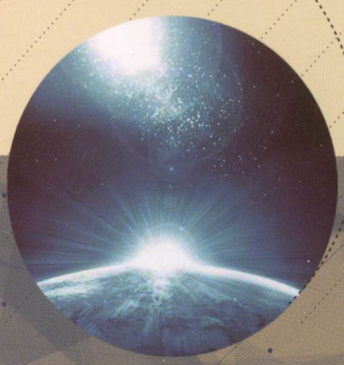
“十三五”国家重点出版物出版规划项目
卓越工程能力培养与工程教育专业认证系列规划教材（电气工程及其自动化、自动化专业）
普通高等教育 电气工程 自动化 系列规划教材

现代控制理论基础

第4版

孙炳达 主编

Fundamentals of
Modern Control Theory



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十三五”国家重点出版物出版规划项目

卓越工程能力培养与工程教育专业认证系列规划教材（电气工程及其自动化、自动化专业）

普通高等教育电气工程 自动化系列规划教材

现代控制理论基础

第 4 版

主编　孙炳达
参编　梁慧冰

机 械 工 业 出 版 社

本书是为“应用型工科”控制类相关专业学生和非控制类学科的硕士研究生学习“现代控制技术和方法”而撰写的教材。

线性系统理论是现代控制理论的基础，也是目前理论上最完善、技术上最成熟、工程应用最广泛的内容。本次修订除对原书第3版的部分章节内容改写外，还增写了“最优控制”的有关内容，补充了部分习题参考答案供读者学习参考。

本书重点突出、概念清晰、内容精炼、简明易懂，具有工程应用的特色，可帮助读者正确理解和掌握“现代控制理论”中最基础又最重要的概念、原理和分析、综合系统的方法，了解工程上的典型应用实例，既方便教师教学也方便学生学习。

本书配有免费电子课件，欢迎选用本书作教材的教师登录 www. cmpedu. com 注册下载。

图书在版编目（CIP）数据

现代控制理论基础 / 孙炳达主编 . — 4 版. —北京：机械工业出版社，2018. 8

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-111-60526-3

Ⅰ. ①现… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①现代控制理论—高等学校—教材

Ⅳ. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 161744 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：王 康 责任编辑：王 康

责任校对：张 薇 封面设计：鞠 杨

责任印制：张 博

河北鑫兆源印刷有限公司印刷

2018 年 8 月第 4 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 13 印张 · 317 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-60526-3

定价：32.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www. cmpbook. com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo. com/cmp1952
	教育服务网：www. cmpedu. com
封面无防伪标均为盗版	金 书 网：www. golden-book. com

前　言

本书是为“应用型工科”控制类相关专业，如自动化、电气工程及其自动化等专业学生和非控制类学科，如机电、信息、计算机应用等硕士研究生学习“现代控制技术和方法”而撰写的教材或参考书。本书重点突出、概念清晰、内容精练、简明易懂，具有工程应用的特色，既方便教师教学也方便学生学习。

线性系统理论是现代控制理论的基础，也是目前理论上最完善、技术上最成熟、工程应用最广泛的一个分支。本书可帮助读者正确理解和掌握其中最基础又最重要的概念、原理和分析、综合系统的方法，了解工程上的一些应用实例。

本书共分7章。第一章介绍现代控制中用到的建立系统数学模型的方法；第二～四章涉及系统的性能分析，主要包括系统的能控性及能观测性、稳定性分析；第五章介绍状态空间综合(设计）系统的方法；第六章介绍“最优控制”的主要内容；第七章为应用实例，有利于学生对全书内容的进一步理解和掌握。

本书在第3版（孙炳达、梁慧冰编著）的基础上修订而成。本次修订由孙炳达完成。其中，重新撰写第三章的第五～七节；增补有关“最优控制”的主要内容；对全书各章的习题重新选排并提供部分习题的参考答案。

本书的出版，曾得到广东工业大学、广东技术师范大学及天河学院、广东省重点学科及机械工业出版社等单位的支特，特别是在编写及修订过程中参阅和引用了同类教材的一些内容，编者对上述单位和个人表示深深的谢意！

