JIXIE GONGCHENG JISHU RENYUAN

机械工程技术人员必备技术丛书

BIBEI JISHU CONGSHU

机械优化设计与实例

于惠力　冯新敏○编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

机械工程技术人员必备技术丛书

机械优化设计与实例

于惠力　冯新敏　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书主要介绍机械优化设计方法与实例，全书共有9章，内容主要包括机械优化设计的基本要素及数学模型、优化设计的理论基础、常见的优化设计方法和优化设计软件简介。书中对工程中常见的六大类优化设计方法——一维搜索、无约束优化、约束优化、多目标函数优化、离散变量的优化和模糊优化做了较详细的介绍，不仅介绍了基本原理和数学模型，还介绍了优化设计方法框图，并为每种优化设计方法都配了详细的机械优化设计实例。

本书是机械工程技术人员必备的技术资料，可供从事机械设计制造及其自动化专业的工程技术人员使用，尤其对于初、中级的机械工程技术人员具有指导意义。本书也可供高等院校机械设计及制造专业本科生学习时参考。

图书在版编目（CIP）数据

机械优化设计与实例/于惠力，冯新敏编著.—北京：机械工业出版社，2016.6

（机械工程技术人员必备技术丛书）

ISBN 978-7-111-53920-9

Ⅰ.①机…　Ⅱ.①于…②冯…　Ⅲ.①机械设计—最优设计　Ⅳ.①TH122

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第117557号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：黄丽梅　责任编辑：黄丽梅　李　乐
版式设计：霍永明　责任校对：陈　越
封面设计：陈　沛　责任印制：常天培
北京圣夫亚美印刷有限公司印刷
2016年8月第1版第1次印刷
169mm×239mm・12印张・246千字
0001—3000册
标准书号：ISBN 978-7-111-53920-9
定价：39.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88361066	机工官网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-68326294	机工官博：weibo.com/cmp1952
010-88379203	金书网：www.golden-book.com
封面无防伪标均为盗版	教育服务网：www.cmpedu.com

前　　言

随着我国机械工业的快速发展，从事机械行业的工程技术人员数量不断增加，如何尽快提高机械工程技术人员尤其是初、中级技术人员最基本的机械设计能力，在最短时间内尽快掌握工程中常见的优化设计方法，是我们编写本书的初衷。

优化设计为设计提供了一种重要的科学设计方法，因而是构成和推进现代设计方法产生与发展的重要内容。优化设计是工程技术人员进行设计的重要技术，该技术建立在最优化的原理和方法的基础上，借助计算技术与计算机这一强有力的手段，对某项设计问题，在规定的限制条件下，优选设计参数，使某一项或某几项设计指标获得最优值的设计技术。采用优化方法，对提高新产品的设计水平和改进现有设备的设计方案是极有价值的。

优化设计涉及的数学基础较深，设计方法类型多，设计难度也很大。如何将各种优化设计方法概括成浅显易懂的方式来表达，使读者在最短时间内消化理解，是我们编写的难题。本书的编写有如下特点：

1. 编写采用通俗易懂的方法，本书的编写以循序渐进、兼顾理论与工程应用的原则为出发点。全书内容在组织安排上，力求由浅入深，逐层推进。在优化方法的论述方面对其优化理论做了适当深度的讨论，并着重于概念的阐述和方法的运用，便于初学者学习。

2. 编写内容方面突出实用的原则。本书以实用为主，在阐述每一种优化设计的原理和设计方法之后，紧接着有相关的机械优化设计实例，实例具有代表性，并且对设计实例按步骤进行了详细的解答，具有很强的实用性。

本书共有9章，包括机械优化设计的基本要素及数学模型、优化设计的理论基础、一维搜索方法、无约束优化方法、约束优化方法、多目标函数优化方法、离散变量的优化设计方法、模糊优化设计和优化设计软件简介。

