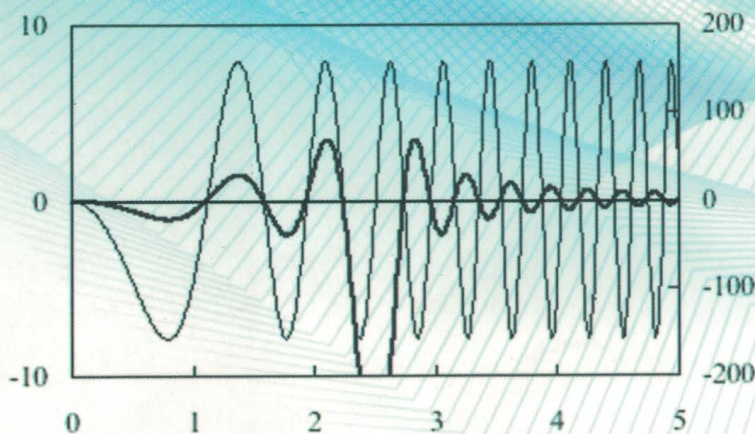


机械振动的 分析与控制 以及计算方法

JIXIE ZHENDONG DE FENXI
YU KONGZHI YIJI JISUAN FANGFA

任明章 编著



 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



机械振动的分析与控制 以及计算方法

任明章 编著



机械工业出版社

本书以 CAE 技术在机械产品动力学设计中的应用为背景,对机械振动的原理、分析与控制以及数值计算方法进行了阐述。本书是笔者根据在十多年应用 CAE 技术的工作实践中积累总结的资料编著而成,是一本介于振动力学教科书与有限元分析工具书之间的技术参考书。本书力求深入浅出,重点阐述物理概念,并尽量介绍笔者在工作中接触到的新技术。书中所涉及的数学并不复杂,适合一般工程技术人员和致力于学习机械动力学的学生阅读。特别是对于从事 CAE 动力学设计工作的工程师来说,通过本书不但可以掌握结构振动的原理与控制、解析方法与建模技巧,而且可以方便地了解主要商业软件中常用的数值方法的概要。

本书适合从事机械产品设计与开发的工程技术人员和高等院校机械类专业高年级学生以及研究生阅读。

图书在版编目 (CIP) 数据

机械振动的分析与控制以及计算方法/任明章编著. —北京:机械工业出版社, 2011. 3

ISBN 978-7-111-33620-4

I. ①机… II. ①任… III. ①机械振动 IV. ①TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 033685 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 何月秋 责任编辑: 何月秋 王治东

版式设计: 霍永明 责任校对: 李秋荣

封面设计: 马精明 责任印制: 乔宇

北京机工印刷厂印刷 (三河市南杨庄国丰装订厂装订)

2011 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 16 印张 · 320 千字

0 001—3 000 册

标准书号: ISBN 978-7-111-33620-4

定价: 58.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务 策划编辑: (010) 88379732

社服务中心: (010) 88361066 网络服务

销售一部: (010) 68326294 门户网: <http://www.cmpbook.com>

销售二部: (010) 88379649 教材网: <http://www.cmpedu.com>

读者购书热线: (010) 88379203 封面无防伪标均为盗版

前 言

计算机辅助工程技术 (Computer Aided Engineering, CAE) 在现代机械产品设计与开发的过程中发挥着越来越重要的作用。随着对产品节能环保等性能要求的提高, 如何减轻质量、降低开发成本、缩短开发周期, 从而提高市场竞争力成为产品开发的重要命题。在 CAE 的名称已提出 30 多年的今天, 基于计算机仿真的虚拟产品开发技术在诸如航空航天、汽车、船舶、精密机械、电子电器等产业领域得到了越来越广泛和深入的应用。这在很大程度上归功于计算机软硬件技术的高速发展。但是, CAE 技术的核心不是第一个字母 C 所代表的计算机, 而是最后一个字母 E 所代表的工程。尽管计算机技术日新月异的发展为建立更加详细的解析模型提供了物质基础, 例如现在汽车车身的有限元模型可能详细到表现每一个焊点和每一个螺钉的程度, 但是对于工程师来说, 如何从解析结果中提取出有用的信息来反馈到产品设计与开发中去, 依然是一个挑战性的工作。这和过去面对简易模型的解析结果在本质上是一样的, 其中的判断很大程度上依赖于技术人员知识、经验和工程素养。有时, 过于详细的模型不单会增加计算成本, 而且可能使做出正确的判断变得困难。所以, 基于理论和经验做出合理的简化有时更显必要。近年来, 初阶分析方法 (First Order Analysis, FOA) 或一维 (1D) 分析受到设计人员的重视, 在某种程度上就反映了这种要求。