由于编者水平有限，书中难免仍会有不妥和错误之处，衷心希望同行及读者批评指正。

编　者

目　录

前　言

第一章　控制系统的状态空间描述 …… 1

第一节　状态空间描述的基本定义及一般形式 …… 1

第二节　根据系统机理建立状态空间表达式 …… 6

第三节　由系统微分方程式转换为状态空间表达式 …… 10

第四节　由系统传递函数转变为状态空间表达式 …… 16

第五节　由系统结构图建立状态空间表达式 …… 27

第六节　由状态空间描述转换成传递函数描述 …… 31

第七节　离散控制系统的状态空间描述…… 37

习题 …… 40

第二章　线性系统的状态空间响应分析 … 42

第一节　线性定常连续系统状态空间响应分析 …… 42

第二节　系统状态转移矩阵的性质及其计算 …… 48

第三节　线性定常离散系统状态空间响应分析 …… 62

习题 …… 67

第三章　线性系统的能控性与能观测性 …… 69

第一节　能控性与能观测性的基本概念 …… 69

第二节　线性定常系统的能控性及其判据 …… 71

第三节　线性定常系统的能观测性及其判据 …… 76

第四节　离散系统的能控性与能观测性 …… 80

第五节　能控性与能观测性的对偶关系 …… 85

第六节　能控标准型和能观测标准型 …… 87

第七节　系统的结构分解 …… 92

第八节　传递函数阵的实现问题 …… 99

第九节　能控性和能观测性与传递函数零极点的关系 …… 108

习题 …… 110

第四章　控制系统的稳定性分析 …… 113

第一节　动态系统的外部稳定性 …… 113

第二节　动态系统的内部稳定性 …… 114

第三节　李雅普诺夫判稳第一方法 …… 119

第四节　李雅普诺夫判稳第二方法 …… 122

第五节　李雅普诺夫判稳方法在线性系统中的应用 …… 126

习题 …… 131

第五章　线性定常系统的综合 …… 133

第一节　线性反馈控制系统的基本结构 …… 133

第二节　带输出反馈系统的综合 …… 135

第三节　带状态反馈系统的综合 …… 139

第四节　状态重构与状态观测器的设计 …… 145

第五节　带观测器状态反馈系统的综合 …… 154

第六节　解耦控制系统的综合 …… 157

习题 …… 166

第六章　线性系统的最优控制 …… 167

第一节　最优控制的数学表达 …… 167

第二节　求解最优控制率的方法 …… 167

第三节　线性二次型最优控制 …… 168

第四节　线性二次型最优控制系统的设计 …… 171

习题 …… 179

第七章　工程应用实例 …… 181

第一节　单倒立摆控制系统的状态空间设计 …… 181

第二节　大型桥式起重机行车控制系统的状态空间设计 …… 187

第三节　液压伺服电动机最优控制系统 …… 199

附录　部分习题参考答案 …… 201

参考文献 …… 203

第一章 控制系统的状态空间描述

系统的“数学模型”，能反映系统固有的“稳态、动态特性”。

经典控制理论中，系统的“数学模型”是用微分方程、传递函数、动态结构图等来描述的，这种描述又常称为系统的“**外部描述**”；控制对象主要是单输入－单输出的线性定常系统；采用的分析和综合方法，主要是基于复数域的间接方法，即频率特性法和根轨迹法。这两种方法，对性能要求不必太精准的系统来说，已被全世界控制界和工程应用界证明是完全合适而且是很有成效的。

由于控制系统是朝着复杂的大系统发展，控制任务更加复杂，其对控制的程度、范围及适应能力的要求越来越高、性能要求越来越精准。经典控制理论已难予信任和满足这类系统的分析及设计要求，因此便产生了现代控制理论并得到了迅速的发展。

现代控制理论中，系统的“数学模型”通常是用状态空间表达式或状态变量图来描述的，这种描述又常称为系统的“**内部描述**”；控制对象可以是单输入－单输出，可以是多输入－多输出，可以是线性的也可以是非线性的，可以是定常的也可以是时变的；现代控制理论采用的是时域的直接分析方法，能对给定的性能或综合指标设计出最优控制系统。

