全国硕士研究生入学统一考试备考用书

2016

# 考研数学（三）

## 名师精选全真模拟冲刺题10套

考研辅导名师 陈启浩 编著

依据大纲选题
难易匹配真题
符合命题趋势



不止是模拟，更接近实战

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

需要全本请访问 www.ertongbook.com

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

# 2016 考研数学（三）名师精选全真模拟冲刺题 10 套

考研辅导名师　陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是考研数学冲刺阶段的复习指导书，适用于参加“数学三”考试的学生．书中包含了10套精心设计的模拟试题，题目难度稍高于考研真题．这些题目大部分为首次公开发布，非常适合考生用来检验复习效果和临考重点复习．本书的解答部分，不仅给出了详尽解答，还特别针对考试重点和难点进行了扩展复习．

本书可作为考生自学的复习材料，也可作为考研培训班的辅导教材，还可供大学数学基础课程的教学人员参考．

**图书在版编目（CIP）数据**

2016考研数学（三）名师精选．全真模拟冲刺题10套/陈启浩编著．—2版．—北京：机械工业出版社，2015.4

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

ISBN 978-7-111-48613-8

Ⅰ.①2… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第269304号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：郑 玫 责任编辑：郑 玫

版式设计：霍永明 责任校对：胡艳萍

封面设计：路恩中 责任印制：刘 岚

北京京丰印刷厂印刷

2015年4月第2版·第1次印刷

184mm×260mm·12.75印张·307千字

0 001—3 000册

标准书号：ISBN 978-7-111-48613-8

定价：29.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务 网络服务

服务咨询热线：010-88361066 机 工 官 网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-68326294 机 工 官 博：weibo.com/cmp1952

010-88379203 金 书 网：www.golden-book.com

**封面无防伪标均为盗版** 教育服务网：www.cmpedu.com

# 前　言

深入地读完我们编写的2016全国硕士研究生入学统一考试备考用书(包括认真地推演了其中的每道例题和练习题)的考生，已经具有了较强的分析问题和解决问题的能力，具有了能够从容面对即将来临的研究生考试的实力．但是为了把准备工作做得更充分，为了践行“战前多流汗，战时少流血”，应在考试前进行10场“实战演习”——认真、独立地做完10套模拟试题(各套模拟试题的难度稍高于考研真题)，作为最后的冲刺．

书中的10套试题是根据考研的数学大纲和编者的教学经验精心设计的，它既涵盖性强，又重点突出，其中的问题新颖，既有较强的针对性，又有明显的前瞻性．书中给出了这10套试题的详细、规范的解答，每题之后都加有附注，用简明的语言指明了与本题有关的概念、方法等值得注意之点．当然，在“实战演习”时，不应一遇到困难就翻看详解，一定要认真、反复地思索，这样才能达到使用本书冲刺的目的——进一步提高应试能力，向着高分进发．使用本书的实践证明：弄通模拟试题，不想拿高分都难．

衷心祝愿考生们取得骄人的成绩，并欢迎读者对本书提出宝贵意见，可发邮件到cqhshuxue@gmail.com，非常感谢！

北京邮电大学教授　陈启浩

# 目　　录

前言
模拟试题(一) …… 1
模拟试题(二) …… 8
模拟试题(三) …… 15
模拟试题(四) …… 22
模拟试题(五) …… 29
模拟试题(六) …… 36
模拟试题(七) …… 43
模拟试题(八) …… 50
模拟试题(九) …… 57
模拟试题(十) …… 63
模拟试题(一)解答 …… 70
模拟试题(二)解答 …… 83
模拟试题(三)解答 …… 98
模拟试题(四)解答 …… 109
模拟试题(五)解答 …… 122
模拟试题(六)解答 …… 136
模拟试题(七)解答 …… 148
模拟试题(八)解答 …… 159
模拟试题(九)解答 …… 173
模拟试题(十)解答 …… 186

需要全本请访问 www.ertongbook.com

# 模拟试题(一)

**一、选择题**：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设 $y=\dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}$，则 $y^{(10)}=$

(A) $\dfrac{1}{2(x-1)^{11}}-\dfrac{1}{x^{11}}+\dfrac{1}{2(x+1)^{11}}$.　　(B) $\dfrac{10!}{2(x-1)^{11}}+\dfrac{10!}{x^{11}}+\dfrac{10!}{2(x+1)^{11}}$.

(C) $\dfrac{10!}{2(x-1)^{11}}-\dfrac{10!}{x^{11}}+\dfrac{10!}{2(x-1)^{11}}$.　　(D) $\dfrac{1}{2(x-1)^{11}}+\dfrac{1}{x^{11}}+\dfrac{1}{2(x+1)^{11}}$.

