

考研数学复习指导系列丛书

2014

考研数学

冲刺篇

模拟试题5套
及详解

(数学一)

陈启浩 编著

集合精华题目

覆盖考试要点

 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



考研数学复习指导系列丛书

2014 考研数学冲刺篇（数学一） ——模拟试题 5 套及详解

陈启浩 编著



机械工业出版社

本书是考研数学冲刺阶段的复习指导书,适用于参加“数学一”考试的学生.书中包含了5套精心设计的模拟试题,题目难度保持或者稍高于考研题目难度.这些题目大部分为首次公开发布,非常适合考生用来检验复习效果和临考重点复习.本书的详解部分,不仅给出详尽解答,还特别针对考试重点和难点进行了扩展复习.

本书可作为考生自学的复习材料,也可作为考研培训班的辅导教材,还可供大学数学基础课程的相关教学人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

2014 考研数学冲刺篇(数学一)模拟试题5套及详解/陈启浩编著.
—北京:机械工业出版社,2013.10
(考研数学复习指导系列丛书)
ISBN 978-7-111-43939-4

I. ①2… II. ①陈… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解
IV. ①013—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第209738号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:韩效杰 责任编辑:韩效杰 陈崇昱

责任校对:张媛 封面设计:路恩中

责任印制:

印刷厂印刷

2013年10月第1版第1次印刷

184mm×260mm·6.5印张·158千字

标准书号:ISBN 978-7-111-43939-4

定价: 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010) 88361066 教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售一部:(010) 68326294 机工官网:<http://www.cmpbook.com>

销售二部:(010) 88379649 机工官博:<http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线:(010) 88379203 封面无防伪标均为盗版

前 言

深入地读完我们编写的 2014 考研数学复习指导系列丛书(包括认真地推演了其中的每道例题和练习题)的考生,已经具有了较强的分析问题和解决问题的能力,具有了能够从容面对即将来临的研究生考试的实力.但是为了把准备工作做得更充分,为了践行“战前多流汗,战时少流血”,应在考试前进行五场“实战演习”——认真、独立地做完五套模拟试题,作为最后的冲刺.

书中的五套试题是根据考研的数学大纲和编者的教学经验,精心设计的,它既涵盖性强,又重点突出,其中的问题新颖,既有较强的针对性,又有明显的前瞻性.书中给出了这五份试题的详细、规范的解答,每题之后都加有附注,用简明的词语,指明了与本题有关的概念、方法等值得注意的考点.当然,我们在“实战演习”时,不应一遇到困难就翻看解答,一定要认真、反复地思索,这样才能达到使用本书的冲刺目的——进一步提高应试能力,向着高分进发.

衷心祝愿考生们取得骄人的成绩,也欢迎考生们对本书提出宝贵意见,可发邮件到 cqh-shuxue@gmail.com,非常感谢!

北京邮电大学教授
陈启浩

目 录

前言	
模拟试题(一)	1
模拟试题(二)	8
模拟试题(三)	15
模拟试题(四)	22
模拟试题(五)	29
模拟试题(一)解答	36
模拟试题(二)解答	49
模拟试题(三)解答	62
模拟试题(四)解答	74
模拟试题(五)解答	87

模拟试题 (一)

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数 $f(x) = x(x-2)^2 |x(x-2)|$ 的二阶不可导点个数为

- (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

[]

(2) 下列等式中不正确的是

(A) $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2$;

(B) $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{i}{2n}\right)^2$;

(C) $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2$;

(D) $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{3i-1}{3n}\right)^2$.

[]

(3) 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的三个二阶偏导数 $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ 存在, 则必有

(A) $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$;

(B) $f'_x(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微;

(C) $f'_x(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续;

(D) $f'_x(x, y_0)$ 在点 x_0 处可微.

[]

(4) 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则以下各式正确的是

(A) $\iiint_{\Omega} \tan(x+y+z) dv = 1$;

(B) $\iiint_{\Omega} \tan(x+y+z) dv = 0$;

(C) $\iiint_{\Omega} \tan(x+y+z) dv = 8 \iiint_{\Omega_1} \tan(x+y+z) dv$ (Ω_1 是 Ω 的第一卦限部分);

(D) $\iiint_{\Omega} \tan(x+y+z) dv = \iiint_{\Omega} \tan(3x) dv$.

[]

(5) 设 A 是 n 阶实矩阵, 则方程组 $Ax = 0$ 有解是方程组 $A^T Ax = 0$ 有解的

(A) 必要而非充分条件;

(B) 充分而非必要条件;

- (C) 充分必要条件;
(D) 既非充分也非必要条件.

[]

(6) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4$ 的最小特征值为

- (A) -1; (B) -2;
(C) 1; (D) 2.

[]

(7) 设随机变量 X, Y 相互独立, 概率密度都为 $f(t)$, 则随机变量 $Z = X - 2Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 为

- (A) $f_Z(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f\left(\frac{z-x}{2}\right) dx$;
(B) $f_Z(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f\left(\frac{x-z}{2}\right) dx$;
(C) $f_Z(z) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(2(z-x)) dx$;
(D) $f_Z(z) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(2(x-z)) dx$.