目前，现代控制理论主要包含 5 大方面内容或者说 5 个分支，分别是线性系统理论、系统建模与参数辨识、最优滤波、最优控制和自适应控制。其中，线性系统理论是现代控制理论的基础，也是目前理论上最完善、技术上最成熟、工程应用最广泛的一个分支，它是以微分方程、线性代数（矩阵运算）为主要的数学工具，以状态空间为基础的分析、综合系统的方法。

本章只重点介绍和讨论建立单输入－单输出线性定常系统状态空间描述的一些主要方法及相关问题，一是因为所讨论的方法具有代表性，二是这类系统在工业中目前仍占有很大比例。

第一节　状态空间描述的基本定义及一般形式

一、基本定义与概念

1. 状态

控制系统状态的定义是，能完全地描述或确定系统动态（时域）行为的个数最少的一组变量。

定义中的“完全描述或确定”的含义是指，如果给出了这组变量的各初值和 $t \geqslant 0$ 时的系统输入量，那么，系统在 $t \geqslant 0$ 时的任何瞬间的行为都能被完全确定。

定义中“个数最少”的含义是指，对于所选定的一组变量，若减少了其中的一个，则无法确定系统的行为；若再增加一个又没有必要，因此，要选择线性无关的变量作为状态。

2. 状态变量

构成系统状态中的每一个变量。常用 x_1，x_2，x_3，…表示。

状态变量通常是物理量，或是一些物理量的组合；可以是能测量的，也可以是不能测量的。但是，从工程应用角度，状态变量应选择容易测量的物理量为好，这对系统的分析和实施控制都会比较方便。

特别要**注意**的是，状态变量的个数等于系统的阶数，即系统中独立储能元件的数目。所以，n 阶系统仅可选 n 个状态变量，但选取具有非唯一性。例如，三相异步电动机在两相同步旋转坐标系中的数学模型是5阶微分方程，系统中的独立变量有9个，但考虑到转子电流的两个分量不可测，所以，状态变量只在7个变量中，选5个能检测的变量作为状态变量。

3. 状态矢量

状态矢量又称状态向量，把状态变量 x_1，x_2，…，x_n，视为向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的分量，则称 $\boldsymbol{x}(t)$ 为状态矢量。常简写为 $\boldsymbol{x}$，即

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{或} \ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=(x_1,\ x_2\cdots,\ x_n)$$

4. 状态空间

以状态变量 x_1，x_2，…，x_n 为坐标轴所构成的 n 维空间。

n 维空间是一个抽象的概念，但可以从几何学上的二维空间是一个平面、三维空间是一个立方体推广和联想。

5. 状态方程

状态变量的导数与状态变量和输入量之间关系的一阶微分方程组（连续系统）或一阶差分方程组（离散系统）。

6. 输出方程

系统输出量与状态变量和输入量之间关系的代数方程。输出量常用英文的大小写字母“Y”或“y”表示。

7. 状态空间表达式

状态方程和输出方程，总称为系统的状态空间表达式，或称为动态方程式，它构成了对系统动态行为的完整描述。

8. 状态变量图

反映系统输出量与输入量及各状态变量之间传递关系的图形。

系统的**状态空间描述**，是通过“**状态空间表达式**”或（和）“**状态变量图**”来表示的。

二、状态空间表达式的一般形式

由定义可知，系统的状态空间表达式，应包含两个方程：一个是状态方程；另一个是输出方程。

1. 单输入－单输出线性系统

（1）定常连续系统

一单输入－单输出线性定常连续系统，设 u 为输入量，y 为输出量。若系统有 n 个状态

变量 x_1，x_2，…，x_n，则根据**状态方程**的定义，它是由 n 个一阶微分方程式组成的一方程组，一般形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_nu \end{cases} \tag{1-1}$$

式中的系数 a_{ij}（$i=1$，2，…，n；$j=1$，2，…，n），b_1，b_2，…，b_n 与系统参数有关。

输出方程表达式的一般形式为

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + du \tag{1-2}$$

式中的系数 c_i（$i=1$，2，…，n）和 d 与系统参数有关。

式（1-1）和式（1-2）构成了描述系统的**状态空间表达式**。写成**向量－矩阵式**为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u & \text{状态方程} \\ y = (c_1c_2\cdots\cdots c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + du & \text{输出方程} \end{cases} \tag{1-3}$$

