第一章 緒 論

§1. 重力选矿法的研究对象及其应用范圍

重力选矿是在活动和流动的介质中按比重（密度）或粒度选分顆粒混合物的过程。顆粒的形状对选分过程的結果有一定程度的影响。

作为选分介质的有水、空气、重液（比重大于水的）和悬浮液。在空气中进行的重力选矿过程称为風力过程，而在其他液体中进行的称为水力过程。

在重力选矿过程中，不同性质的顆粒只有当其在介质中发生运动时才能分开。顆粒在介质中运动时受其重力的作用，顆粒的重力等于其在介质中的重量。顆粒在介质中运动时还受到介质阻力的作用，阻力是介质对在其中运动的顆粒的作用力的合力。

顆粒在介质中的重力决定于顆粒的性质（体积和密度）和介质的性质（密度）。介质的阻力决定于顆粒及介质的性质，决定于顆粒在介质中相对运动速度的大小和方向，以及介质在顆粒周圍流过的状态。

在重力选矿过程中顆粒是成群运动的，所以顆粒間的摩擦力对个别顆粒的运动有重大的影响。

在重力选矿过程中，选分介质有連續垂直上升、間断垂直上升、垂直交变（上升和下降交替进行）和几乎水平的运动形式。当进行离心力选矿时，选分介质还作旋轉运动。

在重力选矿过程中，顆粒的运动是各式各样的。主要的运动形式是在重力作用下垂直沉降。顆粒另外一种重要的运动形式是在斜面水流內移动，顆粒的第三种运动形式是在振动和搖动粒群时，細顆粒通过周圍顆粒間的空隙向底层的运动，該种运动称为析离。顆粒的第四种运动形式是細顆粒随运动介质一起鉆过周圍顆粒的空隙移向底层，此种运动称为鉆隙。析离和鉆隙是相似的，其結果均是使細顆粒集中在下层。

重力选矿法根据其作用原理的不同，可以分为以下几种过程：

1）分級（水力和風力）；

2）跳汰选矿（水力和風力）；

3）重介质选矿（水力和風力）；

4）斜槽选矿（水力）；

5）搖床选矿（水力和風力）；

6）洗矿（水力）。

洗矿是用水力和机械力处理泥质物料，使其泥质部分与粒状部分分离。使物料的泥质部分和粒状部分分离可用篩分或水力分級，但只当用水力分級进行分离时，洗矿才屬于重力选矿过程。

其中2、3、4和5項是按比重（密度）分离顆粒混合物，而过程1和6則是按粒度分离。由过程2、3、4和5可以得到比重（密度）組成不同的产物，所以这些过程是选

需要全本请访问 www.ertongbook.com

别过程。而由过程 1 和 6 則可得到粒度組成不同的产物，所以在一般情况下它們是物料选别前的准备过程。当原料內細粒部分和粗粒部分的比重組成不同时，亦可能是选别过程。

在过程 2、3、4 和 5 中顆粒按比重（密度）分离时，顆粒的粒度和形状影响其按比重分离的精确程度。同样，在过程 1 和 6 中顆粒按粒度分离时，顆粒的比重和形状亦影响其按粒度分离的精确程度。如果顆粒的各种性质組合得很适当，則可提高顆粒按比重或粒度分离的精确性。

在重力选别过程中按比重分离矿粒的难易程度，可近似地按比值$\frac{\delta_2-\Delta}{\delta_1-\Delta}$的大小来确定。其中$\delta_1$为小比重顆粒的密度，$\delta_2$为大比重顆粒的密度，而$\Delta$为介质的密度。按比值$\frac{\delta_2-\Delta}{\delta_1-\Delta}$的大小衡量的物料按比重分离的难易程度列于表1內。

物料按比重分离的难易程度　　表 1

比值 $\frac{\delta_2-\Delta}{\delta_1-\Delta}$	>2.5	<2.5但>1.75	<1.75但>1.5	<1.5但>1.25	<1.25
分离特性	极容易	容易	中等	困难	极困难

由比值$\frac{\delta_2-\Delta}{\delta_1-\Delta}$可以看出，当所要分离的大比重顆粒与小比重顆粒的密度差$\delta_2-\delta_1$和介质密度愈大时（但不得大于δ_2），則愈易按比重分离。

但須指出，在其他条件相同时，随着顆粒粒度的減小，按比重分离的困难程度增大。因此，为了使顆粒尽可能地按比重分离，物料在选别前应脫除細粒級，或分級成粒度范圍較窄的級别。

由于細顆粒的重量較小，因而在重力場中按比重或粒度分离的速度和精确性大大降低。为了解决这一問題，可以使細顆粒在离心力場內进行按比重或粒度分离。离心力場与重力場不同之点是其力場强度可視需要而定。

重力选矿法广泛地用于处理煤炭、稀有金屬（鎢、錫、鈦、鋯、鈦等）矿石和貴金屬（金、鉑）矿石。其次，重力选矿法也应用于非金屬（石棉、金剛石磷灰石等）矿石的加工。此外，对于主要用浮选处理的某些有色金屬（鉛、鋅等）矿石，也能采用重力选矿进行預先选别。

在我国，重力选矿法在处理鎢、錫矿石及煤炭方面起着主导作用。中南及西南各省的鎢、錫选矿厂，无論处理砂矿或脉矿均采用重力选矿法。在选煤工业中重力选矿法的作用尤为重要，几乎所有的炼焦煤均需洗选。在我国也有用重力选矿法选别鉄矿石、鉻矿石、鉛鋅矿石及其他稀有金屬矿石的实例。

§2. 重力选矿法的发展簡史及其在我国社会主义工业化中的作用

重力选矿法是最古老的选矿方法，它比各种冶金方法的应用要早得多。大概在有史以前人类就已知道重力选矿。由于采矿业和冶金业的发展，选矿技术才日趋完善。例如早在 14 世紀和 15 世紀就出現了直至現在仍保留其主要特征的重力选矿設备（如跳汰机

等)。

迄至十九世紀末和二十世紀初（浮选法尚未获得广泛应用之前)，重力选矿法一直是处理各种有用矿物的唯一方法。

自从十九世紀中叶出現了机械化的跳汰机以后，重力选矿法才大規模地在工业上应用。以后由于生产的需要，处理細粒物料的搖床逐漸得到广泛的应用。用于选煤的跳汰机的构造得到了迅速的改进，出現了風力傳动的无活塞跳汰机。1920年以后出現了新的重力选矿法——重介质选矿法。微細顆粒在离心力場中的分离，是目前重力选矿法的新的方向。