笔者在十多年从事应用 CAE 技术进行振动噪声分析的工作中, 接触到了线性与非线性解析、构造解析与控制、多体动力学的机构解析、流体解析等众多的课题, 涉及到汽车、精密机械、航天结构等多个领域。尽管各种商业计算机软件的功能越来越强大, 用户界面越来越友好, 但笔者深深地感到, 仅仅会使用各种软件进行计算, 距离一个合格的 CAE 工程师相去甚远。更重要也更困难的工作在于对有关学科知识的理解和掌握, 以及应用能力的培养, 即能够对解析模型从数学的角度进行校核 (Verification), 从物理 (实验) 的角度进行验证 (Validation), 最终为产品设计、性能评价或对策方案提供尽可能可靠的数据和分析。因此, 需要对物理 (力学) 原理、数值解析方法、实验结果分析等多方面的知识有深刻的领会。这当然不是一个简单的工作。以笔者的专门领域 (振动噪声) 为例, 尽管自认为是“内行”, 有时也不免会遇到看不懂的资料, 或遭遇知其然而不知其所以然的尴尬。商业软件所提供的理论说明资料要么过于简略, 要么过于数学化。要想了解在解析实践中遇到的某个概念, 往往需要查找各种不同的书籍资料。这是一个费时的学习过程。笔者在十多年的工作实践中, 围绕接触到的众多动力学设计与分析课题, 积累了一些一手资料; 并结合本人的工作, 对结构振动及其控制的理论和方法进行了总结。笔者以为, 如果把本人经历了

“痛苦”过程而积累总结的资料成书出版，也许对于面对同样问题的工程技术人员和致力于学习机械动力学的学生有所帮助。这就是本书写作的初衷。

本书共分为5章。第1章以最简单的单自由度力学模型为对象，对机械振动的基础知识作了阐述，对主要概念做了解说，对动力学中最重要的共振问题从能量分析的角度进行了深入的讨论，并在此基础上，对实际中常见的较为复杂的振动问题，如具有库仑摩擦系统的振动、自激振动等进行了分析。第2章仍然主要以单自由度系统为对象，结合简单事例，对振动控制的原理和方法进行了阐述。之所以把控制问题也纳入动力学的范畴，是因为在机电一体化的今天，单纯的没有控制元件的机械产品已不多见。把结构与控制系统综合起来进行计算机仿真也是CAE技术的一个趋势。这两章均以简单的单自由度系统为对象，所涉及的数学并不复杂，但却涵盖到了机械振动的原理及其控制技术的方方面面，并适当地介绍了一些建模与分析技巧。第3章以多自由度系统为对象，对复杂系统的动力学分析方法进行了阐述，着重介绍了模态分析的原理和方法，以及在动力学响应计算中的应用，并举例对多自由度系统的控制与建模方法作了介绍。第4章更进一步介绍了在CAE实践中常用的以子结构模态综合法为代表的提高计算效率的各种方法，以及将实验结果与数学模型相结合的混合解析技术，并介绍了通过与实验结果的相关分析来改善有限元模型精度的方法。第5章则对商业计算软件中常采用的一些数值计算方法作了介绍，例如固有值分析的Lanczos法、数值积分的Newmark法、非线性方程的牛顿迭代法等。通过本书，不但可以掌握机械振动的原理、分析方法与解析技巧，而且可以方便地了解各种数值计算方法的概要。

在本书的写作中，笔者尽量从应用工程师的角度来组织和安排各种资料，力求深入浅出，重点阐述物理概念，并尽量介绍工作中所接触到的新技术。除个别引用文献的结果外，书中的举例和图表基本都是笔者亲手计算得来的。由于笔者的水平有限和工作内容的局限性，良好的愿望可能得不到充分体现，可能存在偏颇的描述和不合理的内容，恳请广大读者批评指正，并期待着将批评与建议反馈给笔者(ren_mz@hotmail.co.jp)。如果本书对于奋战在产品的设计开发第一线上的工程技术人员以及高校师生有所帮助的话，则是笔者望外之喜悦。

在此，笔者特别感谢原日本大学教授背户一登先生给予的指导和帮助，本书的部分内容属于与背户先生共同研究的结果。笔者还要感谢所在公司ESTECH的良好工作环境和各位同事，尤其是技术2部部长筒井桂一郎先生的帮助。笔者深切缅怀已故导师西安交通大学顾崇銜教授，并愿借此机会感谢以下各位在学习和工作的不同阶段给予过指导的老师：西安交通大学卢秉恒教授、唐颀茹教授，丹麦技术大学Finn Jacobsen教授，清华大学蒋孝煜教授、连小珉教授。