或简写成

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \\ y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} + du \end{cases} \tag{1-4}$$

式中 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$；$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$；$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$；$\boldsymbol{c} = (c_1c_2\cdots\cdots c_n)$

$\boldsymbol{x}$ 是 $n\times1$ 维的**状态向量**；$\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 维矩阵，称为**系统矩阵**；$\boldsymbol{b}$ 是 $n\times1$ 维向量，称为**输入向量**或**控制向量**；$\boldsymbol{c}$ 是 $1\times n$ 维向量，称为**输出向量**；d 为标量，称为**直接传输系数**。

状态空间表达式用向量矩阵方程表示，能方便用计算机进行计算，有利于对系统的分析和综合。

（2）定常离散系统

线性定常离散系统的状态空间表达式与线性定常连续系统的雷同，只是定常离散系统的状态方程由向量差分方程组成、输出方程用离散信号表达而已，简写形式如下：

$$\begin{cases} x(k+1)=\boldsymbol{A}x(k)+\boldsymbol{b}u(k) & \text{状态方程} \\ y(k)=\boldsymbol{c}x(k)+du(k) & \text{输出方程} \end{cases} \tag{1-5}$$

式中，相关矩阵的维数及名称与定常系统相同。

（3）时变系统

对于一单输入－单输出线性时变系统，设输入量为 u，输出量为 y。若有 n 个状态变量 x_1，x_2，…，x_n，则其状态方程和输出方程的形式，只要将定常系统的状态空间表达式（1-3）中的系数，或式（1-4）中的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和 d 中的某些元素或全部元素改为时间 t 的函数，就是时变系统的状态空间表达式的一般形式。简写为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(t)u & \text{状态方程} \\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}(t)\boldsymbol{x}+d(t)u & \text{输出方程} \end{cases} \tag{1-6}$$

式中，相关矩阵的维数和名称与定常系统相同。

2. 多输入－多输出线性系统

（1）线性定常系统

一多输入－多输出线性定常系统，设有 r 个输入量 u_1，u_2，…u_r，m 个输出量 y_1，…，y_m。若有 n 个状态变量 x_1，x_2，…，x_n 则其**状态方程**的一般表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+b_{11}u_1+b_{12}u_2+\cdots+b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+b_{21}u_1+b_{22}u_2+\cdots+b_{2r}u_r \\ \vdots \\ \dot{x}_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+b_{n1}u_1+b_{n2}u_2+\cdots+b_{nr}u_r \end{cases} \tag{1-7}$$

输出方程的一般表达式为

$$\begin{cases} y_1=c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n+d_{11}u_1+d_{12}u_2+\cdots+d_{1r}u_r \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n+d_{21}u_1+d_{22}u_2+\cdots+d_{2r}u_r \\ \vdots \\ y_m=c_{m1}x_1+c_{m2}x_2+\cdots+c_{mn}x_n+d_{m1}u_1+d_{m2}u_2+\cdots+d_{mr}u_r \end{cases} \tag{1-8}$$

式（1-7）和式（1-8），构成了多输入－多输出线性定常系统的状态空间描述。写成**矩阵的形式**为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BU} & \text{状态方程} \\ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DU} & \text{输出方程} \end{cases} \tag{1-9}$$

式中　$\boldsymbol{X}=(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^{\mathrm{T}}$，$n\times 1$ 维；$\boldsymbol{Y}=(y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m)^{\mathrm{T}}$，$m\times 1$ 维

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ n\times n \text{ 维} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix},\ n\times r \text{ 维}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix},\ m\times n\text{ 维} \qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{pmatrix},\ m\times r\text{ 维}$$

$$\boldsymbol{U}=(u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_r)^{\mathrm{T}},\ r\times 1\text{ 维}$$

（2）线性时变系统

一多输入－多输出线性时变系统，设有 r 个输入量 u_1，u_2，…，u_r，m 个输出量 y_1，…，y_m。若有 n 个状态变量，则其状态空间的一般表达式，只要将式（1-7）和式（1-8）中的参数或式（1-9）中矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 中的某些元素或全部元素改为时间 t 的函数，就是时变系统的状态空间描述的一般式，简写形式为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{U} & \text{状态方程} \\ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{U} & \text{输出方程} \end{cases} \tag{1-10}$$