在机械化的重力选矿方法还未出現以前，I.牛頓（1726年）和G.G.斯托克斯（1850年）就研究了物体在介质中沉降时所受的阻力。眞正的重力选矿的理論研究是从19世紀中叶才开始的。1867年P.R.雷廷智首先研究了顆粒的自由沉降和顆粒的等降現象，并根据等沉現象提出了跳汰过程的理論解釋。其后对重力选矿理論研究得較多的是R.H.里恰茲。根据他的研究得出了重力选矿过程的某些质的关系，虽然也提出一些量的結論，但后来証明是不正确的。

苏联学者П.В.里亚申科对于粒群的干涉沉降做了深入的研究，据此并提出了粒群按比重分层的条件。他的著作"重力选矿法"（1940年）一书是世界上第一本重力选矿教科书。

近年来許多学者从事着重力选矿理論的研究，他們利用示踪原子或其他方法記录顆粒在重力选矿过程中的复杂运动，这为重力选矿的理論研究开辟了新的途徑。

目前，重力选矿的理論还是落后于生产实踐，这是由于在重力选矿过程中存在着許多复杂而又互相联系的現象和对它們研究得还不够充分的緣故。

在我国重选法的应用也是很早的，在古代就出現了从粮食中分离夾杂物的風車，按其实质来說它是一种風力分級机，在手工业工場內还广泛地应用了水澄（水力分級）法加工陶瓷原料。将重选法用于矿业，首先是用于选比重大的自然金屬，我国古代以金为貨币所証明这点。17世紀以前重力选矿法已广泛用于淘洗鉄砂、錫砂等。虽然如此，在封建統治下其发展速度是极为緩慢的。

自帝国主义侵入我国后，帝国主义視我国为原料基地，大肆进行掠夺。它們在我国建立选矿厂是为了雇用廉价劳动力。所以在十九世紀二十年代以后在我国出現的选矿厂是与帝国主义的侵略分不开的。这些选矿厂都是生产流程不完善、設备差、产品质量低、机械化程度低和劳动条件不好的。

在国民党反动派統治时期，工业得不到发展并且有許多工厂其中也包括选矿厂还遭到了破坏。

在中华人民共和国成立后，在經济恢复阶段对旧有选矿厂进行了恢复改建和扩建。从1953年开始大規模的社会主义建設，使得我国的鋼鉄工业、有色金屬及稀有金屬工业和煤炭工业等有了迅速的发展。其中选煤及稀有金屬选矿几乎完全采用重力选矿法。特别是自从党提出"鼓足干劲，力爭上游，多快好省地建設社会主义"的总路綫之后，在"十年左右的时間內，在主要工业产品产量方面赶上英国"的偉大口号鼓舞下，1958年我国选矿工业开始了大跃进。

以煤为例，在1949年末全国只有五座焦煤选煤厂，按采煤計算的总生产能力为每年450万吨，經过三年恢复，到1953年初开工生产的焦煤选煤厂就增至10座，总生产能力为每年1030万吨，动力煤选煤厂6座、总生产能力为每年715万吨。至1957年年底焦煤和动力煤洗煤厂的总生产能力分别增长为1952年的3.9和4.9倍。开工的洗煤厂增至19座。至1959年末又有5座总生产能力为每年880万吨的现代化大型选煤厂和180多个总生产能力为6000多万吨/年的中、小型选煤厂投入生产，因此选煤厂的总生产能力激增至9640万吨/年。

§3. 颗粒及介质的性质

与重力选矿过程有关的颗粒的主要性质是密度（比重）、粒度和形状。颗粒的表面一般是粗糙的，在冲积矿床中才能遇到表面光滑的颗粒。在颗粒的表面上，有着細微的凸起（在显微鏡下可以見到）和显著的凸起（肉眼可見）。这些凸起会影响介质流过颗粒周圍的状态，但是直到現在对于颗粒的粗糙度还沒有滿意的定量表示法。

密度是颗粒的最重要的性质。密度是以颗粒单位体积的质量表示（克/厘米^3），而重度是以颗粒单位体积的重量表示（达因/厘米^3）。颗粒的比重是颗粒的重量与同体积水的重量之比。比重和密度虽然在数值上相同，并且常常混称，但二者的物理概念是不同的。

根据颗粒粒度的不同，其比重可用在空气和水中称量单个颗粒的重量或用比重瓶的方法来测定。

常見矿物的比重列于附录1內。

若一颗粒由两种已知密度的矿物所組成，在測得颗粒密度之后，則可計算这两种矿物在颗粒中所占的重量百分数。設二已知矿物的密度分别为 δ_1 和 δ_2，颗粒的密度为 δ，則密度为 δ_1 的矿物所占的重量百分数为：

$$x=\frac{\delta_1}{\delta_2}\frac{\delta_2-\delta}{\delta_2-\delta_1}\quad 100\% \qquad (1)$$

另一种矿物在颗粒中重量百分数为 $100-x$。

确定颗粒粒度的方法有以下几种：

1）用篩析法确定。当颗粒能通过边长为 d_1 的方形篩孔而不能通过边长为 d_2 的方形篩孔并且 d_1 与 d_2 的比值不超过1.5时，則 $-d_1+d_2$ 粒級颗粒的平均粒度为：

$$d_{cp}=\frac{d_1+d_2}{2} \qquad (2)$$

2）用颗粒在介质中的自由沉降末速表示。称为水力粒度。

3）用等值直徑表示。即用与颗粒同体积的球体的直徑表示。等值直徑等于：

$$d_e=\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}=\sqrt[3]{\frac{6G}{\pi\delta g}} \qquad (3)$$

式中：V——颗粒的体积；

G——颗粒的重量；

δ——颗粒的密度；

g——重力加速度。

在重力选矿过程中，所处理物料中颗粒的形状是各式各样的。介质繞过不規則形顆粒时一般較繞过球形顆粒困难。就介质在其周圍流过的难易来說，球形并不是理想的，而魚形、梭形更易使介质繞其流过。但介质繞过球形周圍的情况不随其取向不同而有所改变，故用球形做为比較的标准。

顆粒的形状用球形系数表示。顆粒表面积与同体积球体的表面积之比称为球形系数，即

$$x=\frac{S_{球}}{S_{顆粒}} \qquad (4)$$

式中：$S_{顆粒}$——顆粒的表面积；

$S_{球}$——与顆粒同体积球体的表面积。

各种不同形状顆粒的球形系数 x 值列于表 2 內。

球 形 系 数 值　　表2

形　　状	球　　形	类 球 形	多 角 形	长 条 形	扁 平 形
球 形 系 数 x	1.0	<1.0但>0.8	<0.8但>0.65	<0.65但>0.5	<0.5

某些矿粒的大概形状如下：

金刚石——类球形；黑鎢矿——长条形；石榴子石——类球形、多角形；金——长条形、扁平形；石英——多角形、长条形；錫石——多角形、长方形；黃鉄矿——类球形、多角形；方鉛矿——类球形、多角形；煤——多角形、长条形；鉻鉄矿——类球形、多角形；閃鋅矿——类球形、多角形；白鎢矿——长条形。