本书是机械工程技术人员必备的技术资料，可供从事机械设计制造及其自动化专业的工程技术人员使用，尤其对于初、中级的机械工程技术人员具有指导意义。

在本书的编写过程中，编者参阅了大量文献资料，引用了有关教材和参考书中的精华及许多专家、学者的部分成果和观点，书后以参考文献一并列出。

在此特对有关作者致以真诚的感谢！

鉴于机械优化设计内容涉及面广，发展迅速，加之编者水平有限，书中难免会有不足之处，恳请读者批评指正。

编 者

目　录

第 1 章　机械优化设计的基本要素及数学模型

机械优化设计，就是借助最优化数值计算方法和计算机技术，求取机械工程问题的最优设计方案。进行最优化设计时，首先必须将实际问题加以数学描述，形成一组由数学表达式组成的数学模型，然后选择一种最优化数值计算方法和计算机程序，在计算机上运算求解，得到一组最佳的设计参数。这组设计参数就是设计的最优解。

数学模型是对实际问题的数学描述和概括，是进行优化设计的基础。优化问题的计算求解完全是围绕数学模型进行的，也就是说，优化计算所得的最优解实际上只是数学模型的最优解。此解是否满足实际问题的要求，是否就是实际问题的最优解，完全取决于数学模型与实际问题的符合程度。因此，根据设计问题的具体要求和条件建立完备的数学模型是优化设计成败的关键。

综上所述，机械优化设计的基本要素是：设计变量、约束条件、目标函数。

1.1　设计变量

工程问题的一个设计方案通常是用特征参数表示的，一组特征参数值代表一个具体的设计方案。这种代表设计方案的特征参数一般应选作该问题优化设计的设计变量。

设计变量的全体，实际上是一组变量，变量的个数称为设计的维数，如有几个设计变量，则称为几维优化设计问题。若将 n 个设计变量按一定的次序排列起来，构成一个 n 维向量，即写成：

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

式中，右上角“T”为矩阵的转置符号。我们把 $\boldsymbol{X}$ 定义为 n 维欧氏空间的一个向量，设计变量 x_1，x_2，⋯，x_n 为向量 $\boldsymbol{X}$ 的几个分量。在优化设计中，这种以 n 个设计变量为坐标轴组成的实空间称为 n 维实空间，用 $\mathbf{R}^n$ 表示，它是以设计变量 x_1，x_2，⋯，x_n 为坐标轴的 n 维空间。设计空间包含着该项设计所有可能的设计方案，且每一个设计方案对应着设计空间的一个设计向量或者说一个设计点 $\boldsymbol{X}$。

任何一项产品都是众多设计变量标志结构尺寸的综合体，变量多可以淋漓尽致

地描述产品结构，但会增加建模的难度，造成优化规模过大。选取设计变量时应注意以下几点：

1）抓主要，舍次要。对产品性能和结构影响大的参数可取为设计变量，影响小的可先根据经验取为试探性的常量，有的甚至可以不考虑。例如，车辆离合器弹簧的工作频率很低，使用温度也不高，可以不考虑共振和温度对弹簧工作性能的影响，但发动机的气门弹簧就要考虑共振和温度的影响。

2）根据要解决设计问题的特殊性来选择设计变量。例如，圆柱螺旋拉压弹簧的设计变量有 4 个，即钢丝直径 d、弹簧中径、工作圈和自由高度。在设计中将材料的许用切应力和切变模量等作为常量，在给定径向空间内设计弹簧时，则可把弹簧中径作为设计常量。

3）注意独立变量和相关变量。独立变量是指仅在选定的子系统边界内、在模型中可独立取得的变量，它不受子系统边界外的影响，也不影响其他子系统的性能和结构。当把总系统分解为若干个子系统来分别进行优化设计时，难免有一个或几个变量同时包含在相邻子系统中，这种变量在这个子系统中的最优值在相关子系统中就不是最优值，把有这种特点的变量称为相关变量。

4）应尽量选取有实际意义的无因次变量作为设计变量。有量纲的参数，当取单位不同时，其值的大小发生变化，将导致对数学模型产生不同的影响，这对优化结果一般不会产生影响。但会影响计算的效率，甚至导致一些优化方法失效。用无量纲的参数作为设计变量就不存在这一问题。例如，一对齿轮传动，大小齿轮的齿数 z_1 和 z_2 可以作为设计变量，因为传动比 $i=\frac{z_2}{z_1}$为无量纲的量，所以用 z_1 和 i 作为设计变量较好。