3. 非线性系统

非线性系统的状态空间描述，也是由状态方程和输出方程组成。不同的是，它们是由一组非线性方程组成的。例如，有 r 个输入量，m 个输出量的 n 阶非线性系统（定常或时变）的**状态方程**，是用 n 个一阶非线性微分方程式来表示：

$$\begin{cases} \dot{x}_1=f_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r) \\ \dot{x}_2=f_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r) \\ \vdots \\ \dot{x}_n=f_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r) \end{cases} \quad \text{状态方程} \tag{1-11}$$

输出方程的一般表达式为

$$\begin{cases} y_1=g_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r) \\ y_2=g_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r) \\ \vdots \\ y_m=g_m(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r) \end{cases} \quad \text{输出方程} \tag{1-12}$$

式（1-11）和式（1-12）也可写成矩阵方程形式：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(x,\ u,\ t) \\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(x,\ u,\ t) \end{cases}$$

三、状态变量图的一般形式

线性系统状态空间描述也可用状态变量图表示。状态变量图由积分器、比例器、加（减）法器和信号线组成。其中，积分器是用一个方框，方框内画一个积分符号“$\int$”或写入积分的拉普拉斯变换“$\frac{1}{s}$”；比例器也用一个方框，方框内写入其比例系数值；加（减）法器用小圆圈（圈内可带×），如图 1-1 所示。

根据系统的状态方程和输出方程容易绘制出其图形。例如，系统的状态空间表达式为

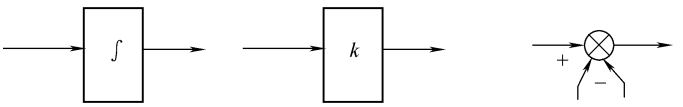


图 1-1　构成变量图的基本单元

a）积分器　b）比例器　c）加减法器

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{BU} & \text{状态方程} \\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{DU} & \text{输出方程} \end{cases}$$

其状态变量图如图 1-2 所示。依据状态方程容易画出 $\boldsymbol{U}\rightarrow\dot{\boldsymbol{X}}\rightarrow\boldsymbol{X}$ **正向传输通道和反馈通道**；依据输出方程可画出**直接传输通道** $\boldsymbol{U}\rightarrow\boldsymbol{D}\rightarrow\boldsymbol{Y}$。