在重力选矿过程中，由于顆粒受到磨剝和折断，其粒度和形状均可能有一些改变。改变的結果是粒度变小和形状变得較規則。

在重力选矿过程中，用作选分介质的有水，空气，重液及悬浮液。水、空气和重液是均质介质，而悬浮液是由分散介质及悬浮于其中的固相顆粒所組成，所以是两相的非均质介质。

对于重力选矿过程有影响的介质性质是密度和粘度，此外非均质介质的稳定性对重选过程亦有一定的影响。

介质的密度以单位体积介质的质量表示(克/厘米^3)，介质的重度則以单位体积介质的重量表示(达因/厘米^3)。

由于水的膨脹系数及压縮性均甚小，所以在重力选矿过程中认为水的密度为一定值。在所有計算中均令水的密度为 1 克/厘米^3。

空气的密度随压力及温度的变化而有很大变化。在任何压力和任何温度下的空气密度可由气体方程式决定，即：

$$PU=RT \qquad (5)$$

式中：p——絕对压强；

U——空气的比容（单位重量的体积）；

R——气体常数；

需要全本请访问 www.ertongbook.com

T——絕对温度。

空气在温度 10—20 °C 和一个大气压下密度为 0.00125 克/厘米³。

重液的密度是各不相同的，可用比重瓶或比重計測定其比重。

悬浮液的密度取决于悬浮质（固相）和分散介质（液相）的密度，以及固相的容积濃度。悬浮液的密度可用下式表示：

$$\Delta_c = \lambda(\delta - \Delta) + \Delta \qquad (6)$$

式中：λ——悬浮质（固相）的容积濃度，即单位体积悬浮液內固相所占的体积分数，以小数表示；

δ——悬浮质的密度；

Δ——分散介质的密度。

粘度是实际流体的物理性质之一，表示流体运动时的內摩擦力。介质的粘度可用粘滯系数表示，其意义为使相距单位距离的二流体层在单位时間內有单位距离的相对移动所需施加的外力的大小（克/厘米·秒）。

均质介质——水、空气和重液的粘滯系数决定于它們的分子构造，在常温下是一个不变的物理量。当温度改变时，介质的粘滯系数也随之改变。

在 20 °C 时，水的粘滯系数为 0.01克/厘米·秒（泊），空气的粘滯系数为 0.00018 泊。当温度升高 1 °C 时，水的粘滯系数降低 2%，而空气的則升高 0.25%。

均质介质的粘滯系数可根据一定量的介质，流出毛細管所离的时間来測定。

悬浮液的粘滯系数与悬浮质的粒度、形状及悬浮液的密度有关。其測定方法見第六章 §2（第 11 頁）。

第二章　物体在介质中的沉降

矿粒在介质中的沉降，是重力选矿的基本行为。比重及粒度不同的矿粒，将根据它們的沉降速度不同而达到分离。

§1. 重力和阻力。自由沉降与干涉沉降

在眞空中，所有物体不論大小、形状及比重如何，都以相同的速度落下：

$$V=\sqrt{2gh} \tag{7}$$

式中：V——物体落下速度；

g——重力加速度；

h——通过的路程。

但在介质中，物体的沉降，将因受到介质的浮力及各种外加阻力而发生变化。

物体在介質中的重力　重力就是地心引力，在重力場中的物体都受到重力或地心引力的作用。作用在物体单位质量上的重力，称为重力場强度，也就是重力加速度 g（981厘米/秒²）。重力加速度在数值上及方向上是不变的，并和重力方向一致。

物体在介质中所受的重力，就是它在介质（水、空气、重介质等）中的重量。根据阿基米德原理，物体在介质中的重量，等于該物体在眞空中的絕对重量減去同体积的介质的重量：

$$G_0=G-P=V\delta g-V\Delta g=V(\delta-\Delta)g=V\delta\frac{\delta-\Delta}{\delta}g=mg。 \tag{8}$$

式中：G——物体在眞空中的絕对重量；

G_0——物体在介质中的重量；

P——介质的浮力；

V——物体的体积；

δ——物体的密度；

Δ——介质的密度；

g_0——物体在介质中的重力加速度，等于$\frac{\delta-\Delta}{\delta}g$；

m——物体的质量。

由式 8 可知，物体在介质中的重量等于其质量 m 与其在介质中的重力加速度 g_0 的乘积。g_0 在数值上及方向上都是不定的，它随物体的密度 δ 及介质的密度 Δ 而变，但与物体的粒度无关。

当 $\delta>\Delta$ 时，g_0 为正值，方向与 g 相同，物体将在介质中下沉。

当 $\delta=\Delta$ 时，g_0 等于零，物体将在介质中悬浮。

当 $\delta<\Delta$ 时，g_0 为负值，方向与 g 相反，物体将在介质中上浮。

在同一介质中，若 $\delta_1<\delta_2$，则 $g_{01}<g_{02}$，且

$$g_{0_2}-g_{0_1}=\frac{\delta_2-\Delta}{\delta_2}g-\frac{\delta_1-\Delta}{\delta_1}g=\Delta\left(\frac{1}{\delta_1}-\frac{1}{\delta_2}\right)g \qquad (9)$$

由式9可知，两种密度不同的物体，在介质中的重力加速度之差，随介质密度的增大而增大，所以，在重力选矿过程中，分选效率一般随介质密度增大而提高（以介质密度 Δ 小于大比重矿粒的密度 δ_2 值为限）。

物体在介質中运动时所受的阻力 物体在介质中运动时，不仅受到介质的浮力的作用，而且还受到由于介质的粘性及慣性所引起的阻碍物体运动的力的作用。这些力是一个空間力系，其合力的方向一般与物体的运动方向成斜交，而在与物体运动方向相反的分力，就称为介质給予在其中运动着的物体的阻力。

当物体在实际（粘性）液体（介质）中运动时，在物体的表面即形成一层极薄的介质层，称为边界层。在边界层內，介质的速度梯度很大，由零激增至与外层介质流速相等。因此在任何情况下，边界层內介质的內摩擦力是不可忽略的。另一方面，当外层的介质流速发生变化时，根据伯努里方程式，也将发生相应的压强的变化。如果介质流的速度沿其流动的方向逐渐减小，則其压强将沿此方向逐渐增大，即产生压强差。这时，边界层內的流体，除了要克服自身的內摩擦力外，还要克服与其运动方向相反的，由此压强差所产生的阻力，因此边界层內流体的流动速度迅速減小，以至減小到零，而在压强差所产生的阻力的继續作用下，将会改变原来的流动方向，产生倒流，并形成渦旋。由此可見，边界层的性质是很复杂的，同时对物体运动时所受阻力的大小及形式有很大的影响。