1.2　约束条件

优化设计不仅要使所选择方案的设计指标达到最优值，同时还必须满足一些附加的条件，这些附加的设计条件都是对设计变量取值的限制，在优化设计中叫作设计约束，它的表现形式有两种。一种是不等式约束，即

$$g_u(\boldsymbol{X}) \leqslant 0$$

或

$$g_u(\boldsymbol{X}) \geqslant 0 \quad (u=1,2,\cdots,m)$$

另一种是等式约束，即

$$h_v(\boldsymbol{X})=0 \quad (v=1,2,\cdots,p<n)$$

式中，$g_u(\boldsymbol{X})$和 $h_v(\boldsymbol{X})$分别为设计变量的函数，统称为约束函数；m 和 p 分别表示不等式约束和等式约束的个数，而且等式约束的个数 p 必须小于设计变量的个数 n。因为从理论上讲存在一个等式约束就可以用它消去一个设计变量，这样便可以降低优化设计问题的维数。

根据约束的性质不同，可以将约束分为区域约束和性能约束两类。区域约束是直接限定设计变量取值范围的约束条件；而性能约束是由某些必须满足的设计性能要求推导出来的约束条件。在求解时对这两类约束有时不同对待。

不等式约束及其有关概念在优化设计中是相当重要的。每一个不等式约束都把设计空间划分成两部分。一部分满足该不等式约束条件，另一部分则不满足，两部分的分界面叫作约束面。一个优化设计问题的所有不等式约束的边界将组成一个复合约束边界，复合边界内的区域是满足所有不等式约束条件的部分，在这个区域中所选择的设计变量是允许采用的，这个区域称为设计可行域或简称可行域。除去可行域的设计空间称为非可行域。据此，可行域内的任何设计点都代表一个允许采用的设计方案，这样的点叫作可行解或内点，在约束边界上的点叫作极限设计点或边界点，此时这个边界所代表的约束叫作适时约束或起作用约束。

在建立数学模型时，目标函数与约束函数不是绝对的；对于同一对象的优化设计问题（如齿轮传动优化设计），不同的设计要求（如要求质量最轻或承载能力大等）反映在数学模型上是选择不同的目标函数和约束函数，设定不同的约束边界值。换言之，目标函数和约束函数都是设计问题的性能函数，只是在数学模型中允许不同的角色。所以，通常的做法是将目标函数和约束函数视为问题函数，建立起某一对象的优化设计通用数学模型，再根据具体的设计要求，指定某个或某些问题函数为目标函数，某些问题函数为约束函数且设定边界值。

当优化数学模型中的问题函数均为设计变量的线性函数时，则称为线性规划问题。问题函数中包含非线性函数时，则称为非线性规划问题。多数工程优化设计问题的数学模型是属于有约束的非线性规划问题。

1.3　目标函数和等值线

每一个设计问题，都有一个或多个设计中所追求的目标，它们可以用设计变量的函数来加以描述，在优化设计中称它们为目标函数，当给定一组设计变量值时，就可计算出相应的目标函数值，因此，在优化设计中，就是用目标函数值的大小来衡量设计方案的优劣。优化设计的目的就是要求所选择的设计变量使目标函数值达到最优值。最优值可能是极大值，也可能是极小值，由于求目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的极大值等价于求目标函数 $-f(\boldsymbol{X})$ 的极小值，因此，为了算法和程序的统一，通常最优化就是指极小值 $f(\boldsymbol{X})\rightarrow\min$。

在工程设计问题中，设计所追求的目标可能是各式各样的，当目标函数只包含一项设计指标极小化时，称为单目标设计问题。当目标函数包含多项设计指标极小化时，这就是所谓的多目标设计问题。单目标优化设计问题由于指标单一，易于衡量设计方案的优劣，求解过程比较简单明确，而多目标问题则比较复杂，多个指标

往往构成矛盾，很难或者不可能同时达到极小值。多目标问题的求解较为简单的方法是采用线性加权的形式，将多目标问题转化为单目标问题求解。或将一些目标转化为约束函数，这样处理后的数学模型往往不能很好地体现多目标问题的实质。求得的最优解不能很好地满足设计要求。

由于目标函数是设计变量的函数。故给定一组设计变量，就相应有一个函数值。并在设计空间相应有个设计点，因此也可以说设计空间任何一点都有一个函数值与之相对应。具有相同函数值的点集在设计空间形成一个曲面或曲线，称为目标函数的等值面或等值线。