[]

(8) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本, 则统计量 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 的数学期望与方差分别为

- (A) $\frac{1}{n}\sigma^2, \frac{2}{n}\sigma^4$; (B) $\frac{1}{n}\sigma^2, \frac{4}{n}\sigma^4$;
(C) $\sigma^2, \frac{2}{n}\sigma^4$; (D) $\sigma^2, \frac{4}{n}\sigma^4$.

[]

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x) = \begin{cases} (e^x + \sin x)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}, & x > 0, \\ a, & x \leq 0 \end{cases}$ 连续, 则常数 $a =$ _____.

(10) 设二元函数 $f(u, v)$ 可微, 则 $\frac{\partial}{\partial x} f\left(e^{xy}, \cos \frac{1}{x}\right) =$ _____.

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} + (-1)^{\cos \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2^n} \right] =$ _____.

(12) 设二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解为

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x),$$

则二阶非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = e^x \cos x$ 应具有的特解形式为 _____.

(13) 设四阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $A^* =$ _____.

(14) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 p ($0 < p < 1$), 记 A 为“此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标”这一事件, 又记 X 为服从参数是 $P(A)$ 的 0-1 分布的随机变量, 则 $E(X^2) =$ _____.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{1}{\sin x \cos x \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}} dx$.

(16) (本题满分 10 分)

已知 $f_n(x)$ 满足 $f'_n(x) = f_n(x) + x^{n-1}e^x$ 及 $f_n(1) = \frac{e}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 求

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} f_n(x).$$

(17)(本题满分 10 分)

已知二元连续函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x, y) = y + \int_0^x f(x-t, y) dt$, $g(x, y)$ 满足 $g'_x(x, y) = g'_y(x, y) = 1$ 及 $g(0, 0) = 0$. 求二重积分 $\iint_D f(\sqrt{x}, g(x, y)) d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $x = y^2$ 及直线 $x = 1$ 围成的平面图形.

(18)(本题满分 10 分)

设曲线 $L: \begin{cases} x = \sin z, \\ y = 0. \end{cases}$

(I) 求曲线积分 $\int_{\widehat{OA}} (e^z \sin x + x - z) dz + (e^z \cos x - z) dx$, 其中 \widehat{OA} 是由原点沿曲线 L 到点 $A(0, 0, \pi)$ 的有向曲线;

(II) 记由曲线 $L(0 \leq z \leq \pi)$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面(外侧)为 Σ , 求曲面积分

$$\iint_{\Sigma} xz dy dz + 2xy dz dx + 3xy dx dy.$$

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f'_+(a) > 0$, $f(b) = 0$. 此外存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$, $f'(c) < 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, a)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (b, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (3, 4, b)^T$ 线性表示, 但 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 线性表示, 求常数 a, b .

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ (其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ 以及 \mathbf{Q} 是三阶正交矩阵) 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 且 \mathbf{Q} 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, 求对称矩阵 \mathbf{A} 的伴随矩阵 \mathbf{A}^* .

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 - x^3 y - xy^3), & |x| < 1, |y| < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 (I) 随机变量 $Z = X^2$ 的概率密度 $f_Z(z)$;

(II) 随机变量 $W = (X - Y)^2$ 的数学期望.

(23) (本题满分 11 分)

(I) 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1 - \theta$	$\theta - \theta^2$	θ^2

(其中, $\theta \in (0, 1)$ 是未知参数). 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 X_1, X_2, \dots, X_n 中取值等于 i 的个数 ($i=1, 2, 3$), 求常数 a_1, a_2, a_3 , 使得 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量.

(II) 当 $n=300, \theta=0.5$ 时, 用中心极限定理计算上述样本中取值等于 2 的 N_2 的概率 $P(N_2 > 80)$. (标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 的值: $\Phi(0.57) = 0.7157, \Phi(0.67) = 0.7486, \Phi(0.77) = 0.7794$.)

模拟试题 (二)

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 方程 $2^x - x^2 - 1 = 0$ 的不同实根个数为

- (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

[]

(2) 设 $F(x) = \int_0^x \max\{e^{-t}, e^t\} dt$, 则

(A) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x < 0, \\ e^x - 1, & x \geq 0; \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1, & x < 0, \\ e^x - 1, & x \geq 0; \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} < 0, \\ 1 - e^x \geq 0; \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1, & x < 0, \\ 1 - e^x, & x \geq 0. \end{cases}$

[]

(3) 设 $\{a_n\}$ 是单调减少收敛于零的正项数列，则当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时，下列结论正确的是

(A) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散；

(B) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛；

(C) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛；

(D) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛。

[]

(4) 设 Σ 是半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4 (z \geq 0)$ 的上侧，则关于坐标的曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x+2) dydz + z dx dy$ 等于

(A) $2 \iint_{D_z} \sqrt{4 - y^2 - z^2} dy dz;$

(B) $2 \iint_{D_z} (\sqrt{4 - y^2 - z^2} + 2) dy dz + \iint_{D_y} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy;$

(C) $2 \iint_{D_z} \sqrt{4 - y^2 - z^2} dy dz + \iint_{D_y} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy;$

(D) $\iint_{D_y} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy.$

其中 D_{xy}, D_{yz} 分别是 Σ 在 xOy 平面与 yOz 平面的投影.

