考研数学复习指导系列丛书

2014 考研数学

冲刺篇

模拟试题5套及详解

（数学三）

陈启浩　编著

集合精华题目

覆盖考试要点

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研数学复习指导系列丛书

2014 考研数学冲刺篇（数学三）——模拟试题 5 套及详解

陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是考研数学冲刺阶段的复习指导书，适用于参加“数学三”考试的学生．书中包含了5套精心设计的模拟试题，题目难度保持或者稍高于考研题目难度．这些题目大部分为首次公开发布，非常适合考生用来检验复习效果和临考重点复习．本书的详解部分，不仅给出了详尽解答，还特别针对考试重点和难点进行了扩展复习．

本书可作为考生自学的复习材料，也可作为考研培训班的辅导教材，还可供大学数学基础课程的教学人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

2014考研数学冲刺篇（数学三）模拟试题5套及详解/陈启浩编著．—北京：机械工业出版社，2013.10
（考研数学复习指导系列丛书）
ISBN 978-7-111-44146-5

Ⅰ．①2…　Ⅱ．①陈…　Ⅲ．①高等数学－研究生－入学考试－题解
Ⅳ．①O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第224646号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　熊海丽
责任校对：张　媛　封面设计：路恩中
责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2013年10月第1版第1次印刷
184mm×260mm·6.5印张·150千字
标准书号：ISBN 978-7-111-44146-5
定价：19.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　　言

深入地读完我们编写的 2014 考研数学复习指导系列丛书(包括认真地推演了其中的每道例题和练习题)的考生，已经具有了较强的分析问题和解决问题的能力，具有了能够从容面对即将来临的研究生考试的实力．但是为了把准备工作做得更充分，为了践行“战前多流汗，战时少流血”，应在考试前进行 5 场“实战演习”——认真、独立地做完 5 套模拟试题，作为最后的冲刺．

书中的 5 套试题是根据考研的数学大纲和编者的教学经验精心设计的，它既涵盖性强，又重点突出，其中的问题新颖，既有较强的针对性，又有明显的前瞻性．书中给出了这 5 套试题的详细、规范的解答，每题之后都加有附注，用简明的语言，指明了与本题有关的概念、方法等值得注意之点．当然，在“实战演习”时，不应一遇到困难就翻看详解，一定要认真、反复地思索，这样才能达到使用本书冲刺的目的——进一步提高应试能力，向着高分进击．

衷心祝愿考生们取得骄人的成绩，并欢迎读者对本书提出宝贵意见，可发邮件到 cqhshuxue@ gmail. com，非常感谢！

北京邮电大学教授　陈启浩

目　　录

模拟试题(一)

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）方程 $2^x - x^2 - 1 = 0$ 的不同实根个数为

（A）1；　　（B）2；　　（C）3；　　（D）4.

[　　]

（2）设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\cos^2 x\mathrm{d}x, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x + \cos^4 x)\mathrm{d}x, P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x - \cos^7 x)\mathrm{d}x$，则它们的大小次序为

（A）$M<N<P$；　　（B）$N<M<P$；　　（C）$P<M<N$；　　（D）$P<N<M$.

[　　]

（3）收敛半径 $R=1$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x=-1$ 处条件收敛的

（A）充分而非必要条件；　　（B）必要而非充分条件；

（C）充分必要条件；　　（D）既非必要又非充分条件．

[　　]

（4）微分方程 $y''+y=2\sin x$ 应有的特解形式为

（A）$a\cos x + b\sin x$；　　（B）$x(a\cos x + b\sin x)$；

（C）$ax\cos x$；　　（D）$bx\sin x$.

[　　]

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征值 λ 的特征向量，且存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则

（A）$\boldsymbol{B}^{-1}$有特征值$\frac{1}{\lambda}$及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$；

（B）$\boldsymbol{B}^{-1}$有特征值$\frac{1}{\lambda}$及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$；

（C）$\boldsymbol{B}^{-1}$有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$；

（D）$\boldsymbol{B}^{-1}$有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$.

