全国硕士研究生入学统一考试备考用书

2016

考研数学（二）典型题660

考研辅导名师 陈启浩 编著

全面覆盖大纲
重点公式总结
典型题目分析
知识点精梳理



附赠
必备通关
掌中宝

基础分牢牢在手

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

需要全本请访问 www.ertongbook.com

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

2016 考研数学（二）典型题 660

考研辅导名师　陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是全国硕士研究生入学统一考试备考用书中的一本，是第一阶段复习指导书. 它特别适合时间紧、任务重的考生备考复习使用. 全书精心解析了 75 个知识点，既覆盖了考试大纲，又整合融会了整个知识体系. 书中的例题和练习题经过精心挑选，解答详尽、方法新颖 . 考生如果能认真阅读本书，则可在较短时间内复习好考研数学的基本知识点，掌握参加入学考试所必需的基本概念、基本理论和基本计算方法.

图书在版编目（CIP）数据

2016 考研数学（二）典型题 660/陈启浩编著. —3 版. —北京：机械工业出版社，2015. 4

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

ISBN 978-7-111-49863-6

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等数学 – 研究生 – 入学考试 – 习题集 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 067184 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：汤 嘉 责任编辑：汤 嘉 郑 玫

责任校对：孟令磊 封面设计：

责任印制：

印刷厂印刷

2015 年 5 月第 3 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 21 印张 · 1 插页 · 519 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-49863-6

定价： 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务 网络服务

服务咨询热线：010-88361066 机工官网：www. cmpbook. com

读者购书热线：010-68326294 机工官博：weibo. com/cmp1952

010-88379203 金书网：www. golden-book. com

封面无防伪标均为盗版 教育服务网：www. cmpedu. com

全国硕士研究生入学统一考试备考用书介绍

为了帮助同学们在考研复习时，能够在较为紧张的时间安排下，有效加深对概念与理论的理解，熟练掌握常用的解题方法与技巧，针对考生的实际需要，我社特组织出版了由考研辅导名师陈启浩教授编写的全国硕士研究生入学统一考试备考用书。

本套丛书分别针对参加数学一、数学二和数学三考试的同学，其中针对数学二考试的包括四本书，分别是：

《2016 考研数学（二）典型题 660》（简称《典型题 660》）

《2016 考研数学（二）高分突破 135》（简称《高分突破》）

《2016 考研数学（二）真题精讲与热点分析（2006 ~ 2015）》（简称《真题精讲》）

《2016 考研数学（二）名师精选全真模拟冲刺题 10 套》（简称《全真模拟》）

本套丛书是陈启浩教授在对全国硕士研究生入学统一考试大纲的深入研究和对历届考研真题的精细分析的基础上写成的，也是他长期大学数学教学，特别是近十几年来考研数学辅导的结晶.

本套丛书，无论内容编写还是解题方法，都比较精练、新颖，富有启迪性和前瞻性，实用性、针对性也很强，可以明显提高复习的效率. 它既贴近考纲、考试，又贴近考生，是广大考生值得拥有的一套好书.

机械工业出版社

前　言

本书是根据最新的全国硕士研究生入学统一考试数学二的考试大纲编写的，旨在指导广大考研学生在较短时间内复习好考研数学（包括高等数学、线性代数）的基本知识点，掌握参加入学考试所必需的基本概念、基本理论和基本计算方法.

全书共分六章，每章都以常考知识点为核心展开，这与同类的考研参考书有很大的不同.考研数学的各门课程中，都有庞大的知识点群，要全面熟练掌握它们，对考生来说，无论在时间上还是在精力上，都是巨大的挑战. 因此编入本书的知识点，都是在对考纲进行深入研究和对历届考题进行精心分析的基础上总结、提炼出来的，并且考虑到作为读者对象的考生都学过或初步学过考研数学的各门课程，因此本书内容精练，循序渐进，贴近考纲，贴近考生，特别适合时间紧、任务重的考生备考复习.

全书讲述 75 个常考知识点，每个知识点都由“主要内容”与“典型例题”两部分组成.其中典型例题与每章后所附的练习题都是经过精心挑选的，它们既具有代表性，又贴近考题，难度适中，而且书中的例题和练习题的解答详尽、方法新颖，既能启迪解题思路，又能加深对各个知识点所蕴涵的内容的理解和应用. 因此考生通过例题的学习和练习题的训练，必能把各个常考知识点真正学到手，做到在较短时间内复习好考研数学的基础知识.

学无止境，考研学子们加油!