[]

(5) 设向量组 α, β, γ 线性无关, 向量组 α, β, δ 线性相关, 则

- (A) α 可由 β, γ, δ 线性表示;
 (B) δ 可由 α, β, γ 线性表示;
 (C) β 不可由 α, γ, δ 线性表示;
 (D) δ 不可由 α, β, γ 线性表示.

[]

(6) 设 A 是 n 阶矩阵及命题

- ① A 有 n 个不同的特征值;
 ② A 有 n 个线性无关的特征向量;
 ③ A 是实对称矩阵;
 ④ A 的每个 n_i 重特征值 λ_i 的特征矩阵 $\lambda_i E - A$ 都满足 $r(\lambda_i E - A) = n - n_i$ (其中, E 是 n 阶单位矩阵),

则 A 可相似对角化的充分必要条件是

- (A) ①②; (B) ②③;
 (C) ②④; (D) ①④.

[]

(7) 下列命题中不正确的是

(A) 设二维随机变量 (X, Y) 在矩形区域 $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 上服从均匀分布, 则 X 与 Y 相互独立;

(B) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} abe^{-(ax+by)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{其中, } a, b \text{ 都是正数}),$$

则 X 与 Y 相互独立;

(C) 设二维随机变量 (X, Y) 在圆域 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 上服从均匀分布 (其中, R 是正数), 则 X, Y 相互独立;

(D) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自同一总体的简单随机样本, 则随机变量 $X = f_1(X_1, X_2), Y = f_2(X_3, X_4)$ (其中, f_1, f_2 都是连续函数) 相互独立.

[]

(8) 设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, 它们相互独立, 又设 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 是分别来自 X 和 Y 的简单随机变量, 记

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (\text{其中, } \bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j),$$

则 DZ 为

- (A) σ^2 ; (B) $\frac{\sigma^2}{n_1 + n_2 - 2}$;

(C) $\frac{\sigma^4}{n_1 + n_2 - 2}$;

(D) $\frac{2\sigma^4}{n_1 + n_2 - 2}$.

[]

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 设极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + f(x)}{x^4} = 1$ ，则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} =$ _____.

(10) 设函数 $z = f(x + y, yg(x))$ ，其中， f 具有二阶连续偏导数，曲线 $w = g(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $w = 1 + x$ ，且 $f(u, v)$ 的各阶偏数在 $u = v$ 处的值都为 1，则 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=1}} =$ _____.

(11) 曲面 $z = x^2 + y^2$ 被上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2 (z \geq 0)$ 截下部分 Σ 的面积为 _____.

(12) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$ 其余弦级数与正弦级数的和函数分别为

$S_1(x)$ 与 $S_2(x)$ ，则 $S_1(-1)$ 与 $S_2\left(\frac{5}{2}\right)$ 分别为 _____.

(13) 设 A, B 分别为二阶与四阶矩阵，且 $r(A) = 1, r(B) = 2, A^*, B^*$ 分别是 A 与 B 的伴随矩阵，则

$$r \begin{pmatrix} O & A^* \\ B^* & O \end{pmatrix} = \text{_____}.$$

(14) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从参数为 1 的指数分布，即它们的概率密度都为 $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 则 $P(\max\{X, Y\} \leq 1) =$ _____.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有连续导数，且满足

$$y(x) = 1 + x + 2 \int_0^x (x-t)y(t)y'(t) dt,$$

求 $y^{(n)}(x)$.

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y, z) = 2x + 2y + x^2 + y^2 - z^2$ 在 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 上的最大值与最小值.

(17) (本题满分 10 分)

证明: 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $2\sin x + \tan x > 3x$.

(18) (本题满分 10 分)

设 $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \tan \frac{x}{2}}{1 - (1+x)^{x \sin^2 \frac{x}{2}}}$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^{n-1} \alpha$ 的和.

(19)(本题满分 10 分)

$$\text{计算曲线积分 } I = \int_C \frac{1}{x^2 + y^2} (x dy - y dx),$$

其中, C 为曲线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) - a\pi, \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ ($a > 0$) 从 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段.

(20)(本题满分 11 分)

$$\text{已知线性方程组 (A) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + (a+4)x_2 - 5x_3 = 6, \\ -x_1 - 2x_2 + ax_3 = -3 \end{cases} \text{ 有无穷多解.}$$

(I) 求非零常数 a 的值;

(II) 对上述算得的 a 值, 求方程组 (A) 与 (B) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + \lambda x_2 = 1 \end{cases}$

有公共解时的 λ 值及公共解.