[　　]

(2) 设函数 $y=y(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\ln^2(1+t),\\ y=(\mathrm{e}^t-1)^2,\end{cases}$ 且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 在 $t=0$ 处连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{t=0}$ 为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

[　　]

(3) 定积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=$

(A) $\dfrac{3}{4}$.　　(B) $-\dfrac{1}{4}$.　　(C) $-\dfrac{3}{4}$.　　(D) $\dfrac{1}{4}$.

[　　]

(4) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0\}$，$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$，$f(x)$ 是连续函数，则以下等式正确的是

(A) $\iint\limits_D[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}f(x)\mathrm{d}\sigma$.

(B) $\iint\limits_D[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}\sigma$.

(C) $\iint\limits_D f(x)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}f(x)\mathrm{d}\sigma$.

(D) $\iint\limits_D f(x^2)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}f(x^2)\mathrm{d}\sigma$.

[　　]

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n>2)$ 阶可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^*)^*$ 等于

(A) $\boldsymbol{A}$.　　(B) $\boldsymbol{A}^*$.　　(C) $|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.　　(D) $|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$.

[ ]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶正定矩阵, 则下列选项中为正定矩阵的是

(A) $\boldsymbol{A}^{*}+2\boldsymbol{B}^{*}$. (B) $\boldsymbol{A}^{*}-\boldsymbol{B}^{*}$. (C) $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}^{*}$. (D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$.

[ ]

(7) 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y\sim N\left(2\mu,\frac{\sigma^2}{2}\right)$. 记 $p_1=P(X\geqslant\mu-\sigma)$, $p_2=P\left(Y\leqslant 2\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$, 则

(A) $p_1<p_2<\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{2}<p_1<p_2$.

(C) $p_2<\frac{1}{2}<p_1$. (D) $p_1=p_2>\frac{1}{2}$.

[ ]

(8) 设 $X_1$, $X_2$, …, $X_n$ 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 的数学期望与方差分别为

(A) $\frac{1}{n}\sigma^2$, $\frac{2}{n}\sigma^4$. (B) $\frac{1}{n}\sigma^2$, $\frac{4}{n}\sigma^4$. (C) $\sigma^2$, $\frac{2}{n}\sigma^4$. (D) $\sigma^2$, $\frac{4}{n}\sigma^4$.

[ ]

**二、填空题**: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-x)\arctan\frac{1}{x}}{\ln(1+x^2)}$ _____.

(10) 定积分 $\int_0^1\arctan\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=$ _____.

(11) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{y}{x}\right)^{\ln x}, & x\geqslant 1,\ -\infty<y<+\infty,\\ \ln(x^{\ln 2})+y^2-3, & x<1,\ -\infty<y<+\infty,\end{cases}$ 则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ____.

(12) 差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解为_____.

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 4\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, 则 $r((\boldsymbol{A}^2)^{*})=$ _____.

(14) 设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则随机变量 $Y=X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)=$ _____.

**三、解答题**：15~23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，$f'(0)=1$. 记 $g(t)=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\sqrt[3]{\sin tf(x)}\right]^{\frac{\sqrt[3]{2}}{\ln(1+x)}}$，求 $g'(0)$.

(16) (本题满分 10 分)

(Ⅰ) 求级数 $\frac{3}{2}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-\frac{1}{4}}{2^n\cdot(n+1)!}$ 的和，记为 $a$；

(Ⅱ) 求微分方程 $y'=\mathrm{e}^y-\frac{2}{x}$ 的满足 $y(1)=a$ 的解 $y=y(x)(x>0)$.

(17)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在$[0, 1]$上 3 阶可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=f'(1)=1$. 证明. 存在$\xi\in(0, 1)$，使得$f^{(3)}(\xi)=0$.

(18)(本题满分 10 分)

设二元函数$z=z(x, y)$由方程$2x^2+2y^2+z^2-8z+8=0$确定，求$z=z(x, y)$在$D=\{(x, y)\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 1\}$上的最大值与最小值.

(19)(本题满分 10 分)

设二元连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\cos x\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi,0\leqslant y\leqslant \sin x\}$,求 $f(x,y)$ 在 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2\}$ 上的平均值.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&4&0\\-1&0&-2\\a&b&c\end{pmatrix}$, 求使矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的常数 $a$, $b$, $c$, 并求该方程的所有解.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A})=2$，且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)，使得二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在此正交变换下化为标准形，并求此标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{3}xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求(Ⅰ) $DX$；(Ⅱ) $P\left(X^2+Y^2\leqslant 1 \,\middle|\, Y\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

(23)(本题满分 11 分)

设 $Z=\ln X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$,其中 $\mu$,$\sigma^2$ 是未知参数. 又设 $Z_1$,$Z_2$,…,$Z_n$ 是来自总体 $Z$ 的简单随机样本. 求 $EX$ 的最大似然估计量.