当物体的体积很小，运动速度很慢及物体的形状便于介质流过其表面时，介质呈层流状态（图1A），平滑地流过物体表面，沒有明显的速度变化。这时可以认为整个物体为介质边界层所包圍，所以不考虑物体自身的表面情况。而物体自身的动能主要用来克服由于介质粘性所引起的切向摩擦力，这种切向摩擦力就称为介质的摩擦阻力或粘性阻力。

物体在介质中运动时，不断地給予周圍介质以作用力，从而改变了介质的流动速度。物体的体积越大，运动速度越快，这种作用則越显著。当物体以較快的速度在介质中沉降时，其周圍的介质由于自身的慣性，将落后于物体的运动，前面的介质流速将大于后面的，即产生了速度差，因而引起了介质的压强变化，在物体尾部的压强将大于物体的侧面压强，从而使物体后部的边界层內的介质，受到了由于压强差所引起的阻力的作用，产生渦旋（图1B）。介质呈紊流状态。渦旋的形成，消耗了大量的能量，使物体后面的压力小于前面的，形成压力差。这时，物体則受到周圍介质作用在它上面的压力，此压力的合力在与物体运动方向相反的分力即称为介质的慣性阻力。慣性阻力在很大程度上决定于物体的形状，因此又称为形状阻力。

物体在介质中运动时，这两种阻力实际上同时发生作用，只是在不同的情况下，所占的比例不同而已。而比例的大小，不仅取决于物体的运动速度，尺寸及形状，并且还与其运动时的取向有关。

物群在器壁所划定的介质空間內运动时，除受介质阻力外，同时也受到由器壁及物体之間的相互摩擦及碰撞等所引起的机械阻力。机械阻力主要与物体的比表面、表面状

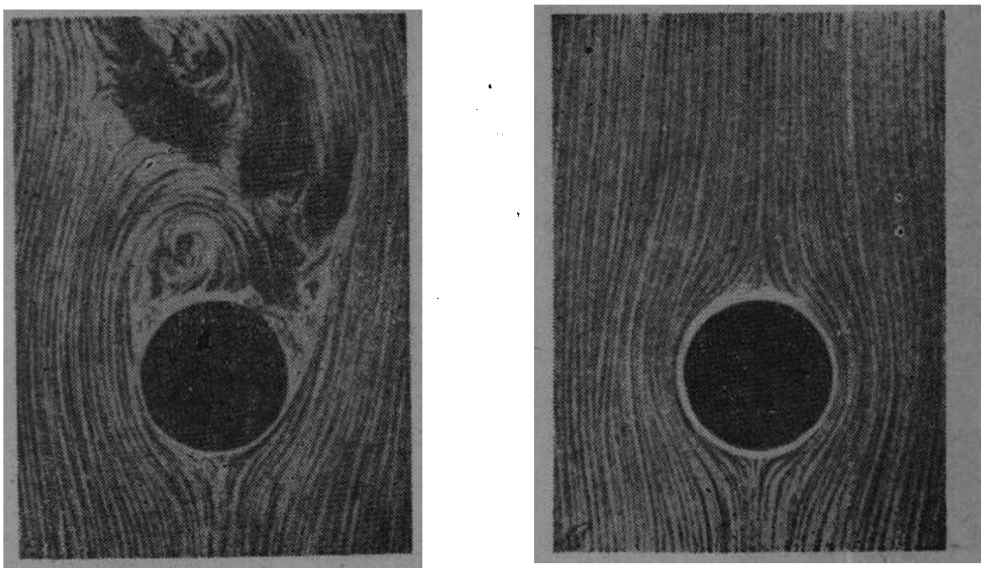

图 1　介质绕流物体时的状态

B—层流状态；　　A—紊流状态

态、彼此间的运动方向及速度等有关。由于相当复杂，至今尚未能确立精确的計算公式。

綜合以上关于介质阻力的分析，可知在一般情况下，介质阻力与下述諸因素有关，即：

$$R=f(d.S.\Delta.\mu)$$

式中：R——介质阻力；

d——物体的綫性尺寸；

Δ——介质的密度；

μ——介质的粘滞系数。

为了求知此函数的具体的数学关系，可以应用著名的 π 定律。当以 d,Δ,V 为基本量时，可得。

$$\pi=f(1,1,1,\pi_1)$$

式中：

$$\pi=\frac{R}{V^x\Delta^y d^z} \tag{10}$$

$$\pi_1=\frac{\mu}{V^{x_1}\Delta^{y_1}d^{z_1}} \tag{11}$$

根据因次分析，式 10 应为：

$$[R]=[V]^x[\Delta]^y[d]^z$$

或　　$$[M\cdot L\cdot T^{-2}]^1=[LT^{-1}]^x[ML^{-3}]^y[L]^z$$

因而　　$$y=1\quad y-3y+x=1\quad x=2;$$

所以　　$$z=2。$$

式 11 应为：

$$[\mu]=[V]^{x_1}[\Delta]^{y_1}[d^{z_1}]$$

或　　$$[ML^{-1}T^{-1}]^1=[LT^{-1}]^{x_1}[ML^{-3}]^{y_1}[L]^{z_1}$$

因而　　$$y_1=1、\ x_1=1、\ -1=x_1-3y_1+z_1;$$

所以 $$z_1=1。$$

因此得： $$\frac{R}{V^2d^2\Delta}=f\left(\frac{\mu}{Vd\Delta}\right) \tag{12}$$

式中：$\frac{\mu}{Vd\Delta}=\frac{1}{\mathrm{Re}}$ 或 $\mathrm{Re}=\frac{Vd\Delta}{\mu}$，而 Re 是雷諾数，是一个无因次的，表明介质繞过物体时的流态的参数。雷諾数大于某临界值时，表示紊流状态，小于某临界质时，表示层流状态，介于二值之間則为过渡状态。对于某既定介质，其密度 Δ 及粘滞系数 μ 的值一定，雷諾数的大小取决于物体的尺寸及其运动速度。

令式(12)中 $$\frac{R}{d^2V^2\Delta}=\psi$$

即 $$R=\psi d^2V^2\Delta \tag{13}$$

式中 ψ 称为阻力系数，而式 13 即为介质阻力的一般公式。

于是 $\frac{R}{d^2V^2\Delta}=f\left(\frac{\mu}{dV\Delta}\right)$ 式則可改写为：

$$\psi=f(Re)$$

由此可知阻力系数 ψ 是雷諾数 Re 的函数，因此也是表明物体运动状态的一个无因次参数。

阻力系数 ψ 与雷諾数 Re 之間的关系，已有許多学者进行过大量的研究。里莱在不同的介质中用不同种类的各种直徑的球体进行了自由沉降的試驗，并且把試驗的数据，都画在以 $\lg\psi$ 为纵座标，lgRe 为横座标的座标紙上，发現它們最終都归結到一条曲綫上(图 2)，从而构成了著名的里莱曲綫 (Re 由 1×10^{-3} 到 1×10^{6})。这个事实一方面表明了在 ψ 和 Re 的式子中，正确的考虑了影响球体自由沉降速度的一切主要因素；另一方面也表明了各种球体都遵循同一的自由沉降規律，这种客观規律性就决定了球体在自由沉降时，它們的阻力系数 ψ 与雷諾数 Re 都有曲綫所示的客观关系。