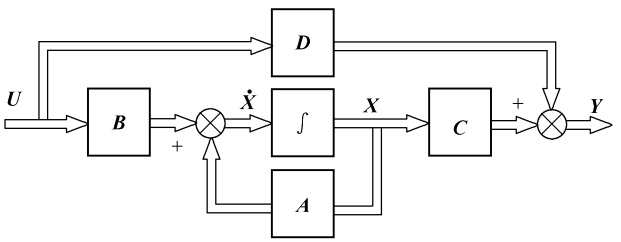


图 1-2　系统的状态变量图

图中，双线箭头表示信号传递的是向量信号，但为了绘图方便，今后都简化为单线箭头表示。具体的绘制方法和步骤，将在后面的章节中结合实际系统详细介绍。

第二节　根据系统机理建立状态空间表达式

一般的控制系统可根据系统内部信号所遵循的物理或化学定理或规律，去建立其状态空间表达式，具体步骤如下：

1）确定系统的输入量和输出量。

2）根据系统内部信号所遵循的机理或物理、化学定律，列写出描述系统动态特性的微分方程。

3）选择状态变量，把微分方程化为含状态变量的一阶微分方程组。

4）表示成向量－矩阵方程形式。

下面通过例子，说明用机理方法建立环节（或系统）状态空间表达式的方法和过程。

例 1-1　*RLC* 电路如图 1-3 所示，试求其状态空间表达式并绘制其状态变量图。

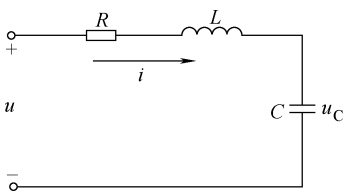


图 1-3　*RLC* 电路

解　1）输入量为 u，设输出量为电容电压 u_C。

2）根据电路理论中的相关定律有

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = u \tag{1-13}$$

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = i \tag{1-14}$$

3）电路中有两个独立的储能元件：电感和电容。若选取电流 i 和电容电压 u_C 为状态变量，即

$$x_1 = i, \qquad x_2 = u_C$$

将式（1-13）改写成为状态变量 i 的一阶微分方程式

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \tag{1-15}$$

将式（1-14）改写为状态变量 u_C 的一阶微分方程式

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \tag{1-16}$$

式（1-15）和式（1-16）便构成了图 1-3 所示的 *RLC* 电路的**状态方程**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R}{L}x_1 - \dfrac{1}{L}x_2 + \dfrac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}x_1 \end{cases} \tag{1-17}$$

输出量用 y 表示，由状态变量可知，**输出方程**为

$$y = u_C = x_2 \tag{1-18}$$

式（1-17）和式（1-18）构成了图 1-3*RLC* 电路的**状态空间表达式**。

4）用向量－矩阵方程式表示

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u & \text{状态方程} \\ y = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \text{输出方程} \end{cases} \tag{1-19}$$

或**简写**成

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{1-20}$$

式中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{c} = (0 \quad 1)$$

状态变量图的绘制方法和步骤是，首先画出两个积分器（积分器的个数等于状态变量的个数），并把它们画在适当的位置上；把每个积分器的输出表示为某个状态变量；然后，根据状态方程式（1-17）和输出方程式（1-18），画出相应的比例器和加法器；最后用带箭头的信号线按信号的流通方向将这些元件连接起来。其**状态变量图**如图 1-4 所示。

在第一节中指出，对于给定的系统，状态变量的选取具有非唯一性。由于选取的状态变量不同，因此，状态空间表达式也就不同。

对于例 1-1 的 *RLC* 电路，若选取电流和电流的积分为状态变量，即

$$x_1 = i, \; x_2 = \int i\mathrm{d}t,$$

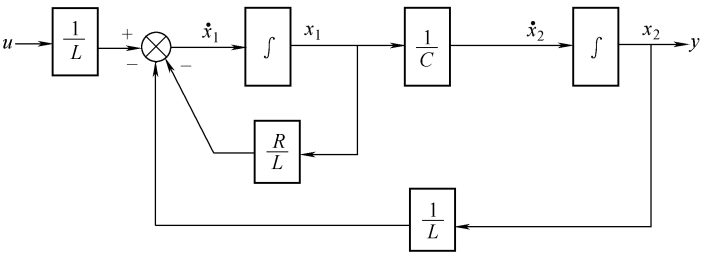


图 1-4 例 1-1 电路的状态变量图

由式（1-14），有

$$u_C = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t, \tag{1-21}$$

将式（1-21）代入式（1-13），消去中间变量 u_C 后，式（1-13）可改写为

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{LC}x_2 + \frac{1}{L}u \tag{1-22}$$

考虑两个状态变量有如下关系：

$$\dot{x}_2 = x_1 \tag{1-23}$$

则由式（1-22）和式（1-23），组成了**又一组状态方程**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R}{L}x_1 - \dfrac{1}{LC}x_2 + \dfrac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \tag{1-24}$$

输出量用 y 表示，由式（1-21）可得输出方程

$$y = u_C = \frac{1}{C}x_2 \tag{1-25}$$

式（1-24）和式（1-25）构成**另一状态空间表达式**。用矩阵式表示

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u & \text{状态方程} \\ y = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \text{输出方程} \end{cases} \tag{1-26}$$

简写成

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{1-27}$$

式中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \end{pmatrix}$$

比较式（1-19）和式（1-26），**状态空间表达式**是**不同**的。**要指出的是**，本章第六节将证明，在同一输入量作用下得到的系统或环节的输出量，或传递函数，却是**完全相**