# 模拟试题(二)

**一、选择题**：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{(e^{\cos x}-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)}, & -\pi<x<0,\\ x^2+x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 的可去间断点个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

[ ]

(2) 设函数 $f(x)=x\ln(x+a)-\dfrac{1}{e}$ 仅有单调减少区间 $\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right]$，则常数 $a$ 等于

(A) $-2$. (B) $-1$. (C) 0. (D) 1.

[ ]

(3) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=f'(0)=0$，

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du, & x\leqslant 0,\\ \int_{-x}^0 \ln(1+f(x+t))\,dt, & x>0,\end{cases}$$

则 $F''(0)$ 为

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) 0.

[ ]

(4) 设 $D$ 是由曲线 $x^2-y^2=1$ 与直线 $x=2$ 围成的平面图形，则二重积分 $\iint\limits_D (x+y)\,d\sigma$ 为

(A) $\sqrt{3}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) $3\sqrt{3}$. (D) 0.

[ ]

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 阶反对称矩阵，$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 为对称矩阵是 $n$ 为奇数的

(A) 充分而非必要条件. (B) 必要而非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分又非必要条件.

[ ]

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 相似，则 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)$ 为

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

[ ]

(7) 设二维连续型随机变量$(X, Y)$的分布函数为

$$F(x, y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-\frac{1}{2}y}), & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则以下结论不正确的是

(A) $X$ 与 $Y$ 相互独立.

(B) $EY=2$.

(C) $X$ 在 $Y=y>0$ 条件下的条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)=e^{-x}$.

(D) 关于 $X$ 的边缘分布函数 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

[ ]

(8) 设 $X_1, X_2, X_3, X_4$ 是来自总体 $X\sim N(0, 2^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $Z=\frac{1}{20}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{100}(3X_2-4X_4)^2$ 的方差 $D(Z)$ 为

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

[ ]

**二、填空题**: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}}$ _____.

(10) 函数 $\varphi(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 1,\\ x\ln x, & x>1,\end{cases}\psi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & |x|\leqslant 1\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$则定积分 $\int_{-1}^{1}\varphi(\psi(x))\,dx$ = _____.

(11) 设函数$f(u, v)$具有连续偏导数, 且在点$(1, 0)$的充分小邻域内,

$$f(u, v)=1-u-v+o(\sqrt{(u-1)^2+v^2}).$$

记 $g(x, y)=f(e^y, x+y)$, 则 $dg(x, y)|_{(0,0)}=$ _____.

(12) 设$f(x, y)$是二元连续函数, 则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^{-\sin\theta+\sqrt{3+\sin^2\theta}}f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr$ 在直角坐标系中先 $x$ 后 $y$ 的二次积分为_____.

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 则矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}^*\end{pmatrix}^{-1}$ _____.

(14) 设随机变量 $X$, $Y$ 的概率密度同为$f(t)=\begin{cases}\frac{3}{8}t^2, & 0<t<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$已知事件 $A=\{X>a\}$, $B=\{Y>a\}$ 相互独立, 且 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$, 则常数 $a=$ _____.

**三、解答题**: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文

字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x-|x|}{|x|}\right)\arctan\dfrac{1}{x}$.

(16)(本题满分 10 分)

求由直线 $y=x$ 及曲线 $y=x^2$ 围成的平面图形分别绕直线 $y=1$ 和 $y$ 轴旋转一周而成的旋转体体积.

(17)(本题满分 10 分)

求 $a=1$ 与 $a=2$ 时微分方程 $y''+a^2y=\sin x+2\cos 2x$ 的通解.

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明:当 $|x|$ 充分小时,有 $0 \leqslant \tan^2 x - x^2 \leqslant x^4$;

(Ⅱ)设 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \tan^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}} (n = 1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(19)(本题满分 10 分)

设 $f(x, y)$ 是二重积分 $I = \iint\limits_D r^2 \sin\theta \sqrt{1 - r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 在直角坐标系中的被积函数,其中 $D = \left\{(r, \theta) \,\middle|\, 0 \leqslant r \leqslant \sec\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$.

(Ⅰ)求 $f(x, y)$ 的表达式与 $I$ 的值;

(Ⅱ)记 $g(x, y) = f(x+y, \sqrt{2xy})$,求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$.

需要全本请访问 www.ertongbook.com