[　　]

（6）设 n 维向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m (m \leqslant n)$，记矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 和 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$，则下列命题不正确的是

(A) 当(Ⅰ)与(Ⅱ)等价时,(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩;

(B) 当(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩时,(Ⅰ)与(Ⅱ)等价;

(C) 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等秩;

(D) 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等秩时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

[　　]

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 记 $Y=X^2$ 和二维随机变量(X,Y)的分布函数为 $F(x,y)$,则 $F(1,4)$等于

(A) $\frac{1}{4}$;　　(B) $\frac{1}{2}$;　　(C) $\frac{3}{4}$;　　(D) 1.

[　　]

(8) 设 X_1,X_2,…,X_n 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$的一个简单随机样本,则统计量 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 的数学期望与方差分别为

(A) $\frac{1}{n}\sigma^2$,$\frac{2}{n}\sigma^4$;　　(B) $\frac{1}{n}\sigma^2$,$\frac{4}{n}\sigma^4$;

(C) σ^2,$\frac{2}{n}\sigma^4$;　　(D) σ^2,$\frac{4}{n}\sigma^4$.　　[　　]

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 连续,则常数 $a=$__________.

(10) 设二元函数 $f(u,v)$可微,则 $\frac{\partial}{\partial x}f(e^{xy},\cos\frac{1}{x})=$__________.

(11) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}+(-1)^{\cos\frac{n\pi}{2}}\frac{1}{2^n}\right]$的和为__________.

(12) 设某商品的收益函数为 $R(p)$,收益弹性为 $1+p+p\ln p$,(其中 p 是价格),且 $R(1)=1$,则 $R(p)=$__________.

(13) 设四阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}^*=$__________.

(14) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，记 A 为“此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标”这一事件，又记 X 为服从参数为 $P(A)$ 的 0 - 1 分布的随机变量，则 $E(X^2)=$ ＿＿＿＿＿＿.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本小题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

(16)(本小题满分 10 分)

已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\mathrm{e}^x$，且 $f_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n!}$，记 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$，求 $s(x)$ 的表达式并画出函数 $y=s(x)$ 的简图．

(17)(本小题满分 10 分)

求二元函数 $f(x, y)=2x^2+y^2-2x^2y^2$ 在闭区域 $D=\{(x, y) \mid x^2+2y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\}$ 上的最大值与最小值.

(18)(本小题满分 10 分)

设函数 $f(x, y)=\begin{cases} xy, & (x, y)\in D_1, \\ 1-x-y, & (x, y)\in D_2, \end{cases}$ 其中 D_1, D_2 是 $\triangle OAB$ 被曲线 $xy+x+y=1$ 划分成的两部分(见图 1-18), 求二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

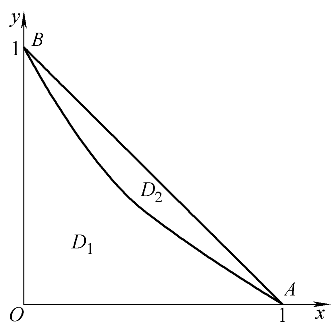

图　1-18

(19)(本小题满分 10 分)

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内二阶可导，且$f'_+(a)>0$，$f(b)=0$. 此外存在$c\in(a, b)$，使得$f(c)=0$，$f'(c)<0$. 证明：存在$\xi\in(a, b)$，使得$f''(\xi)=0$.

(20)(本小题满分 11 分)

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(b, 3, 5)^{\mathrm{T}}$不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3, 4, b)^{\mathrm{T}}$线性表示，但$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，求常数$a$，$b$.

(21)(本小题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$ 以及 $\boldsymbol{Q}$ 是三阶正交矩阵)下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$.

(22)(本小题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - x^3y - xy^3), & |x| < 1, \ |y| < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(Ⅰ)求随机变量 $Z = X^2$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

(Ⅱ)求随机变量 $W = (X - Y)^2$ 的数学期望.

(23)(本小题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 是未知参数，x_1，x_2，…，x_n 是来自总体 X 的一个简单随机样本的观察值，求 θ 的矩估计值与最大似然估计值.