作者

目 录

前言

第 1 章 机械振动的基础	1
1.1 单自由度系统	1
1.2 无阻尼单自由度系统的振动	3
1.2.1 自由振动	3
1.2.2 强迫振动	5
1.3 有阻尼单自由度系统的振动	9
1.3.1 阻尼的概念	9
1.3.2 有粘性阻尼的自由振动	11
1.3.3 有粘性阻尼的强迫振动	14
1.3.4 阻尼比的推定方法	20
1.4 单自由度系统稳态强迫振动的能量关系	21
1.4.1 力的平衡关系	21
1.4.2 外力做功与振动能量的关系	22
1.4.3 由功—能关系考察频率响应的特征	23
1.4.4 损耗因子	27
1.5 具有库仑摩擦阻尼系统的振动	27
1.5.1 自由振动	28
1.5.2 库仑摩擦阻尼系统的强迫振动	30
1.5.3 库仑摩擦的等价粘性阻尼近似	34
1.6 任意形式激励力作用下的振动	35
1.6.1 冲击力作用下的瞬态响应	35
1.6.2 物体在一般力作用下的响应	36
1.6.3 拉普拉斯变换在求解振动响应上的应用	37
1.6.4 典型冲击力作用下的响应	41
1.7 自激振动	45
1.7.1 系统的稳定性与自激振动的发生条件	46
1.7.2 自激振动的力学模型	47
1.7.3 工程上常见的自激振动	53
第 2 章 振动控制的原理	57
2.1 振动控制技术的概要	57
2.2 隔振技术的原理	58
2.2.1 隔离机器向基础结构的振动传递 (设备隔振)	58

2.2.2	隔离基础结构向机器的振动传递 (设备免振)	60
2.2.3	考虑到基础结构动特性的隔振问题	61
2.2.4	常见的隔振元件	63
2.3	动力吸振器的原理	67
2.3.1	动力吸振器设计的定点理论	67
2.3.2	考察	72
2.3.3	其他形式的吸振器	74
2.4	振动的主动控制	81
2.4.1	控制理论的概述	81
2.4.2	古典控制理论	82
2.4.3	现代控制理论	95
2.4.4	单自由度系统的振动主动控制	98
2.4.5	主动动力吸振器	100
2.4.6	主动隔振系统	103
第3章	多自由度系统的振动分析与控制	108
3.1	多自由度系统的运动方程	108
3.2	多自由度系统振动的直接解法	110
3.2.1	稳态频率响应	110
3.2.2	瞬态时间响应	111
3.3	多自由度系统的模态分析	113
3.3.1	概述	113
3.3.2	特征值与特征向量	114
3.3.3	模态向量的正交性	117
3.3.4	模态坐标	118
3.4	模态法频率响应分析	119
3.4.1	响应计算	119
3.4.2	频率响应函数	122
3.4.3	补偿模态截止误差的剩余向量法	125
3.5	模态法瞬态时间响应分析	128
3.6	复模态分析及其应用	130
3.6.1	复特征值问题	130
3.6.2	关于复模态与实模态的讨论	133
3.6.3	求解频率响应的复模态方法	135
3.7	强制运动激励	136
3.7.1	大质量法	136
3.7.2	惯性载荷法	137
3.7.3	矩阵分割法	138
3.7.4	最大响应估算法 (冲击与响应谱分析方法)	138

3.7.5 模态有效质量	141
3.8 多自由度系统的振动控制	143
3.8.1 动力吸振器的运用	143
3.8.2 模态的主动控制	149
3.8.3 集中参数模型的建模方法及状态反馈控制	153
第4章 模型的缩减与综合以及实验验证方法	164
4.1 模型缩减方法	164
4.1.1 严密的缩减方法	164
4.1.2 Guyan 缩减方法	165
4.1.3 Craig-Bampton 缩减方法	167
4.2 子结构模态综合法	171
4.2.1 子结构模态综合法的基本思路	171
4.2.2 多层子结构分析技术	175
4.3 传递函数综合法	176
4.3.1 基本原理	177
4.3.2 实现方法	179
4.3.3 问题点及对策	182
4.4 模态模型	183
4.5 有限元模型的实验验证方法	185
4.5.1 实验-解析相关分析的一般方法	185
4.5.2 模态普查预先分析方法	187
4.5.3 实验-解析相关性的定量评价	188
4.5.4 一个空间结构的实例	189
第5章 数值计算方法概要	196
5.1 线性代数方程组的解法	196
5.1.1 线性代数方程的直接解法	196
5.1.2 线性代数方程的迭代解法	200
5.2 非线性代数方程组的解法	206
5.2.1 牛顿迭代法	207
5.2.2 修改牛顿迭代法	208
5.2.3 拟牛顿迭代法	209
5.2.4 牛顿迭代法在非线性有限元分析中的应用	210
5.3 数值积分方法	213
5.3.1 定积分的近似解法	214
5.3.2 微分方程的数值解法	218
5.3.3 求解动力学方程的数值积分方法	222
5.4 矩阵的特征值问题	229
5.4.1 矩阵的特征值的基本概念	229

5.4.2	特征值问题的迭代解法	230
5.4.3	特征值问题的矩阵相似变形法	233
5.4.4	Lanczos 法	242
5.4.5	特异值分解	246
参考文献		247