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目　　录

全国硕士研究生入学统一考试备考用书介绍
前言

A. 高 等 数 学

第一章　极限、连续与一元函数微分学 …… 1
一、函数极限与左、右极限的关系 …… 1
二、两个重要极限 …… 2
三、无穷小的比较 …… 4
四、函数连续的定义 …… 6
五、函数的间断点 …… 9
六、闭区间上连续函数的性质…… 11
七、数列极限存在准则…… 13
八、函数可导与导数的概念…… 15
九、导数的几何意义…… 19
十、复合函数、反函数及隐函数的导数计算…… 21
十一、高阶导数的计算…… 24
十二、函数微分的概念…… 27
十三、罗尔定理及其应用…… 30
十四、拉格朗日中值定理和柯西中值定理及其应用…… 32
十五、泰勒公式及其应用…… 35
十六、洛必达法则…… 39
十七、函数的单调性…… 42
十八、函数极值的计算…… 45
十九、函数最值的计算…… 48
二十、不等式的导数证明…… 50
二十一、方程不同实根个数的判定…… 53
二十二、曲线凹凸性、拐点的计算及曲率、曲率圆的概念…… 55
二十三、曲线渐近线的计算…… 59
练习题一 …… 61
练习题一解答 …… 65
第二章　一元函数积分学 …… 70
一、不定积分的换元积分法…… 70
二、不定积分的分部积分法…… 74
三、有理函数不定积分的计算方法…… 77
四、定积分的概念及其计算方法…… 81
五、奇、偶函数和周期函数的定积分性质及一个重要公式…… 84
六、积分上限函数的求导方法…… 88
七、定积分大小的比较与估计方法…… 92

八、积分中值定理及其应用 …… 95
九、含定积分的不等式的证明 …… 98
十、积分和式极限的计算 …… 101
十一、反常积分收敛性的概念及其计算 …… 105
十二、平面图形面积的计算 …… 110
十三、旋转体体积的计算 …… 113
十四、曲线弧长与旋转曲面侧面积的计算 …… 116
练习题二 …… 120
练习题二解答 …… 125
第三章　多元函数微积分学 …… 130
一、二元函数极限与连续的概念、偏导数及二阶偏导数的计算 …… 130
二、二元函数全微分 …… 133
三、二元复合函数偏导数及二阶偏导数的计算 …… 136
四、二元隐函数偏导数及二阶偏导数的计算 …… 139
五、多元函数极值的计算 …… 143
六、多元函数条件极值的计算 …… 146
七、多元连续函数在有界闭区域上最值的计算 …… 150
八、二重积分的计算 …… 152
九、二次积分积分次序或坐标系的更换方法 …… 158
十、二重积分大小的比较与估计 …… 162
练习题三 …… 166
练习题三解答 …… 170
第四章　常微分方程 …… 174
一、变量可分离微分方程、齐次微分方程的求解 …… 174
二、一阶线性微分方程与伯努利方程 …… 176
三、可降阶的二阶微分方程 …… 178
四、二阶齐次线性微分方程 …… 182
五、二阶非齐次线性微分方程 …… 184
六、二阶欧拉方程 …… 188
七、求解方程 $y(x)=\int_0^x g(x,y(t))\mathrm{d}t+h(x)$ 的方法 …… 190
练习题四 …… 193
练习题四解答 …… 195
附录　高等数学的应用 …… 199
一、变力做功的计算 …… 199
二、引力、水的侧压力计算 …… 200
三、由牛顿第二定律求质点的运动规律 …… 203

B. 线 性 代 数

第五章　行列式、矩阵和向量 …… 206
一、n 阶行列式的概念 …… 206
二、n 阶行列式按一行（或一列）展开 …… 209
三、矩阵的加法、数乘、乘法、转置运算及分块矩阵 …… 212
四、矩阵的初等变换、初等矩阵及矩阵等价 …… 216

五、伴随矩阵与矩阵求逆运算 …… 219
六、矩阵的秩 …… 223
七、向量组的线性相关性 …… 226
八、向量组的极大线性无关组与秩 …… 229
九、向量组的标准正交化与正交矩阵 …… 232
十、n 维向量空间 …… 235
练习题五 …… 239
练习题五解答 …… 244
第六章　线性方程组、矩阵特征值与特征向量及二次型 …… 251
一、n 元齐次线性方程组及其解法 …… 251
二、n 元非齐次线性方程组及其解法 …… 254
三、矩阵方程求解 …… 258
四、两个线性方程组的同解与公共解 …… 261
五、矩阵的特征值与特征向量 …… 266
六、矩阵相似 …… 269
七、矩阵的相似对角化 …… 273
八、实对称矩阵正交相似对角化 …… 278
九、二次型化标准形 …… 283
十、二次型化规范形 …… 290
十一、正定二次型与正定矩阵 …… 293
练习题六 …… 295
练习题六解答 …… 302
参考文献 …… 310

A. 高 等 数 学

第一章　极限、连续与一元函数微分学

一、函数极限与左、右极限的关系

【主要内容】

1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

注　(ⅰ) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow$对任意 $\varepsilon>0$，如果存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A\Leftrightarrow$对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $-\delta<x-x_0<0$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A\Leftrightarrow$对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $0<x-x_0<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(ⅱ) 当 x_0 是分段函数 $f(x)$ 的分段点时，总是通过计算其左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 来确定 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在.