模拟试题(二)

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设函数 $f(x)=(x-2)|x(x-2)|$，则

(A) $f(x)$ 在点 $x=0$，2 处都不可导；

(B) $f(x)$ 在点 $x=0$，2 处都可导；

(C) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，而在点 $x=2$ 处不可导；

(D) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导，而在点 $x=2$ 处可导．

[　　]

(2) 下列等式中不正确的是

(A) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$；

(B) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}\left(\frac{i}{2n}\right)^2$；

(C) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2$；

(D) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{3i-1}{3n}\right)^2$.

[　　]

(3) 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$ 则

(A) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续；

(B) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数都为零；

(C) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数存在但都不为零；

(D) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微．

[　　]

(4) 设 $\{a_n\}$ 是单调减少收敛于零的正项数列，则当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，下列结论正确的是

(A) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散；

(B) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛;

(C) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛;

(D) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.

[　　]

(5) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\delta}$ 线性相关, 则

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 不可由 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$ 线性表示;

(B) $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示;

(C) $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$ 线性表示;

(D) $\boldsymbol{\delta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵且有以下命题:

① $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值;

② $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量;

③ $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵;

④ $\boldsymbol{A}$ 的每个 n_i 重特征值 λ_i 的特征矩阵 $\lambda_i \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 都满足 $r(\lambda_i \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = n - n_i$(其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵).

则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件有两类, 它们是

(A) ①②;　　(B) ②③;　　(C) ②④;　　(D) ①④.

[　　]

(7) 下列命题不正确的是

(A) 设二维随机变量(X, Y)在矩形区域$\{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$上服从均匀分布, 则 X 与 Y 相互独立;

(B) 设二维随机变量(X, Y)的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} ab\mathrm{e}^{-(ax+by)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}(\text{其中 } a, b \text{ 都是正数}),$$

则 X 与 Y 相互独立;

(C) 设二维随机变量(X, Y)在圆域$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$上服从均匀分布(其中 R 是正数), 则 X 与 Y 相互独立;

(D) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自同一总体的简单随机样本, 则随机变量 $X = f_1(X_1, X_2)$ 与 $Y = f(X_3, X_4)$(其中 f_1, f_2 都是连续函数)相互独立.

[　　]

(8) 设随机变量 $t\sim t(n)$，对 $\alpha\in(0,1)$，$t_\alpha(n)$ 为满足 $P(t>t_\alpha(n))=\alpha$ 的实数，则满足 $P(|t|\leqslant b)=\alpha$ 的 b 等于

(A) $t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$;　(B) $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$;　(C) $t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$;　(D) $t_{\frac{1+\alpha}{2}}(n)$.

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 函数 $y=y(x)$ 由微分方程 $x^2y'+y+x^2e^{\frac{1}{x}}=0$ 及 $y(1)=0$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 的斜渐近线方程为________.

(10) 设 a 是常数，则 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}\mathrm{d}x=$ ________.

(11) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，且

$$f'_x(0,0)=1,\quad f'_y(0,0)=-1,$$

则极限 $\lim\limits_{t\to0}\frac{f(2t,0)+f(0,\sin t)-2f(t,t)}{t}=$ ________.

(12) 函数 $f(x)=xe^{x+1}+\frac{1}{2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的零点个数为________.

(13) 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，记它的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，则三阶行列式 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*\right|=$ ________.

(14) 设 X 是离散型随机变量，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}$$

又设 Y 是连续型随机变量，其概率密度为 $\varphi(t)=\begin{cases}e^{-t}, & t>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 记 $a=P(X=1)$，则概率 $P(Y\geqslant a)=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本小题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}(e^x+\sin x)^{\frac{\sin x}{\ln(1+x^2)}}$.

(16)(本小题满分 10 分)

设 $D=\{(x, y) \mid 0\leqslant x\leqslant 2, \sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant \sqrt{4-x^2}\}$，分别求 D 绕 x 轴和 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_x 和 V_y.

(17)(本小题满分 10 分)

计算二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_0^{\arccos\frac{1}{r}} r\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$.

(18)(本小题满分 10 分)

求微分方程 $y''+2y'+y=\mathrm{e}^{-x}+\sin 2x\cos x$ 的通解.

(19)(本小题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n(2n-1)}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.