同的。

例 1-2　电枢控制的直流电动机如图 1-5 所示，建立其动态方程。

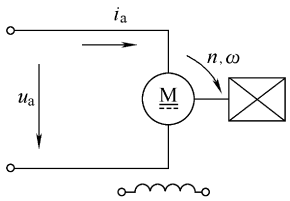


图 1-5　电枢控制的直流电动机

解　电枢控制的直流电动机，可视为是单输入（电枢电压）单输出（速度）的部件，但要同时考虑电枢电压和负载干扰时的数学模型，可视为双输入单输出的部件。

1）输入量为电枢电压 U_a 和负载转矩 M_Z，输出量为电动机轴上的角速度 ω。

2）列写微分方程。由“电机学”和“电机拖动”内容，可列写出如下方程：

$$U_a = R_a i_a + L_a \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + E_b \tag{1-28}$$

$$E_b = C_e \omega \tag{1-29}$$

$$M_d = M_Z + J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + f\omega \tag{1-30}$$

$$M_d = C_m i_a \tag{1-31}$$

式中，E_b 为电动机反电动势；M_d 为电动机的驱动转矩；f 为电动机轴上粘性摩擦系数。

3）选择状态变量。有两个独立的储能元件：一个是电枢电感 L_a，另一个是电动机轴上的转动惯量 J。选储能元件上的物理量，电枢电流 i_a 和电动机轴上的角速度 ω 为状态变量：

$$x_1 = i_a,\ x_2 = \omega$$

式（1-28）中，E_b 是中间变量。将式（1-29）代入式（1-28），消去式（1-28）中的中间变量 E_b 后，并改写成电枢电流 i_a 为状态变量的一阶微分方程式，有

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_a}{L_a}x_1 - \frac{C_e}{L_a}x_2 + \frac{1}{L_a}U_a \tag{1-32}$$

将式（1-31）代入式（1-30），消去式（1-30）的中间变量 M_d，并改写为角速度 ω 为状态变量的一阶微分方程式，有

$$\dot{x}_2 = \frac{C_m}{J}x_1 - \frac{f}{J}x_2 - \frac{1}{J}M_Z \tag{1-33}$$

式（1-32）和式（1-33）构成了电枢控制的直流电动机的**状态方程**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R_a}{L_a}x_1 - \dfrac{C_e}{L_a}x_2 + \dfrac{1}{L_a}U_a \\ \dot{x}_2 = \dfrac{C_m}{J}x_1 - \dfrac{f}{J}x_2 - \dfrac{1}{J}M_Z \end{cases} \tag{1-34}$$

输出量为 ω，用 y 表示，**输出方程**为

$$y = \omega = x_2 \tag{1-35}$$

式（1-34）和式（1-35）构成了电枢控制的直流电动机的**状态空间表达式**。

4）用**向量矩阵形式**表示，状态空间表达式为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{C_e}{L_a}\\ \dfrac{C_m}{J} & -\dfrac{f}{J}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{L_a} & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{J}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_a\\ M_Z\end{pmatrix}\\ \boldsymbol{y}=(0\quad 1)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\end{cases}\tag{1-36}$$

简写成

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{u} & \text{状态方程}\quad (1\text{-}37)\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x} & \text{输出方程}\quad (1\text{-}38)\end{cases}$$

式中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix};\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{C_e}{L_a}\\ \dfrac{C_m}{J} & -\dfrac{f}{J}\end{pmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{L_a} & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{J}\end{pmatrix};\ \boldsymbol{c}=(0\quad 1)$$

第三节　由系统微分方程式转换为状态空间表达式

在经典控制理论中，线性定常系统或环节的数学模型可采用微分方程来描述。下面介绍和讨论根据微分方程来建立状态空间表达式的方法及相关问题。

设描述系统的 n 阶微分方程式为

$$y^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_nu^n+b_{n-1}u^{n-1}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u\tag{1-39}$$

式中，y 为输出量；u 为输入量；$a_i(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，$b_j(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 均为系统的参数。

由第一节可知，系统的状态空间表达式用矢量－矩阵方程表示时为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}\boldsymbol{u}\end{cases}\tag{1-40}$$

式中，$\boldsymbol{x}$ 为 $n\times1$ 维状态向量；$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 维的系统矩阵；$\boldsymbol{b}$ 为 $n\times1$ 维的输入向量；$\boldsymbol{c}$ 为 $1\times n$ 维的输出向量；$\boldsymbol{d}$ 是直接传输向量，在单输入单输出系统中它是一个标量，并称为直接传输系数。