2. 设 $f(x)$ 在 $|x|>N$(N 是某个正数)内有定义，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

注　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow$对任意 $\varepsilon>0$，存在 $G>0$，使得 $|x|>G$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A\Leftrightarrow$对任意 $\varepsilon>0$，存在 $G>0$，使得 $x<-G$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\Leftrightarrow$对任意 $\varepsilon>0$，存在 $G>0$，使得 $x>G$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

【典型例题】

例 1.1.1　设函数 $f(x)=\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$，求极限 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

精解　由于

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\[2ex] \dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{x}, & x>0\end{cases}$$

是分段函数，所以计算它在分段点 $x=0$ 处的极限应从计算左极限与右极限入手.

由于 $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2+0}{1+0}-1=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+1=\frac{0}{1}+1=1,$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

注 应注意 $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

例 1.1.2 确定使极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在的常数 a 的值，其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x<0,\\ -\dfrac{1}{x}\ln(1+x), & x>0.\end{cases}$$

精解 由 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在可得 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 存在且相等，由此即可算出 a 的值.

由于 $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin ax}{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{ax}{-\sqrt{2}\cdot\frac{x}{2}}=-\sqrt{2}a,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=-1,$$

所以，由 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 得 $-\sqrt{2}a=-1$，即 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例 1.1.3 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

精解 由于 $x\to\infty$ 时，$x-1$ 与 $4x^2$ 相比可忽略不计，同样 1 与 x 相比可忽略不计，$\sin x$ 与 x^2 相比可以忽略不计. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2}+x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2|x|+x}{|x|}=2+\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|},$$

其中，$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-1,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1.$$

所以，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$ 不存在.

二、两个重要极限

【主要内容】

两个重要极限是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ 和 } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\left(\text{或}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\right).$$

它们的推广形式是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k \text{ 和 } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}^{a}.$$

注　以下四个极限也是常用的，应与上面两个极限一起记住：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu(\mu \text{ 为常数}),\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}=\frac{1}{2}.$$

【典型例题】

例 1.2.1　计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^{2}}{(x-a)(x+b)}\right]^{x}$.

精解　用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 的推广形式计算.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{2}}{(x-a)(x+b)}\right]^{x}&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{-a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}\right]^{x}\\&=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-a}{x}\right)^{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{x}}\\&=\frac{1}{\mathrm{e}^{-a}\cdot\mathrm{e}^{b}}=\mathrm{e}^{a-b}.\end{aligned}$$

例 1.2.2　已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}=3$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

精解　由题设知 $\lim\limits_{x\to 0}[\sqrt{1+f(x)\sin x}-1]=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\sin x=0$，所以，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}f(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x}{\mathrm{e}^{2x}-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}\cdot(\sqrt{1+f(x)\sin x}+1)\cdot\frac{\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}}\right],\end{aligned}\tag{1}$$

其中　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}=3$(题设)，

$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+f(x)\sin x}+1)=\sqrt{1+0}+1=2$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x}\xlongequal{令\,t=2x}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{t}-1}{t}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

将它们代入式(1)得

$$\lim_{x\to 0}f(x)=3\times 2\times\frac{1}{\frac{1}{2}\times 1}=12.$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

例 1.2.3 求使得极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$的常数$a$和$b$，其中函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sin x}+a, & -1<x<0,\\ \dfrac{\ln(1+bx)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, & 0<x<1.\end{cases}$$

精解 由$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$知$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，

即
$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{e^{x^2}-1}{\sin x}+a\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+bx)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=1,\tag{1}$$

其中 $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{\sin x}+a\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\right)+a=1\times1\times0+a=a$，

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+bx)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+bx)}{2x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+bx)}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+bx)}{bx}\cdot b\right]=1\cdot b=b.$$

将它们代入式(1)得$a=b=1$.