曲綫表明，阻力系数 ψ 是随着雷諾数 Re 的增大而减小。在 $\mathrm{Re}=2\times10^{5}$ 附近，阻力系数 ψ 值驟然降低，这种現象只有在高度紊流时才发生，在重力选矿中是遇不到的。曲綫的其他部分是平滑而連續的，表明在紊流与层流之間并无急剧变化，而是逐渐过渡的。

自由沉降与干涉沉降 物体在介质中的沉降可分为两种形式，即自由沉降与干涉沉降。严格地說，单个物体在无限的介质（水、空气、重液）空間內的沉降才是眞正的自由沉降，这时，物体的沉降只受到介质阻力。但在实际上，在有限介质空間內，当固体容积濃度很小时，各顆粒之間既不直接，也不通过介质来严重阻碍彼此的沉降时，也可視为自由沉降。物体的自由沉降速度，与其本身及介质的性质有关。比重相同、尺寸大的物体，自由沉降速度必較大。

干涉沉降是物群在有限介质空間中的沉降，而单个的物体在有限介质空間的沉降为这种沉降的一种特殊形式。干涉沉降时，有限空間的器壁及周圍的物体，阻碍着各个物体的沉降，它們之間的摩擦及撞击所产生的机械阻力則不可忽略。每个物体与周圍的物体之間的間隙大小，显著地影响着該物体的干涉沉降速度。因而介质中固体的容积濃度，則决定着物体沉降的干涉程度，固体容积濃度越大，干涉程度就越强。反之，当容积濃度降低至某临界值时，則可由干涉沉降形式轉变为自由沉降形式。区分干涉沉降及自由

沉降的容积濃度值，根据物体的形状，表面性质等而定。一般，当各物体最大截面积之和小于所在介质横断面积的3%时，则必为自由沉降。

§2. 物体的自由沉降

物体的自由沉降，可分为在静止介质中的沉降及在运动介质中的沉降两种。

球体在静止介質中的沉降 球体在静止介质中沉降时，作用于球体上有两种力，即球体在介质中的重力 G_0 及介质作用于球体的阻力 R_0 当球体的密度 δ 大于介质密度 Δ 时，g_0 为正值，方向与重力一致，此时球体下沉。

球体在介质中的重力为：

$$G_0=\frac{\pi}{6}d^3(\delta-\Delta)g \text{ 达因} \tag{14}$$

式中：d——球体的直徑，厘米。

当球体开始下沉后，立即与介质間产生相对运动，从而受到介质阻力，其值为：

$$R=\psi d^2V^2\Delta, \text{ 达因} \tag{13}$$

因此，球体静止介质中的运动方程式为：

$$m\frac{dV}{dt}=G_0-R=\frac{\pi}{6}d^3(\delta-\Delta)g-\psi d^2V^2\Delta,$$

以 $m=\frac{\pi}{6}d^3\delta$ 代入上式得：

$$\frac{\pi}{6}d^3\cdot\delta\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{6}d^3(\delta-\Delta)g-\psi d^2V^2\Delta$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\delta-\Delta}{\delta}g-\frac{6\psi V^2\Delta}{\pi d\cdot\delta} \text{ 厘米/秒}^2 \tag{15}$$

由式15可知，球体运动的加速度是下列两个加速度之差：即物体在介质中的重力加速度 $\frac{\delta-\Delta}{\delta}g=g_0$ 及由阻力所产生的所謂阻力加速度 a：

$$a=\frac{6\psi V^2\Delta}{\pi d\cdot\delta} \tag{16}$$

即

$$\frac{dV}{dt}=g_0-a。$$

g_0 的大小仅与球体及介质的密度有关，而与球体尺寸及运动速度无关。因此，在整个沉降过程中，g_0 是常数。而阻力加速度 a 則除与球体及介质的密度有关外，还随球体的运动速度增大而加大。在球体开始下沉时，$V=0$，故阻力加速度 $a=0$、阻力 $R=0$。这时球体的运动加速度 $\frac{dV}{dt}$ 最大，且 $\frac{dV}{dt}=g_0$，因此 g_0 是球体在介质中由静止开始沉降的加速度，所以又称为球体沉降的初加速度。而后，球体的沉降速度 V 逐渐增大，阻力加速度 a 也随之漸增，从而使球体运动的加速度 $\frac{dV}{dt}$ 逐漸減小，当阻力加速度 a 值达到与 g_0 值相等，或阻力与重力相等时，$\frac{dV}{dt}=0$，作用于球体上的力达到平衡，球体失去加速度而以等速下沉，这时的速度 V 值达到最大，称为自由沉降末速，并以 V_0 表示。

V_0 值可由下述关系求出：

需要全本请访问 www.ertongbook.com

即 $R=G_0$ 时

$$\frac{dV}{dt}=g_0-a=\frac{\delta-\Delta}{\delta}g-\frac{6\psi V_0^2\Delta}{\pi d\delta}=0$$

所以

$$\frac{6\psi V_0\Delta}{\pi d\delta}=\frac{\delta-\Delta}{\delta}g。$$

故

$$V_0=\sqrt{\frac{\pi d(\delta-\Delta)}{6\psi\Delta}g}\ \text{厘米/秒} \tag{17}$$

式 17 即为計算球体在靜止介质中沉降末速 V_0 的一般公式。对于既定球体及介质，式中的 $d_1\Delta$ 及 δ 为已知，但阻力系数 ψ 为未知，而且根据本章 §1 的分析，阻力系数 $\psi=f(\mathrm{Re})$，而雷諾数 $\mathrm{Re}\left(\frac{dV\Delta}{\mu}\right)$ 又为速度的函数，因此这个公式并不能用来实际求算末速 V_0。

为了解决沉降末速的問題，許多学者做了大量的工作，其中以苏联学者里亚申科的成就最大。1935 年，里亚申科根据下述关系提出了一个新的无因次参数 $\mathrm{Re}^2\psi$（里亚申科参数）利用 $\mathrm{Re}^2\psi$ 参数，解决了求解 V_0 的問題。