1.4 优化设计的数学模型

优化设计的数学模型由设计变量、目标函数和约束条件三部分组成，可写成以下统一形式：

求变量：$x_1, x_2, \cdots, x_n$

使极小化函数：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

满足约束条件：

$$g_u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant 0 \quad (u = 1, 2, \cdots, m)$$

$$h_v(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad (v = 1, 2, \cdots, p, p < n)$$

其中 $g_u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant 0$ 称为不等式约束条件，$h_v(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 称为等式约束条件。

用向量 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示设计变量，$\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n$ 表示向量 $\boldsymbol{X}$ 属于 n 维欧氏空间，用 min、max 表示极小化和极大化，s. t. 表示“满足于”，m 和 p 分别表示不等式约束和等式约束的个数。数学模型可写成以下向量形式：

$$\min f(\boldsymbol{X}) \quad (\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n)$$

$$\text{s. t. } g_u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant 0 \quad (u = 1, 2, \cdots, m)$$

$$h_v(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad (v = 1, 2, \cdots, p, p < n)$$

由于工程设计的解一般都是实数解，故可省略 $\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n$，将优化设计的数学模型简记为

$$\min f(\boldsymbol{X})$$

$$\text{s. t. } g_u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant 0 \quad (u = 1, 2, \cdots, m)$$

$$h_v(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad (v = 1, 2, \cdots, p, p < n)$$

当设计问题要求极大化目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 时，只需要将目标函数改写为 $-f(\boldsymbol{X})$ 即可，这是因为 $\max f(\boldsymbol{X})$ 和 $\min[-f(\boldsymbol{X})]$ 具有相同的解。同样，当不等式约束条件中的不等号为“$\geqslant 0$”时，只要将不等式两端同乘以“-1”，即可得到“$\leqslant 0$”的一般形式。

最优化问题也称为数学规划问题，最优化问题根据数学模型中是否包含约束条

件而分为无约束优化问题和约束优化问题；根据设计变量的多少可分为单变量优化问题和多变量优化问题；根据目标函数和约束函数的性质可分为线性规划问题和非线性规划问题。

当数学模型中的目标函数均为设计变量的线性函数时，称此设计问题为线性优化问题或线性规划问题。当目标函数和约束函数中至少有一个为非线性函数时，称此设计问题为非线性优化问题或非线性规划问题。

线性规划和非线性规划是数学规划的两个重要分支。生产计划和经济管理方面的问题一般属于线性规划问题，而工程设计问题则属于非线性规划问题。

第 2 章　优化设计的理论基础

2.1　优化设计问题的几何意义

2.1.1　目标函数的等值面（线）

目标函数的值是评价设计方案优劣的指标。n 维变量的目标函数，其函数图像只能在 $n+1$ 维空间中描述出来。当给定一个设计方案，即给定一组 x_1，x_2，…，x_n 的值时，目标函数 $f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 必相应有一确定的函数值；但若给定一个 $f(\boldsymbol{X})$ 值，却有无限多组 x_1，x_2，…，x_n 值与之对应，也就是当 $f(\boldsymbol{X})=a$ 时，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 在设计空间中对应有一个点集。通常这个点集是一个曲面（二维是曲线，大于三维称为曲面），称之为目标函数的等值面。当给定一系列的 a 值，取 $a=a_1$，a_2，…时，相应地有 $f(\boldsymbol{X})=a_1$，a_2，…，这样可以得到一组超曲面族——等值面族。显然，等值面具有下述特性，即在一个特定的等值面上，尽管设计方案很多，但每一个设计方案的目标函数值却是相等的。

现以二维无约束最优化设计问题为例阐明其几何意义。如图 2-1 所示，二维目标函数值 $f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2)$ 在以 x_1、x_2 和 $f(\boldsymbol{X})$ 为坐标的三维坐标系空间内是一个曲面。在二维设计平面 x_1Ox_2 中，每一个点 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2)$ 都有一个相应的目标函数值 $f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2)$，它在图中反映为沿 $f(X)$ 轴方向的高度。若将 $f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2)$ 面上具有相同高度的点投影到设计平面 x_1Ox_2 上，则得 $f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2)=a$ 的点集，称为目标函数的等值线（等值线是等值面在二维设计空间中的特定形态）。当给定一系列不同的 a 值时，可以得到一组平面曲线：$f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2)=a_1, f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2)=a_2$，…，这组曲线构成目标函数的等值线族。由图可以清楚地看到，等值线的分布情况反映了目标函数值的变化情况，等值线越向里，目标函数值越小，对于一个有中心的曲线族来说，目标函数的无约束极小点就是等值线族的一个共同中心 $\boldsymbol{X}^*$。故从几何意义上说，求目标函数无约束极小点也就是求其等值线族的共同中心。