三、无穷小的比较

【主要内容】

1. 无穷小的比较

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=0$，或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=0$)，则称$f(x)$是$x\to x_0$(或$x\to x_0^-$，或$x\to x_0^+$)时的无穷小；

如果$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$(或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，或$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$)，则称$f(x)$是$x\to\infty$(或$x\to-\infty$，或$x\to+\infty$)时的无穷小.

以$x\to x_0$的情形为例叙述两个无穷小的比较：

设$\alpha(x)$，$\beta(x)$(其中$\beta(x)\neq0$)都是$x\to x_0$时的无穷小.

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小，记为$\alpha(x)=o(\beta(x))$；

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小；

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq0$，则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小，当$\beta(x)=b(x-x_0)^k$(其中$b$，$k$是常数，且$b\neq0$，$k>0$)，称$\alpha(x)$是$k$阶无穷小. 特别当$c=1$时，称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)(x\to x_0)$.

2. 常用等价无穷小

$x\to0$时，以下的等价无穷小是常用的：

$$\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\ e^x-1\sim x,\ (1+x)^\mu-1\sim\mu x(\mu\neq0),\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2.$$

3. 等价无穷小代替定理

设 $x\to x_0$ 时，无穷小 $\alpha(x)$，$\alpha_1(x)$，$\beta(x)$，$\beta_1(x)$ 满足 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在或为无穷大，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

这里的 x_0 若改为 x_0^+，x_0^-，∞，$+\infty$ 或 $-\infty$，上述结论仍成立.

【典型例题】

例 1.3.1　(单项选择题)设当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，$x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 n 为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

精解　通过寻找 $x\to0$ 时 $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$，$x\sin x^n$ 及 $e^{x^2}-1$ 的等价无穷小即可算得 n 的值.

因为当 $x\to0$ 时

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^2\cdot x^2=\frac{1}{2}x^4,$$

$$x\sin x^n\sim x\cdot x^n=x^{n+1},$$

$$e^{x^2}-1\sim x^2,$$

所以，由题设知　$4>n+1>2$，即 $n=2$，因此选项 B 是正确的.

例 1.3.2　求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}$.

精解　由于 $x\to0^+$ 时，

$$e^{x^3}-1\sim x^3,$$

$$1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}\sim\frac{1}{2}\left[\sqrt{x(1-\cos x)}\right]^2=\frac{1}{2}x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{4}x^3,$$

所以，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3}{\frac{1}{4}x^3}=4.$

例 1.3.3　求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\csc^2x}$.

精解　利用公式 $A^b=e^{b\ln A}$ 得

$$(\cos x)^{\csc^2x}=e^{\csc^2x\ln\cos x},$$

然后计算 $\lim\limits_{x\to0}\csc^2x\ln\cos x$ 即可.

由于 $\lim\limits_{x\to0}\csc^2x\ln\cos x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\sin x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\csc^2x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\csc^2x\ln\cos x}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

注　应记住公式 $A^b=e^{b\ln A}$，它可将幂指函数转换成指数函数.

例 1.3.4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x-1)+(\sqrt{1+x^3}-1)\sin\dfrac{1}{x}}{1-\cos x}$.

精解

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)+(\sqrt{1+x^3}-1)\sin\frac{1}{x}}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)}{1-\cos x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{x(1-\cos x)}\cdot\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x},\tag{1}$$

其中，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x-1)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}=1,$$

$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$(利用无穷小的性质：设 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$是无穷小，$\beta(x)$在点 x_0 的某个去心邻域内有界，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\beta(x)=0$).

将它们代入式(1)得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)+(\sqrt{1+x^3}-1)\sin\frac{1}{x}}{1-\cos x}=2+1\times 0=2.$$

例 1.3.5 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=5$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

精解 由题设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=5$ (1)

得 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin 2x}=0$，并且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

于是由式(1)得

$$5=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{\sin 2x}}{x\ln 3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln 3\cdot x\cdot\sin 2x}=\frac{1}{2\ln 3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}.$$

因此，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=10\ln 3$.

四、函数连续的定义

【主要内容】

1. 函数在点 x_0 处连续的概念

设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称$f(x)$在点x_0处连续.

函数$f(x)$在点x_0处连续的充分必要条件是$f(x)$在点x_0处既左连续(即$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$)又右连续(即$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$)，即$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

2. 函数在开区间$(a,\ b)$内和闭区间$[a,\ b]$上连续的定义

如果函数$f(x)$在$(a,\ b)$的每一点处都连续，则称$f(x)$在$(a,\ b)$内连续.

如果函数$f(x)$在$(a,\ b)$内连续，且在点$x=a$处右连续，在点$x=b$处左连续，则称$f(x)$在$[a,\ b]$上连续.