已知：

$$\mathrm{Re}=\frac{dV\Delta}{\mu};\qquad R=\psi d^2V^2\Delta$$

当 $R=G_0$ 时：

$$G_0=\psi d^2V^2\Delta \quad 或 \quad \psi=\frac{G_0}{d^2V^2\Delta}$$

$$\mathrm{Re}^2\psi=\frac{d^2V^2\Delta^2}{\mu^2}\cdot\frac{G_0}{d^2V^2\Delta}=\frac{G_0\cdot\Delta}{\mu^2} \tag{18}$$

$\mathrm{Re}^2\psi$ 为一无因次数，且与沉降速度 V 无关，已知球体的 G_0，及介质的密度 Δ 及粘滞系数 μ 时，即可求知 $\mathrm{Re}^2\psi$ 的值。里亚申科根据里萊的 $\mathrm{Re}-\psi$ 曲綫，繪制了 $lg(\mathrm{Re}^2\psi)=f(lg\mathrm{Re})$ 的曲綫（图 3），利用式 18 及 $lg\psi=f(lg\mathrm{Re})$ 与 $lg(Re^2\psi)=f(lg\,\mathrm{Re})$ 两曲綫，通过如下步驟求得 V_0：

1）用 G_0、μ、Δ 算出 $\mathrm{Re}^2\psi$ 值；

2）根据算出的 $\mathrm{Re}^2\psi$ 值，利用 $lg(\mathrm{Re}^2\psi)=flg(\mathrm{Re})$ 曲綫，找出相应的 Re 值；

3）根据找出的 Re 值，利用 $\mathrm{Re}=\frac{dU_0\Delta}{\mu}$ 式，算出 V_0；或者利用 $lg\psi=flg\,(\mathrm{Re})$ 曲綫求出 ψ，代入式 17，求算 V_0。

如果根据实驗已經求出 V_0 值，則还可用里亚申科的方法倒算已知密度的球体的直徑，或知道球体直徑求算球体的密度。

应用里亚申科的方法求算沉降末速是最通用的方法。在此以前，曾有牛頓、雷廷智、斯托克斯等人，提出了用于个别情况的阻力及末速公式。

牛頓把介质看作是沒有內摩擦（或沒有粘性）的理想液体，即不考虑介质的摩擦阻力，同时完全根据彈性碰撞定律，在不考虑物体周圍的液体所形成的复杂的渦流的情况下，引导出牛頓阻力定律，即：

$$R_N=F\,V^2\Delta \tag{19}$$

式中：F——物体在垂直运动方向的截面积。

雷廷智根据牛頓定律导出球体的阻力公式，称为牛頓—雷廷智阻力公式：

$$R_{N-R}=\frac{\pi}{8}d^2V^2\Delta \tag{20}$$

式20只考虑了慣性阻力，故又称慣性阻力公式，因为这一公式只考虑了介质阻力的一部分，因此有极大的局限性，而且試驗的結果总与計算的結果有較大的差異，表明推导公式的出发点是不确切的。

实驗証明，式20中的$\frac{\pi}{8}$应該改为$\frac{\pi}{16}$，即$R_{N-R}=\frac{\pi}{16}d^2V^2\Delta$，才与实际相符。

整个說来，牛頓—雷廷智阻力公式仅适用于大尺寸球体的沉降。利用修正后的牛頓—雷廷智阻力公式求算自由沉降末速V_0时，应为：

$$R_{N-R}=G_0 \text{ 即 } \frac{\pi}{16}d^2V_0^2\Delta=\frac{\pi}{6}d^3(\delta-\Delta)g,$$

則得：
$$V_0=\sqrt{\frac{8}{3}d\frac{\delta-\Delta}{\Delta}g}$$

或
$$V_0=51.1\sqrt{\frac{d(\delta-\Delta)}{\Delta}}\text{厘米/秒} \tag{21}$$

而斯托克斯分析了在粘性介质（实际介质）中以很小的速度沉降的小球体的运动情况，用解析方法导出了忽略慣性力，仅考虑摩擦力的阻力公式，即：

$$R_S=3\pi\mu dV \tag{22}$$

式22表明，摩擦阻力R_S与速度一次方成正比。試驗証明，对于小于0.1～0.2毫米的球体，此公式是有效的。

变換式22并与阻力通式比較，得知：

$$\mathrm{Rs}=3\pi\mu dV=3\pi d^2V^2\Delta\frac{\mu}{dv\Delta}=\frac{3\pi}{Re}d^2V^2\Delta$$

所以
$$\text{阻力系数 }\psi=\frac{3\pi}{\mathrm{Re}}$$

即摩擦阻力系数ψ是雷諾数的函数。

当球体达等速次降时，$R_S=G_0$，即$3\pi\mu dV=\frac{\pi}{6}d^3(\delta-\Delta)g$。

則：
$$V_0=54.5d^2\frac{(\delta-\Delta)}{\mu} \tag{23}$$

阿兰在实驗的基础上，提出了适用于較大的中間尺寸球体的阻力公式：

$$R_A=\frac{5\pi}{4\sqrt{\mathrm{Re}}}d^2V^2\Delta \tag{24}$$

即阻力系数$\psi=\frac{5\pi}{4\sqrt{\mathrm{Re}}}$。

当球体达等速次降时，$R_A=G$。

由此得：
$$V_0=25.8\,d\sqrt[3]{\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)^2\cdot\frac{\Delta}{\mu}}$$

卡薩特金也在实驗基础上，提出了适用于較小的中間尺寸球体的阻力公式：

$$R_K=\frac{7.3}{Re^{0.6}}d^2V^2\Delta \tag{26}$$

即阻力系数
$$\psi=\frac{7.3}{Re^{0.6}}。$$

当球体达等速沉降时；$R_K=G$。

由此得：
$$V_0=19.5d^{1.1\,1.4}\sqrt{\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{0.6}}} \tag{27}$$

上述四个沉降末速公式，都只适用于特定的条件。根据具有連續性的里萊曲綫可知，在有雷諾数 $Re<1$ 时，$lg\psi$ 与 $lgRe$ 呈直綫关系，表示 $\psi Re=$常数。在斯托克斯阻力公式中 $\psi=\frac{3\pi}{Re}$，则 $\psi Re=3\pi$，換句話說，斯托克斯公式只适用于 $Re<1$ 的情况下。在雷諾数 $Re=500$—10^4 时，曲綫平行于 $\lg Re$ 軸，表示 $\psi=$常数，是与牛頓—雷廷智阻力公式中的 ψ 值相应的，因此証明牛頓—雷廷智阻力公式只运用于 $Re=500$—10^4 的范圍內。曲綫在 $Re=1-500$ 范圍內呈曲綫，分别与阿兰及卡薩特金阻力公式相适应，卡薩特金公式的应用范圍为 $Re=2-25$，阿兰公式为 $Re=25-500$。

根据上述分析，一方面証明了四个个别公式的正确性，同时也确定了它們的适用范圍，只有在确定該球体沉降的雷諾数 Re 以后，才能确定应选用的个别沉降末速公式，以計算沉降末速。