以上二维设计空间等值线的讨论，可以推广到分析多组问题。但需注意，对于三维问题在设计空间中是等值面，高于三维的问题在设计空间中则是等值超曲面。

2.1.2　约束最优解和无约束最优解

n 维目标函数 $f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，若在无约束条件下极小化，即在整个 n

维设计空间寻找$\boldsymbol{X}^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^{\mathrm{T}}$，使满足 $\min f(\boldsymbol{X})=f(\boldsymbol{X}^*),\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$，其最优点$\boldsymbol{X}^*$、最优值$f(\boldsymbol{X}^*)$构成无约束最优解；若在约束条件限制下极小化，即在可行域中寻找$\boldsymbol{X}^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^{\mathrm{T}}$，使满足 $\min f(\boldsymbol{X})=f(\boldsymbol{X}^*)$，$\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$，其最优点$\boldsymbol{X}^*$、最优值$f(\boldsymbol{X}^*)$ 构成约束最优解，无论在数学模型还是几何意义上，两者均是不同的概念。

现用一个二维非线性最优化问题，从几何意义上来说明约束最优解和无约束最优解。

设已知目标函数$f(\boldsymbol{X})=x_1^2+x_2^2-4x_1+4$，受约束于$g_1(\boldsymbol{X})=x_1-x_2+2\geqslant0$，$g_2(\boldsymbol{X})=x_1\geqslant0$，$g_3(\boldsymbol{X})=x_2\geqslant0$，$g_4(\boldsymbol{X})=-x_1^2+x_2-1\geqslant0$，求其最优解$\boldsymbol{X}^*$和$f(\boldsymbol{X}^*)$。图 2-1a 表示其目标函数和约束函数的立体图，图 2-1b 表示其平面图。当目标函数$f(\boldsymbol{X})=0.25$、1、4、6.25 时，相应在x_1Ox_2设计平面内得一系列平面曲线（同心圆）——等值线，它表示了目标函数值的变化情况，越向里边的代表目标函数值越小。显然其无约束最优解为目标函数等值线同心圆中心$\boldsymbol{X}^{*(1)}=(x_1^{*(1)},x_2^{*(1)})^{\mathrm{T}}=(2,0)^{\mathrm{T}}$，$f(\boldsymbol{X}^{*(1)})=0$。而其约束最优解则需在由约束线$g_1(\boldsymbol{X})=0$，$g_2(\boldsymbol{X})=0$，$g_3(\boldsymbol{X})=0$，$g_4(\boldsymbol{X})=0$ 组成的可行域（阴影线里侧）内寻找使目标函数值为最小的点，由图可见，约束线$g_4(\boldsymbol{X})=0$ 与某等值线的一个切点$\boldsymbol{X}^{*(2)}$即为所求，$\boldsymbol{X}^{*(2)}=(x_1^{*(2)},x_2^{*(2)})^{\mathrm{T}}=(0.58,1.34)^{\mathrm{T}}$，$f(\boldsymbol{X}^{*(2)})=3.8$ 为其约束最优解。

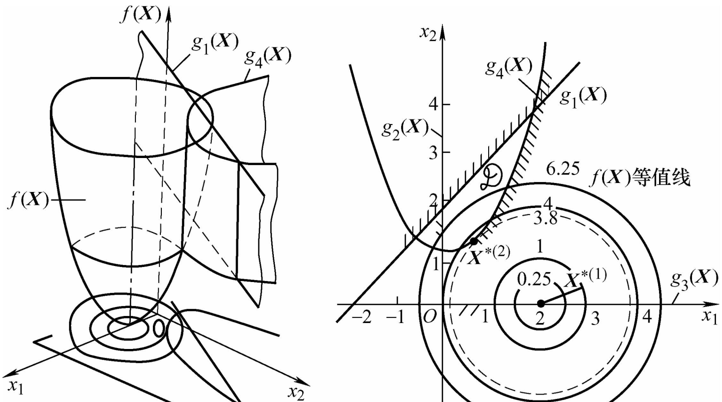

图 2-1　二维函数的约束最优解和无约束最优解

以上二维问题关于约束最优解和无约束最优解几何意义的讨论，同样可以推广到多维问题。n 个设计变量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$组成设计空间。在这个空间中的每个点代表一个设计方案。此时 n 个变量有确定的值。当给定目标函数某一值时，就在 n 维设计空间内构成一个目标函数的等值超曲面，给定目标函数一系列数值时就得一系列目标函数的等值超曲面。这些等值超曲面反映了目标函数的变化情况。无约束最