可见，要将微分方程式转变为状态空间表达式的关键问题，一是如何选择系统的状态变量，二是怎样由微分方程系数确定出矩阵 $\boldsymbol{A}$、向量 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{d}$ 中的元素值。下面分两种情况讨论。

一、输入信号不含有导数项的情况

系统的微分方程为

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_0u\tag{1-41}$$

（1）状态变量

第一节指出，n 阶系统，应选 n 个状态变量。由“高等数学”可知，当给定了输出 y 及其各阶导数的初始值 $y(0)$，$\dot{y}(0)$，…，$y^{(n-1)}(0)$ 和 $t\geqslant0$ 时的输入 u，则系统在 $t\geqslant0$ 时的

运动状态就可完全确定。所以，可选取输出及其各阶导数为状态变量，即

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} \\ \quad \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases} \tag{1-42}$$

（2）**状态方程**

对式（1-42）的状态变量求导数，并考虑式（1-41），可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0 y - a_1 \dot{y} - \cdots - a_{n-1} y^{n-1} + b_0 u \\ \quad = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + b_0 u \end{cases} \tag{1-43}$$

式（1-43）就是描述系统微分方程式（1-41）的状态方程。

根据“线性代数”，式（1-43）的状态方程组可用向量－矩阵方程式表示

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u} \tag{1-44}$$

（3）**输出方程**

由状态变量式（1-42）可知，系统的输出方程为

$$y = x_1 \tag{1-45}$$

用矢量－矩阵方程表示

$$\boldsymbol{y} = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1-46}$$

（4）**状态空间表达式**

式（1-43）和式（1-45）构成了描述系统微分方程式（1-41）的状态空间表达式。式（1-44）和式（1-46）构成了其矢量－矩阵方程表达式。状态空间表达式简写成

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{1-47}$$

式中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix};\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{pmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\b_0\end{pmatrix};\ \boldsymbol{c}=(1\quad 0\quad\cdots\quad 0)$$

从状态空间表达式可看出，**系统矩阵** $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 维，最后一行的元素值，由微分方程式左边的系数值 a_i（$i=0,1,2,\cdots,n-1$）取负号后，从左（第一列）至右（第 n 列）按顺序排列；主对角线的上方元素值全为 1；其余元素（除最后 1 行外）全为 0。**输入矩阵** $\boldsymbol{b}$ 为 n 维列向量，最后的元素值为 b_0（输入信号的系数即幅值），其余元素为 0。**输出矩阵** $\boldsymbol{c}$ 为 n 维行向量，其第 1 行元素值为 1，其余的元素值为零。直接传输系数 d 值为零。

（5）**状态变量图**

积分器的个数有 n 个（等于状态变量的个数），每个积分器的输出表示为状态变量；根据上面的状态方程和输出方程，画出相应的比例器并填入对应的值，画出加法器并加入符号；最后用带箭头的信号线按信号的流通方向将这些元件连接起来，如图 1-6 所示。

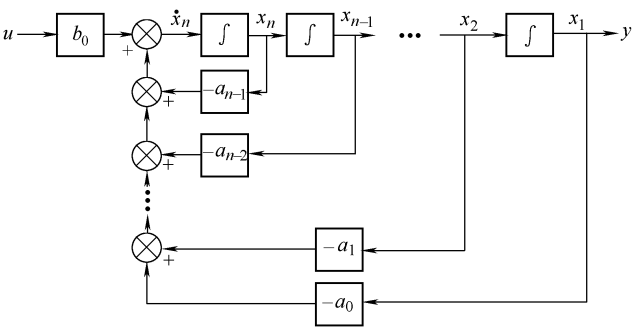


图 1-6　状态空间描述式（1-47）的状态变量图

例 1-3　设一控制系统的动态过程用微分方程表示为

$$\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+5y=2u$$

试写出其状态空间表达式，并画出状态变量图。

解　选取状态变量 $x_1=y$，$x_2=\dot{y}$，$x_3=\ddot{y}$，则由式（1-43）得状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\\dot{x}_2=x_3\\\dot{x}_3=-5x_1-11x_2-6x_3+2u\end{cases}$$

系统的输出方程为

$$y=x_1$$

所以，系统的状态空间表达式用矢量－矩阵方程表示为