 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N\left(2\mu, \frac{\sigma^2}{2}\right)$. 记 $p_1 = P(X \geqslant \mu - \sigma)$, $p_2 = P\left(Y \leqslant 2\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$,则

(A) $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{2} < p_1 < p_2$.

(C) $p_2 < \frac{1}{2} < p_1$. (D) $p_1 = p_2 > \frac{1}{2}$.

[ ]

(8) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$的一个简单随机样本，则统计量 $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 的数学期望与方差分别为

(A) $\frac{1}{n}\sigma$, $\frac{2}{n}\sigma^4$. (B) $\frac{1}{n}\sigma^2$, $\frac{4}{n}\sigma^4$.

(C) σ^2, $\frac{2}{n}\sigma^4$. (D) σ^2, $\frac{4}{n}\sigma^4$.

[ ]

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x - x)\arctan\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x^2)} =$ _____.

(10) 定积分 $\int_0^1 \arctan\frac{1-x}{1+x}\mathrm{d}x =$ _____.

(11) 点(0, 0, 0)到曲面 S: $z = (x-1)^2 + y^2$ 在点(2, 1, 2)处切平面 π 的距离 $d =$ _____.

(12) 设曲面 S: $z = 1 - (x^2 + y^2)(-3 \leqslant z \leqslant 1)$, 则曲面积分

$\iint\limits_{S(\text{上侧})} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ _____.

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则矩阵 $(\boldsymbol{A}^2)^*$ 的秩 = _____.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 则随机变量 $Y = X^2$ 的分布函数 $F_Y(y) =$ _____.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n \cdot (n+1)!}$ 的和.

(16)(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{1}{\sin x \sqrt{1+\cos x}} \mathrm{d}x$.

(17)(本题满分 10 分)

证明：$c \geqslant \frac{1}{2}$时有$\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) < e^{cx^2}(-\infty < x < +\infty)$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数$f(t)$在$[0, +\infty)$上连续，曲面$S(t)$为半球$\{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2, z \geqslant 0\}$的表面，它在$xOy$平面上的投影为$D(t)$，$D(t)$的边界曲线为$L(t)$，并设对$t>0$，有

$$\oint_{L(t)} f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\,ds + \iint_{S(t)} (x^2+y^2+z^2)\,dS = \iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,d\sigma.$$

求$f(t)(t \geqslant 0)$的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

已知 $\int_{0,0}^{(t,t^2)} f(x,y)\mathrm{d}x + x\cos y\mathrm{d}y = t^2$,其中二元函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数,求 $f(x,y)$.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$, 求使矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的常数 a, b, c 以及该方程的所有解.

需要全本请访问 www.ertongbook.com