綜合上述四式，得下列关系：

牛頓公式：
$$V_0=K_N\sqrt{d\frac{\delta-\Delta}{\Delta}}=K_K d^{0.5}\cdot\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)^{0.5}\cdot\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{0}$$

阿兰公式：
$$V_0=K_A d\sqrt[3]{\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)^2\frac{\Delta}{\mu}}=K_A d^{1.0}\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)^{0.7}\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{0.3}$$

卡薩特金公式：
$$V_0=K_K d^{1.1\,1.4}\sqrt{\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)\cdot\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{0.6}}=K_K d^{1.1}\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)^{0.7}\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{0.4}$$

斯托克斯公式：
$$V_0=K_S\cdot d^2\frac{\delta-\Delta}{\mu}=K_S\cdot d^2\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)^{1.0}\cdot\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{1.0}$$

写为通式形式：
$$V_0=K\cdot d^x\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)^y\cdot\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^z \tag{28}$$

式中 K、x、y、z 之值及各公式的适用范圍，可見表 3。表 3 表明，随着 Re 值減小，各指数都增大。

个别公式中的 K、x、y、z 值　　表 3

公式名称	K 值	x 值	y 值	z 值	适应范围
牛頓-雷廷智	51.1	0.5	0.5	0	$Re=500-10^4$
阿兰	25.8	1	0.7	0.3	$Re=25-500$
卡薩特金	19.5	1.1	0.7	0.4	$Re=2-25$
斯托克斯	54.5	2	1.0	1.0	$Re<1$

实际上，已如前述，雷諾数 Re 是沉降速度的函数。因此，以雷諾数值說明个别公式的应用范圍，还是不足的。但可利用表述的极限 Re 值，求出适用于各个别公式的球的极限（临界）直徑 $d_{,\,кр}$，它們的关系可用下式表示：

$$Re=\frac{dV_0\Delta}{\mu}\qquad V_0=\frac{Re\mu}{d\Delta}$$

但
$$V_0=Kd^x\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)^y\cdot\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^z;$$

所以 $$\frac{\mathrm{Re}\mu}{d\Delta}=Kd^{x}\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)^{y}\cdot\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{z}.$$

故 $$d_{кр}=\left(\frac{\mathrm{Re}}{K}\right)^{\frac{1}{x+1}}\cdot\left(\frac{\mu^{z+1}}{(\delta-\Delta)^{y}\cdot\Delta^{z-y+1}}\right)^{\frac{1}{x+1}} \tag{29}$$

将表3的各数值代入式29得到：

$\mathrm{Re}=500-10^{4}$ 时，按 $K_N=51.5$ 計

$$d_{кр}=4.58\sqrt[3]{\frac{\mu^{2}}{(\delta-\Delta)\Delta}}-156.5\sqrt[3]{\frac{\mu^{2}}{(\delta-\Delta)\Delta}}(\text{厘米}) \tag{30}$$

$\mathrm{Re}=25-500$ 时，按 $K_A=25.8$ 計：

$$d_{кр}=\sqrt[3]{\frac{\mu^{2}}{(\delta-\Delta)\Delta}}-4.5\sqrt[3]{\frac{\mu^{2}}{(\delta-\Delta)\Delta}}(\text{厘米}) \tag{31}$$

$\mathrm{Re}=2-25$ 时，按 $K_K=19.5$ 計

$$d_{кр}=0.3\sqrt[3]{\frac{\mu^{2}}{(\delta-\Delta)\Delta}}-\sqrt[3]{\frac{\mu^{2}}{(\delta-\Delta)\Delta}}(\text{厘米}) \tag{32}$$

$\mathrm{Re}<1$ 时，按 $K_S=54.5$ 計：

$$d_{кр}<0.3\sqrt[3]{\frac{\mu^{2}}{(\delta-\Delta)\Delta}}(\text{厘米}) \tag{33}$$

綜合前述各式，知 $d_{кр}=a\sqrt[3]{\frac{\mu^{2}}{(\delta-\Delta)\Delta}}$，式中 a 是变值，根据：

$$\mathrm{Re}^{2}\psi=\frac{G_0\Delta}{\mu^{2}};\quad G_0=\frac{\pi}{6}d^{3}(\delta-\Delta)g,$$

得 $$d=\sqrt[3]{\frac{6}{\pi g}\mathrm{Re}^{2}\psi}\cdot\sqrt[3]{\frac{\mu^{2}}{(\delta-\Delta)\Delta}}$$

所以得 $$a=\sqrt[3]{\frac{6}{\pi g}\mathrm{Re}^{2}\psi}=0.125\sqrt[3]{\mathrm{Re}^{2}\psi} \tag{34}$$

根据算出的 $\mathrm{Re}^{2}\psi$ 值，决定 a 值后，即可确定应选用的个别公式，因此，在选用个别公式时，仍須应用里亚申科参数 $\mathrm{Re}^{2}\psi$。

举例：确定直徑 $d=2$ 厘米，密度 $\delta=1.4$ 克/厘米³ 的球体在水中的自由沉降末速 V_0。

1）用里亚申科的方法：

$$\mathrm{Re}^{2}\psi=\frac{G_0\cdot\Delta}{\mu^{2}},$$

$$G_0=\frac{\pi}{6}d^{3}(\delta-\Delta)g=\frac{\pi}{6}\times2^{3}\times(1.4-1)\times981=1642,848\ \text{达因}.$$

取水的粘滞系数 $\mu=0.01$ 泊，則

$$\mathrm{Re}^{2}\psi=\frac{1642,848\times1}{0.01^{2}}=16428480$$

由图3查知 $\mathrm{Re}=10100$，

因为 $$\mathrm{Re}=\frac{V_0d\Delta}{\mu}$$

則 $$V_0=\frac{\mathrm{Re}\mu}{d\Delta}=\frac{10100\times0.01}{2\times1}=50.5\ \text{厘米/秒}.$$

2）用个别公式計算：

根据 34 式，已知 $Re^2\psi=16428480$，求得，

$a=31.8$；是屬于牛頓阻力公式范圍的，因此应选用 $V_0=K_N\sqrt{d\frac{\delta-\Delta}{\Delta}}$，取 $K_N=51.1$，

得 $$V_0=51.1\sqrt{2\times 0.4}=45.4 \text{ 厘米/秒},$$

两种方法的計算結果，基本上是一致的。

球体在靜止介质中达到自由沉降末速所需的时間也可由它的运动方程式 15 求出：

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\delta-\Delta}{\delta}g-\frac{6\psi V^2\Delta}{\pi d\delta},$$