第 1 章 机械振动的基础

在现代机械产品设计中，除了要考虑强度、刚性等静态性能外，还必须考虑到产品在动态载荷作用下的动态性能问题。特别是随着对节能环保性能要求的提高，轻量化设计尤其显得重要，过去的那种偏于厚重的刚性结构设计正在向节能省料的轻薄的柔性结构设计转变。但是，轻量化往往会带来更多的振动噪声等问题，从而对产品的使用性能和市场竞争性能带来不利影响。为了解决这个矛盾，需要利用 CAE(计算机辅助工程)技术进行优化设计，以在更高的层次上来平衡各种相互矛盾的性能要求。事实上，对产品的振动噪声性能进行预测和评估是现代 CAE 技术的一个重要应用领域，例如汽车噪声、振动及不平顺性问题(Noise, Vibration, Harshness, NVH)的对策设计在很大程度上依赖于 CAE 的运用。为了更好地应用 CAE 方法，需要对机械动力学的基础知识加以掌握。可以不夸张地说，不掌握机械动力学的基本原理，就不易成为一个优秀的机械工程师。正是基于此，本章对动力学这一范围宽广的学科从 CAE 应用的视点出发，以一个单自由度系统为对象，着重对机械振动的基本原理进行阐述。

1.1 单自由度系统

自由度(Degree Of Freedom, DOF)是指描述一个物体的运动所需要的独立变量的个数。我们知道，一个在空间没有约束的刚体，它可以沿坐标轴 X、Y、Z 三个方向平移，也可以绕这 3 个轴旋转。我们称这个物体具有 6 个自由度，也就是说，用 3 个平移变量和 3 个旋转变量就可完全描述一个刚体的运动。

实际的机械结构都是连续的弹性体结构，理论上具有无限多的自由度。例如在桌面上敲击一下，桌面的各个部分将会产生垂直于桌面的振动(称为横向振动)。尽管振动会很快地衰减下去，要完全地描述这个振动现象，需要桌面上所有位置的位移情报，即无限多个变量。理论上这是无法完成的任务，但所幸的是，完整的桌面振动情报对我们并无多大用处，我们所关心的可能只是桌面在敲击下所产生的振动及噪声的频率成分及其衰减特性，这是用数点甚至一点的情报即可实现的。这种用有限个变量来描述具有无限个自由度的连续体振动的方法称为低阶自由度模型化方法。

考虑一种最简单的情况，一个质点被限制在一个方向上运动，这个系统称为单自由度系统(Single Degree Of Freedom, SDOF)。这时，用一个变量即可完全描述质

点的运动。单自由度系统是学习机械振动的最基本力学模型，实际中的很多复杂系统在一定条件下都可以简化成单自由度系统来处理。因此，掌握好单自由度系统的动态特性非常重要。

图 1.1 表示一个理想化的单自由度系统。质量为 m 的物体系在不计质量、弹性系数为 k 的弹簧一端，弹簧的另一端固定。物体与支持面之间不存在摩擦，而且物体只能沿着弹簧轴线方向(这里称为 X 方向)运动。

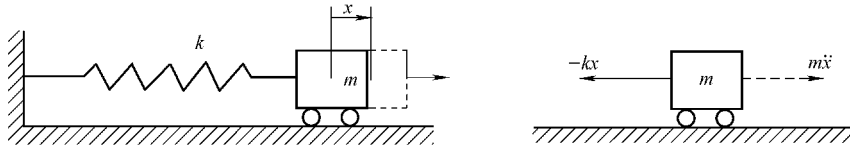


图 1.1 单自由度振动系统的力学模型

把物体从其初始平衡位置拉开，然后释放，物体在弹簧恢复力的作用下将做返回其初始位置的运动。在到达其初始位置时，物体获得最大动能而不会停下来，在惯性的作用下将继续前行，弹簧则被压缩。在压缩到与被拉伸同等距离的时候，动能完全转化为弹性势能，物体瞬时速度变为 0。此后，弹簧恢复力又开始作用，物体再次向反方向运动。如此周而复始，物体做以初始位置为原点的往复运动，即振动。

考查图 1.1 中的物体运动，不难发现：作用在物体上的力只有一个弹簧恢复力，它遵循胡克定律，力的大小等于弹性系数与位移的乘积，而作用方向与位移相反。于是，根据牛顿运动定律可得： $m\ddot{x}(t) = -kx(t)$ ，因此，物体运动可以用以下齐次型微分方程来表示

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (1.1)$$

这是在没有外力作用下(这里的弹簧力为内力)的振动，称为自由振动。上式也可以理解为，在每个时刻，弹簧恢复力与惯性力($-m\ddot{x}$)处于平衡状态。

如果有外力 $F(t)$ 作用在物体上迫使其振动，则称为强迫振动。这时物体受到的力为弹簧恢复力与外力之和， $-kx(t) + F(t)$ ，运动方程变为以下非齐次型微分方程