注　初等函数在其定义域区间内或定义域区间上连续.

【典型例题】

例 1.4.1　设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}, & x\neq 1,\\ -\dfrac{4}{\pi^2}, & x=1,\end{cases}$问$f(x)$在点$x=1$处是否连续？

精解　按定义只要检验$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$是否成立即可.

由　$f(1)=-\dfrac{4}{\pi^2}$,

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\xlongequal{令\,t=x-1}\lim_{t\to 0}\frac{\ln\cos t}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln[1+(\cos t-1)]}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}t\right)^2}$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\frac{1}{2}t^2}=-\frac{4}{\pi^2}\cdot 1=-\frac{4}{\pi^2}$$

知$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$，所以$f(x)$在点$x=1$处连续.

例 1.4.2　设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax^2}-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x<0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{\ln(1+x^3)}{\sqrt{1+x^3}-1}, & x>0\end{cases}$在点$x=0$处连续，求常数$a$，$b$.

精解　根据$f(x)$在点$x=0$处连续的充分必要条件有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0),\tag{1}$$

其中，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{ax^2}-1}{x\sin\frac{x}{4}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax^2}{x\cdot\frac{x}{4}}=4a$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x^3)}{\sqrt{1+x^3}-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{\frac{1}{2}x^3} = 2,$$

$f(0) = b.$

将它们代入式(1)得

$$4a = 2 = b, \text{ 即 } a = \frac{1}{2},\ b = 2.$$

例 1.4.3 设函数 $f(x) = \frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1\right]$，那么如何定义 $f(0)$ 的值，使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续?

精解 由函数在点 $x=0$ 处连续的定义知，只要

$$f(0) \overset{\text{定义}}{=\!=} \lim_{x\to 0} f(x)$$

即可. 由于

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1}{x^3}, \tag{1}$$

其中，$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1 = \mathrm{e}^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}} - 1 \sim x\ln\frac{2+\cos x}{3}$

$$= x\ln\left(1+\frac{\cos x - 1}{3}\right) \sim -\frac{1}{3}x(1-\cos x) \sim -\frac{1}{3}x\cdot\frac{1}{2}x^2$$

$$= -\frac{1}{6}x^3 \quad (x\to 0).$$

将它代入式(1)得

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

因此，定义 $f(0) = -\frac{1}{6}$，使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

例 1.4.4 设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x^2\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+2x^2}}, & x<0, \\ \dfrac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, & x>1, \end{cases}$ 试将 $f(x)$ 的定义域扩充到 $(-\infty, +\infty)$，并使 $f(x)$ 处处连续，且在 $(0,1)$ 内的图形是关于直线 $x=\frac{1}{3}$ 对称的抛物线.

精解 显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$ 上连续. 设 $(0,1)$ 上的抛物线方程为 $y = a\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + b$. 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，必须在 $x=0$，1 上连续，即常数 a，b 应满足

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\left[a\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + b\right] = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1+x^2\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+2x^2}}, \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\left[a\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + b\right] = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, \end{cases}$$

即$\begin{cases}\dfrac{1}{9}a+b=1,\\ \dfrac{4}{9}a+b=2.\end{cases}$解此方程组得 $a=3$，$b=\dfrac{2}{3}$.

所以，扩充定义域后的$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+2x^2}}, & x<0,\\ 3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, & x>1.\end{cases}$

五、函数的间断点

【主要内容】

1. 函数间断点的定义

如果函数$f(x)$在点x_0处不连续(即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，或$f(x)$在点$x_0$处无定义，或虽然$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$f(x_0)$都存在，但它们不相等)，则称$x_0$是$f(x)$的间断点.

2. 函数间断点分类

(1) 第一类间断点

设x_0是$f(x)$的间断点，如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在，则称$x_0$是$f(x)$的第一类间断点. 特别当$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$(即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在)时，称$x_0$是$f(x)$的可去间断点；当$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$时，称$x_0$是$f(x)$的跳跃间断点.

(2) 第二类间断点

设x_0是$f(x)$的间断点，但不是第一类间断点，则称x_0是$f(x)$的第二类间断点，特别当$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$时，称$x_0$是$f(x)$的无穷间断点，它是常见的第二类间断点.

【典型例题】

例 1.5.1　设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin(ax^3)}{x^2(\sqrt{1+x}-1)}, & x<0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{ax^2}+x^2-1}{1-\cos 2x}, & x>0,\end{cases}$问常数$a$，$b$为何值时，$x=0$是$f(x)$的可去间断点.

精解　根据可去间断点的定义有

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\neq f(0),\tag{1}$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com