則 $$dt=\frac{dV}{\frac{\delta-\Delta}{\delta}g-\frac{6\psi V^2\Delta}{\pi d\delta}}=\frac{\delta}{(\delta-\Delta)g}\frac{dV}{1-\frac{6\psi V^2\Delta}{\pi d(\delta-\Delta)g}}$$

而由式 8 及式 17 可知 $$\frac{\delta}{(\delta-\Delta)g}=\frac{1}{g_0},\quad \frac{6\psi\Delta}{\pi d(\delta-\Delta)g}=\frac{1}{V_0^2}$$

代入得： $$dt=\frac{1}{g_0}\frac{dV}{1-\frac{V^2}{V_0^2}}=\frac{V_0^2}{g_0}\cdot\frac{dV}{V_0^2-V^2},$$

积分得： $$t=\frac{V_0^2}{g_0}\int\frac{dV}{V_0^2-V^2}=\frac{V_0}{2g_0}\ln\frac{V_0+V}{V_0-V} \qquad (35)$$

当沉降速度 V 达 V_0 时，$V=V_0$，則 $t=\infty$，即球体在靜止介质中达沉降末速所需的时間是无穷大的，也就是說，实际上球体永远也达不到理論的沉降末速值，根据式 35 所繪的曲綫（图 4）也表明了这一点。

因此，通常采用球体的理論沉降末速 V_0 值的 0.99 作为实际沉降末速。达到实际沉降末速的时間为 t_0。

当 $V=0.99V_0$ 时，

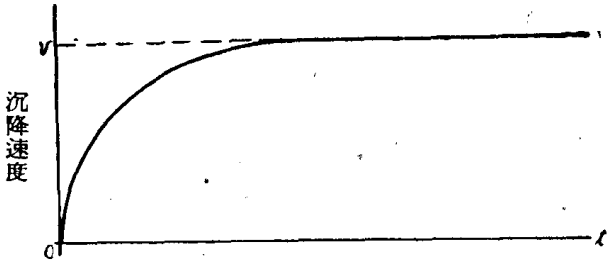

图 4　沉降曲綫

$$t=\frac{V_0}{2g_0}\ln\frac{1.99}{0.01}=2.65\frac{V_0}{g_0} \qquad (36)$$

式 36 表明，球体在靜止介质中达到实际沉降末速所需的时間是很短的。例如，$\delta=7.5$ 克/厘米^3 直徑为 1 毫米的球体在水中沉降时，經过 0.058 秒即达沉降末速，而同一尺寸、$\delta=2.65$ 克/厘米^3 的球体，則經过0.044秒即达沉降末速。公式还表明，球体的密度相同，t_0 值随其直徑增加而加大，而 V_0 相等的球体，則比重大的，达末速所需的时間短。

球体达到沉降末速所行經的距离可按

$$t=\frac{V_0}{2g_0}\ln\frac{V_0+V}{V_0-V}$$

令 $$K=\frac{\delta V_0}{2(\delta-\Delta)g}=\frac{V_0}{2g_0},$$

則 $$t=K\ln\frac{V_0+V}{V_0-V}$$

所以 $$e^{\frac{t}{K}}=\frac{V_0+V}{V_0-V},\qquad V=V_0\frac{e^{\frac{t}{K}}-1}{e^{\frac{t}{K}}+1};$$

而行徑距离 $$h=\int V dt,$$

所以 $$h=v_0\int\frac{e^{\frac{t}{K}}-1}{e^{\frac{t}{K}}+1}dt=\frac{V_0^2}{2g_0}\ln\frac{e^{\frac{gt}{V_0}}+e^{-\frac{gt}{V_0}}}{2}$$

当 $$t=t_0=2.65\frac{V_0}{g_0}\text{时},$$

$$h=\frac{V_0^2}{g_0}\ln\frac{e^{2.65}+e^{-2.65}}{2}=1.96\frac{V_0^2}{g_0}\simeq 2\frac{V_0^{2*}}{g_0}\qquad(37)$$

式37表明，达末速所行經的距离 h 与球体的直徑 d 及密度 δ 成正比，与介质密度 Δ 成反比。

矿粒（形状不規則物体、非球形物体）**在靜止介質中的自由沉降** 选矿过程所处理的矿粒，并不具有規則的球形。因此，所有上述公式，均不能十分完善的用来确定矿粒的沉降速度。矿粒的形状与球形的差别愈大偏差也愈大。根据第一章把不規則物体（包括矿粒）按球形系数分为四类，即类球形、多角形、长条形及扁平形。

在各种形状的物体中，以球体的比表面最小，而且一般說来，比其他形状的（流綫形的除外）物体更便于介质在其周圍流过。因此，矿粒在介质中沉降时所受的阻力，一般較球体大，而沉降末速 V_0 則較小。

形状不規則的物体，如矿粒在重力作用下，在介质中力图按照所謂“舵向規則”沉降，即力图取其所受介质阻力最小的方向沉降，此所謂介质阻力最小的方向，不但与矿粒的形状有关，而且还与它的运动速度有关，例如薄片状物体，在低速沉降时，由于介质阻力以摩擦阻力为主，因此薄片以所受慣性阻力最小的方向，即以垂直于板面法綫的方向下沉。高速沉降时，則因慣性阻力占优势，故薄片以所受摩擦阻力最小的方向，即以順着板面法綫的方向下沉。由于矿粒的形状不規則，在介质中，它的各个方向所受的

---

* 式37的推导程序如下：

令 $\frac{t}{K}=y$，則 $dt=Kdy$，代入 h 式

$$h=V_0\cdot K\int\frac{e^y-1}{e^y+1}\cdot dy$$

再令 $e^y=z$

則 $dz=e^y dy$，$dy=\frac{dz}{e^y}=\frac{dz}{z}$，

代入得：$$h=K\cdot V_0\int\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{dz}{z}=KV_0\int\frac{dz}{z+1}-\frac{dz}{z(z+1)}=KV_0\left[\ln(z+1)+\ln\frac{z+1}{z}+C\right]$$

$$=KV_0\left[\ln\frac{(z+1)^2}{z}+C\right]=KV_0\left[\ln\left(z+2+\frac{1}{z}\right)+C\right]$$

将 x、y 值代入，复得：

$$h=KV_0\left[\ln\left(e^{\frac{t}{K}}+2+e^{-\frac{t}{K}}\right)+C\right]$$

当 $t=0$、$h=0$ 时，$C=-\ln 4$，

則 $$h=KV_0\ln\frac{e^{\frac{t}{K}}+2+e^{-\frac{t}{K}}}{4}=\frac{V_0^2}{2g_0}\ln\cdot\frac{e^{\frac{2gt}{V_0}}+2+e^{\frac{-2gt}{V_0}}}{4}=\frac{V_0}{2g_0}\ln\left(\frac{e^{\frac{gt}{V_0}}+e^{-\frac{gt}{V_0}}}{2}\right)^2$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com