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (1.2)$$

可见，机械振动是一个求解常微分方程的问题。在这个系统中，质量和弹簧是两个不可或缺的元件。由方程式(1.2)可知，若 $m = 0$ ，则变成一个受力变形问题；若 $k = 0$ ，则变成一个单纯的运动问题。因此，一谈到机械振动，就应该联想到一个质量弹簧系统。这里，弹簧并不限于常见的卷簧(Coil Spring)，而是指一切具有抵抗变形能力的刚性元件(stiffness)。

如图 1.1 所示模型代表了直线振动的情况。弹性支撑下的汽车发动机的上下振动就可用该模型表示。还有一种振动形式是绕着某个轴在回转方向做往复运动，如

图 1.2 所示。将一个圆盘(齿轮或者飞轮)安装在
一端固定的主轴上,把圆盘转过一个小角度
 θ (单位: rad),然后释放,圆盘将产生扭转振
动。设圆盘的惯性矩为 J (单位: $\text{N} \cdot \text{m}^2$),轴的
扭转刚度为 k_t (单位: $\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$),则系统的运
动方程为

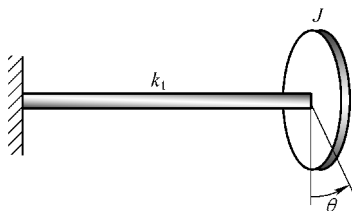


图 1.2 扭转振动系统

$$J\ddot{\theta}(t) + k_t\theta(t) = 0 \quad (1.3)$$

如果有外转矩 $T(t)$ (单位: $\text{N} \cdot \text{m}$)作用在圆盘上,则运动方程为

$$J\ddot{\theta}(t) + k_t\theta(t) = T(t) \quad (1.4)$$

可见,扭转振动的方程式与直线振动的方程式形式完全相同,当然,解法也相同。

1.2 无阻尼单自由度系统的振动

在如图 1.1 所示的系统中,一旦在外部干扰下发生振动,这个振动将一直持续下去。因为系统中没有耗能元件,动能与弹性势能之间可以完全地等值转换,因而振幅不会衰减下来,我们称这样的系统为无阻尼系统。当然,实际中这样的系统是不存在的。在考查更接近实际的有阻尼系统的振动之前,我们先来看看无阻尼系统的振动响应特性。

在此,我们先给出求解常微分方程的两个数学定律。

定律 1: 设齐次型微分方程式(1.1)有两个特解 x_1 、 x_2 , 则该方程的通解为两个特解的线性组合, 即 $x = C_1x_1 + C_2x_2$, 其中, C_1 、 C_2 为两个常数。

定律 2: 设非齐次型微分方程式(1.2)有一个特解 x_s , 则该方程的通解为这个特解与对应的齐次型微分方程式(1.1)的通解之和, 即 $x = C_1x_1 + C_2x_2 + x_s$, 其中 C_1 、 C_2 为两个常数。

1.2.1 自由振动

单自由度无阻尼系统的振动由微分方程式(1.1)所决定。略去时间变量 t , 该方程可以写为 $m\ddot{x} + kx = 0$ 或 $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega_n^2x$, 其中, $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 。这个方程有两个显而易见的特解: $x = \sin\omega_nt$, $x = \cos\omega_nt$ 。所以, 该方程的通解为

$$x = C_1\sin\omega_nt + C_2\cos\omega_nt = A\sin(\omega_nt + \varphi), A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \varphi = \arctan(C_2/C_1) \quad (1.5)$$

A 称为振幅, φ 称为相位, 二者由初始条件所决定。假设初始时($t=0$)位移为 x_0 , 速度为 v_0 , 将该条件代入位移方程式(1.5)及其微分(速度)可以求得

$$C_1 = v_0/\omega_n, C_2 = x_0, A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_n)^2}, \varphi = \arctan(x_0\omega_n/v_0)$$

例如把图 1.1 的物体拉开 x_0 然后释放(初始速度为 0), 则有 $A = x_0, \varphi = \pi/2$ 。此时, 物体的位移为

$$x = x_0 \sin(\omega_n t + \pi/2) = x_0 \cos(\omega_n t) \quad (1.5')$$

可见, 无阻尼单自由度系统的振动响应可以用一个正弦(或余弦)函数来表示, 其振动周期为 $T = 2\pi/\omega_n = 2\pi \sqrt{m/k}$ 。由于这个周期仅取决于系统的质量与弹簧刚性, 称之为固有周期(Natural Period), 其倒数称为固有频率 f_n (Natural Frequency, 单位为 Hz)。相应地, ω_n 称为固有角频率(Natural Angular Frequency, [rad/s])。这种振动称为简谐振动或单频振动(Simple Harmonic Vibration)。

对于简谐振动来说, 用一个正弦或余弦函数足以描述其响应。但是在研究复杂的振动形式时, 三角函数并不是最好用的数学表达方式。这里, 我们介绍用复数形式表示振动的方法。应用欧拉公式 $e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta, j = \sqrt{-1}$, 上式可以变形为