优点为这些等值超曲面的共同中心。对于约束最优化问题，每一个约束条件在 n 维设计空间中是一个约束超曲面，全部约束超曲面在设计空间中构成可行域。在其上寻找目标函数值最小的点即为约束最优点。这一点可以是目标函数等值超曲面与某个约束超曲面的一个切点，也可以是目标函数值较小的某些约束超曲面的交点（如图 2-2 所示的$\boldsymbol{X}^*$点）。

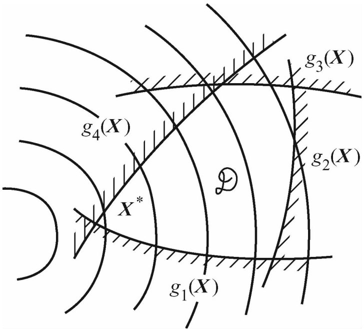

图 2-2　n 维问题的约束最优点和无约束最优点

2.1.3　局部最优解和全域最优解

对无约束最优化问题，当目标函数不是单峰函数时，有多个极值点$\boldsymbol{X}^{*(1)}$，$\boldsymbol{X}^{*(2)}$，…，如图 2-3 所示。此时，$\boldsymbol{X}^{*(1)}$和$f(\boldsymbol{X}^{*(1)})$、$\boldsymbol{X}^{*(2)}$和$f(\boldsymbol{X}^{*(2)})$均称为局部最优解。如其中$\boldsymbol{X}^{*(1)}$的目标函数值$f(\boldsymbol{X}^{*(1)})$ 是全区域中所有局部最优解中的最小者，则称$\boldsymbol{X}^{*(1)}$和$f(\boldsymbol{X}^{*(1)})$为全域最优解。

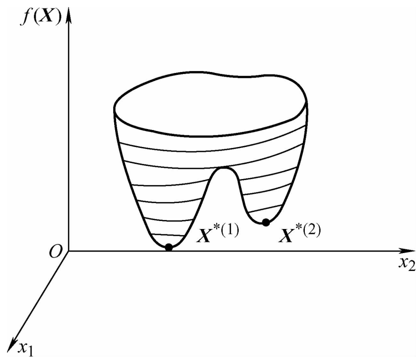

图 2-3　无约束优化的全域和局部最优解

对于约束最优化问题，情况更为复杂，它不仅与目标函数的性质有关，还与约束条件及其函数性质有关。如图 2-4 所示，将目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的等值线绘于图上，由两个不等式约束$g_1(\boldsymbol{X})\geqslant 0$、$g_2(\boldsymbol{X})\geqslant 0$ 构成两个可行域D_1和D_2。$\boldsymbol{X}^{*(1)}$、$\boldsymbol{X}^{*(2)}$、$\boldsymbol{X}^{*(3)}$分别是可行域内在某一邻域目标函数值最小的点，都是局部极小点，亦即$\boldsymbol{X}^{*(1)}$、$f(\boldsymbol{X}^{*(1)})$，$\boldsymbol{X}^{*(2)}$、$f(\boldsymbol{X}^{*(2)})$，$\boldsymbol{X}^{*(3)}$、$f(\boldsymbol{X}^{*(3)})$均称为局部最优解。由于$f(\boldsymbol{X}^{*(1)}) < f(\boldsymbol{X}^{*(2)}) < f(\boldsymbol{X}^{*(3)})$，可知$\boldsymbol{X}^{*(3)}$为全域极小点，亦即$\boldsymbol{X}^{*(3)}$和$f(\boldsymbol{X}^{*(3)})$为全域最优解。

优化设计总是期望得到全域最优解，但目前的优化方法只能求出局部最优解，并采取对各局部最优解的函数值加以比较，取其中最小的一个作为全域最优解。