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) = \operatorname{Re}\{x_0 \cos(\omega_n t) + jx_0 \sin(\omega_n t)\} = \operatorname{Re}\{x_0 e^{j\omega_n t}\}$$

Re 表示取实部。可见, 简谐振动可以用一个复指数的实部来表示, 复指数可以用复平面上的一个向量来表示。图 1.3 表示一个长度为 A 的向量在复平面上的逆时针方向以 ω_n 的角速度旋转时的情况。很显然, 它在实轴上的投影就是一个简谐振动 $x(t) = A\cos(\omega_n t)$ 。

为了方便, 通常略去实部, 而直接用复指数形式来表示一个单频振动, 这种形式也称为极坐标表示形式。这在数学演绎推导过程中毫无问题, 只要对最终结果取实部即可。简谐振动的位移、速度和加速度用极坐标形式表示, 有以下关系

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{j(\omega t + \varphi)} \\ \dot{x}(t) &= j\omega x(t) \\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2 x(t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

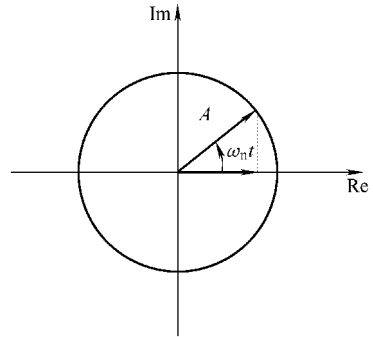


图 1.3 简谐振动的向量表示形式

如图 1.4 所示为初始位移为 1mm, 初始速度为 0, 固有频率为 2Hz 的单自由度系统的自由振动的位移、速度和加速度曲线。速度与位移呈现 90° 的相位差, 而加速度与位移相位刚好相反。这里, 速度由位移的 1 阶微分得到, 加速度由位移的 2 阶微分得到。另外, 为了便于与位移及速度同图表示, 加速度的单位取为 Gal ($1\text{Gal} = 1\text{cm/s}^2$)。结合式(1.6)可知, 给一个向量乘上虚数单位 j 相当于把这个向量前移 90° 相角, 而幅值保持不变。

最后, 对频率及角频率的关系做一说明。图 1.3 中, 向量转过一圈所用的时间定义为周期。频率定义为周期的倒数, 表示每秒钟内转过的圈数, 单位为 $1/\text{s}$ 。所

谓角频率，其实是向量旋转的角速度，即每秒转过的角度，单位为 rad/s 。因此，角频率与频率的关系为 $\omega_n = 2\pi f_n$ 。

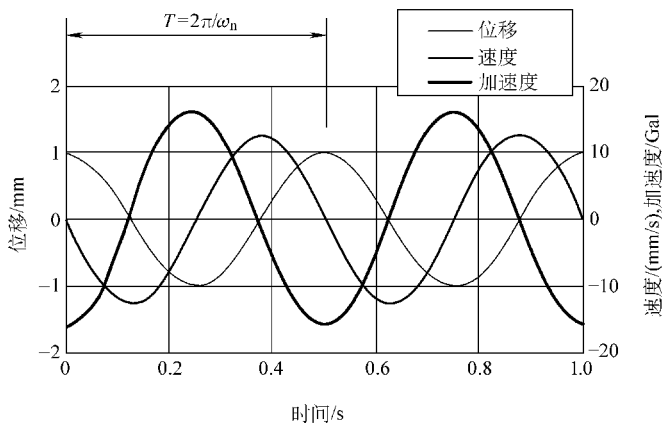


图 1.4 无阻尼单自由度系统的自由振动

1.2.2 强迫振动

假定在图 1.1 的系统中，有外力作用在物体上，则物体的运动由方程式(1.2)所决定。外力的形式多种多样，可以是时间的任意函数。这里考虑角频率为 ω 的简谐外力， $F(t) = F_0 \sin \omega t$ ， F_0 为力幅，则方程式(1.2)成为

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (1.7)$$

由定律 2 可知，首先需找到这个方程的一个特解。由于方程右端是一个正弦函数，可以设该方程的一个特解为 $x = X \sin \omega t$ 。代入上式可得

$$X = \frac{F_0}{-m\omega^2 + k} = \frac{F_0}{k} \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2} = \frac{X_{st}}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

这里， $X_{st} = F_0/k$ 表示物体在最大力作用下的静变形。方程式(1.7)所对应的齐次型的通解已由式(1.5)给出，于是，该方程的通解为

$$x = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t + \frac{X_{st}}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \quad (1.8)$$

C_1 、 C_2 为两个由初始条件确定的常数。式(1.8)前两项代表振动频率为固有频率的自由振动成分，第三项则代表与激励力同频率的强迫振动成分。由于有两个独立的频率成分存在，该振动不再是简谐振动。

对于静止的初始条件 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ ，可以求得

$$C_1 = -\frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} X_{st}, \quad C_2 = 0$$

代入式(1.8)，可得振动响应为

$$x = \frac{X_{st}}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \left(-\frac{\omega}{\omega_n} \sin\omega_n t + \sin\omega t \right)$$

可见，当 $\omega = \omega_n$ 时，振幅将变为无穷大，这就是通常所说的共振现象。

如图 1.5 所示为固有频率 2Hz 的无阻尼单自由度系统在静止的初始条件下，用正弦波激振时的位移响应(在此计算中，调整力幅的大小，使得 $X_{st} = F_0/k = 1\text{mm}$)。当激振频率为 0.5Hz ($\omega/\omega_n = 0.25$) 及 4Hz ($\omega/\omega_n = 2$) 时，位移响应由固有频率与激励频率两个频率成分上的响应合成，振幅一定。当激振频率等于固有频率时 ($\omega/\omega_n = 1$)，发生共振，振幅越来越大(为了避免被 0 除的问题，在这个计算中，激励频率约为 2Hz)。

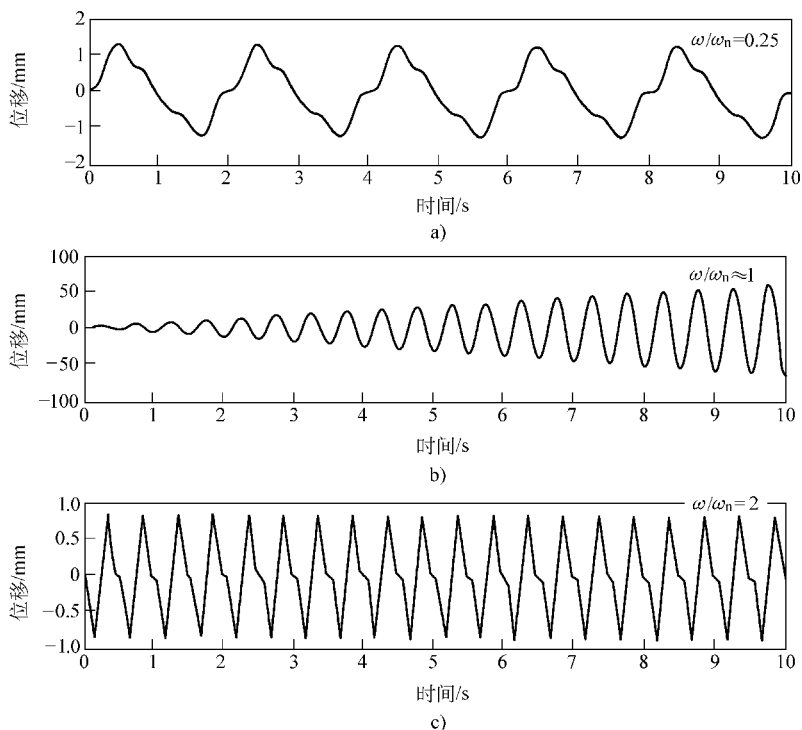


图 1.5 固有频率为 2Hz 的无阻尼单自由度系统的强迫振动响应

a) $\omega/\omega_n = 0.25$ b) $\omega/\omega_n \approx 1$ c) $\omega/\omega_n = 2$

在无阻尼的理想状态下，一旦振动发生，将无限地持续下去。实际中，由于阻尼的作用，自由振动项会很快衰减掉，最后只剩下强迫振动的成分，因而我们更关心式(1.8)中的第 3 项。在此，略去自由振动项，只考虑强迫振动一项，式(1.8)成为

$$x = \frac{X_{st}}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin\omega t \quad (1.9)$$

式(1.9)与激振力 $F(t) = F_0 \sin \omega t$ 相比, 可得

$$\frac{x}{F} = \frac{X_{st}}{F_0 [1 - (\omega/\omega_n)^2]} = \frac{1}{k [1 - (\omega/\omega_n)^2]} \quad (1.10)$$

这是一个随激振频率变化的函数, 称为系统的频率响应函数(Frequency Response Function, FRF)。这种从频率响应的角度来考查系统振动特性的方法称为频域分析法。

上式有一个显著的特点, 就是当 $\omega = \omega_n$ 时, 分母变为0, 响应为无穷大。令

$$A_0 = \left| \frac{1}{k [1 - (\omega/\omega_n)^2]} \right|$$

则对于 $\omega < \omega_n$, 式(1.10)可以变形为(应用欧拉公式 $e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$)

$$\frac{x}{F} = A_0 \cos(0) + j A_0 \sin(0) = A_0 e^{j0}$$

上式表明, 位移响应与激振力之间的相位差为0, 即二者同相。

同样, 对于 $\omega > \omega_n$, 式(1.10)可以变形为

$$\frac{x}{F} = A_0 \cos(\pi) - j A_0 \sin(\pi) = A_0 e^{-j\pi}$$

这时, 位移与激振力之间的相位差为 180° , 即二者反相。

应用极坐标表示形式, 上述频率响应函数可以写为更一般的形式

$$H(\omega) = \frac{x}{F} = A_0(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (1.11)$$

$A_0(\omega)$ 称为幅频特性, $\varphi(\omega)$ 称为相频特性。我们把上述位移与激励力之间的传递函数 $H(\omega)$ 称为柔顺性函数(Compliance)。相应地, 把速度与激励力之比称为导纳函数(Mobility), 加速度与激励力之比称为惯量函数(Inertance)。

如图 1.6 所示为根据式(1.10)绘制的幅频响应曲线及相频曲线。这里, 共振时刻(激振频率为 2Hz)的相位取为 -90° (理由参照图 1.7)。相对于相频特性, 更重要的是幅频特性。当激振频率接近于 0Hz 时, 幅值为一常数, 等于弹簧刚性系数的倒数, 即柔性系数, 用于衡量静力作用下的变形。当激振频率远大于共振频率时, 幅值变得很小, 最终趋近于 0。这是因为激振力变化太快, 物体由于惯性的影响跟不上力的变化, 结果是原地不动。

我们知道, 当一个静态力(不

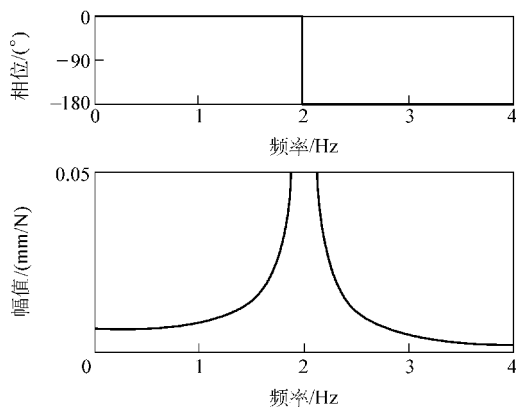


图 1.6 无阻尼单自由度系统的频率响应曲线

随时间变化或变化很慢，即频率为 0 或接近于 0) 作用在结构上时，结构将产生变形，变形的大小由力的大小和结构的刚性所决定。而当一个动态力(随时间较快变化)作用在结构上时，此时的变形不但取决于力的大小和刚性值，而且与激励力的频率及结构的固有频率有关。当发生共振时，产生的变形将远远大于同样大小的静态力引起的静变形，很可能使结构发生破坏。因此，掌握并优化产品的动态特性，以避免发生共振对于设计工程师来说非常重要。

在此，引入动刚性的概念。动刚性为柔顺性函数的倒数，也是频率的函数；频率为 0 时，所对应的值就是静刚性。共振时，动刚性最小(对于这里所讨论的无阻尼共振，动刚性为 0)；频率大于共振频率以上，随着频率的增加，动刚性越来越大。

相对于以上频域分析，如图 1.5 所示在时间轴上观察振动特性的方法称为时域分析。这里，我们再来看一个时域分析的例子。图 1.7 是在初始条件为 0 的条件下对上述单自由度系统(固有频率为 2Hz)用扫描正弦力进行激励的结果。在 0 ~ 5s 的时间里，激励频率由 0Hz 变为 4Hz。在 2.5s 的时候，频率为 2Hz，发生共振。图中清楚地显示，共振之前，位移和激励力同相，而在共振之后，位移和激励力反相。在共振时刻($t = 2.5s$)，位移为最大，而激励力刚好为 0，二者成 90° 相位差的关系。

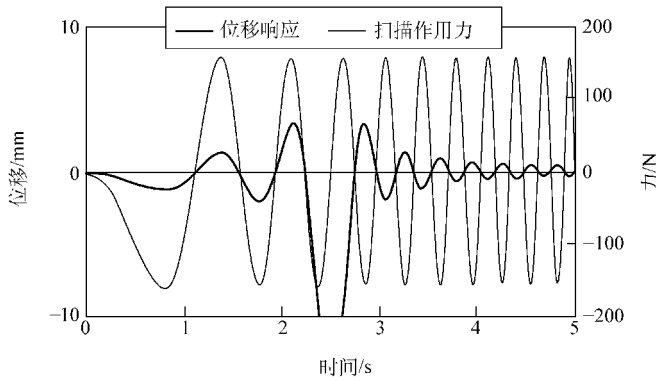


图 1.7 正弦扫描激励时的位移响应及激励力

最后，作为参考，这里给出上述计算中所使用的扫描正弦的定义

$$sweep = \sin(2\pi \int F(t) dt)$$

$$其中, F(t) = \begin{cases} f_0 & t < t_0 \\ f_0 + \frac{f_1 - f_0}{t_1 - t_0} t & t_0 < t < t_1 \\ f_1 & t > t_1 \end{cases}, \text{ 在时间段 } (t_0, t_1) \text{ 上, 频率由 } f_0 \text{ 变为 } f_1,$$

则有