3

进　　展

数 学 进 展

图 论

·颜基义 堵丁柱 刘彦佩

自40年代由 W. T. Tutte 等创立一种理论解决拼方问题以来，至今图论已经成为数学中发展最活跃的分支之一。几年前曾有人统计，那时一年中发表的图论方面的文章，比从 1736 年 Euler解决 Königsberg 问题到 1936年D. König 出版图论的第一本专著这200年间发表文章之总和还要多。就我国而论，早在50年代中，吴文俊就给出过关于图的平面性的判准[1]。同时，我国粮食调运部门发现一种解运输问题的图上作业法。不久，由数学工作者给出了一个严格的数学证明[2,3]。在此基础上，出现了"中国邮递员问题"[4]。接着，华罗庚等从麦场设置中发现一种求图的中心的方法[5]。60年代中，还出现确定图的最小树形图的工作[6]。然而，直到70年代末，图论才开始引起国内数学界广泛的重视。现在，每年发表的文章仅全国性学术刊物上就有几十篇。到目前为止，我国解决的文献中的公开问题和猜想也有数十个之多。现着重于笔者所了解的范围予以介绍。

树、树形图、似树图

树是图中最简单但也最基本的。确定一个图的所有支撑树在网络分析中有根本的重要性。由此导致了对一个图的树图的研究。已经知道，任何树图均有 Hamilton 圈。对一个图上的所有树形图、所有最小树等，也可以考虑同样的问题。林诒勋和张福基对于最小树图也得到了Hamilton 性等与树图相仿的结果[7]。刘桂真证明了一个图 G 的树图的连通度等于 G 的圈秩之2倍[8]。为了列出所有的树，通常用一个自然数的序列表示一个树。刘家壮研究了有序树的路长序列[9]。郑汉鼎研究了有根单圈图的自然序列[10]。王振宇研究了有序树的一些性质[11]以及其中的一些计数问题[12]。之后，刘家壮和柳柏濂分别研究了各种树与某些自然数的对应关系[13]和给定悬挂点数的有向树和自由树之计数[14]。若将树视为一类特殊的地图，有根树地图的依节点按次(或度)剖分的计数在文献中已由多人给出。刘彦佩则用 Lagrange 反演解一个函数方程，从而较简单地得到这个公式；同时，还给出了诸如冬梅图、单圈图等似树地图的依节点剖分的计数公式[15]。将树的概念推广到 n-复形上，Dewdney 引进了 (m, n)-树，并且提出表征这种树的两个猜想。张天赐否定了这两个猜想，并且给出了比这些猜想弱的表征[16]。毛经中也给出了 (m,n)-树的一个充要条件[17]。

连通性

对于图的连通性的精深研究，当归功于W.T.Tutte，他的专著提供了多方面的论述[18]。影响较大的当推他的关于3-连通图的结果，由此导致对各种连通度的图的

·颜基义 中国科学技术大学研究生院教授。
堵丁柱 中国科学院应用数学研究所研究员。
刘彦佩 中国科学院应用数学研究所研究员。

构造性研究。遗憾的是，连通度大于4的图的构造问题至今仍未解决。目前，人们多研究各种极小连通图的构造。朱必文给出了极小2-连通图的构造方法[19]。对于有向图，张福基和郭晓峰给出了构造极小强连通图的方法[20]。与此相关，Erdös 等曾于1966年提出过一个猜想：任何有n个节点的2-边连通图均可为至多$n-1$个初等圈所覆盖[21]。这个猜想仅有部分的回答。朱必文证明对于极小2-边连通图只要$\left[\frac{n-1}{2}\right]$个初等圈就够了[19]。陶懋颀和沈韵秋证明了对平面的2-边连通图用$n-2$个初等圈就够了[22]。朱必文还给出了临界2-边连通图的一个构造准则[23]。刘桂真得到：在极小2-连通图中，支撑树的数目大于圈的数日[24]。张福基和陈荣新研究了极小2-边连通图到临界2-边连通图的转化，提供了一种递归结构[25]。田丰和张存铨给出了临界2-边连通图的最大可能的边数[26]。最近，徐俊明不但给出了任何临界h-边连通图的最大边数，而且得到了具有最大边数的这种图的极图结构[27]。另外，蔡茂诚研究了具有极大局部连通度的有向图的最大边数[28]；毛经中提供了极小h-边连通图次为h的节点数的一些下界[29]。关于k-临界h-连通图(简称(h, k)-图)，Slater于1977年曾提出一个猜想：如果$2k>h$，则完全图K_{h+1}是唯一的(h, k)-图。值得注意的是，最近，苏健基完全证明了这个猜想[30]。

对集、因子及因子分解

在因子理论方面， W. T. Tutte 做了奠基性的工作[31]。他首先给出了一个图存在1-因子(即完满对集)的一个简明刻划，而且他所用的交错链方法直到今天仍不减其效力。这一理论还被自然地发展到一般的因子以至因子分解上去。蔡茂诚于1983年得到了一个偶图有k个彼此无公共边、每个含有r条边的对集的一个充要条件，推广了一个偶图有1-因子分解的刻划[32]。郑茂林1987年证明了若一个无穷1-临界图只有有限个次为2的节点，则它必有有穷多个1-因子；作为一个推论，解决了Bry 1983年提出的一个公开问题[33]。接着，郑茂林又解决了Zaks 1971年提出的有关图的1-因子数估界的两个猜想[34]。Lovász于1972年曾猜测，对有穷2-临界图，当节点数充分大时，其1-因子数也充分大。但他本人只解决了平面的情形。郑茂林于1986年将它完全解决[35]。他同时还解决了 Bry 1983 年提出的一个公开问题：若记$f(G)$为图G中1-因子的个数，$f^*(t)=\inf\{f(G)\mid G$ 为t-连通、局部有限且有1-因子$\}$，$f(t)=\max\{k\mid$ 若G为有1-因子的t-连通图则G有k个不同的1-因子$\}$，则$f^*(t)=f(t)$。刘桂真讨论了在拟森复形[36]、(m,n)-树[37]以及强连通复形上的1-因子的表征[38]。于青林给出了星形因子的表征[39]。Harary 等1977年解决了K_n的同构因子分解之后，提出了与K_n有相近的对称性的关于完全等部多分图以及等部多分有向图的同构因子分解的猜想。不久这两个猜想都由王建方解决[40,41]。杨世辉还研究了完全三分图的同构因子分解[42]。另外，宁齐证明了具有唯一1-因子且边数最多的图的唯一性，并给出了一个有效判别[43]。

图中的路与圈

这方面的几乎所有研究都与判定一个图是否有 Hamilton 圈有关。对于一般的图，从 Ore 型条件[44]及其变种出发，考察它具有 Hamilton 圈的充分条件，直到今天仍不减其影响。对于闭包为完全图的情形，人们已经研究得相当多了。1984 年，范更华发现的一个 Ore 条件的变种，其闭包不是完全图[45]。Bondy提出的 Meta 猜想导致人们对泛圈性的注意[46]。田丰和施容华证明除 3 个类型的图外，范更华给出的条件将导致泛圈性[47]。刘彦佩对这种条件也作了些推广研究[48]。吕涛军给出了一个使闭包为完全图的条件，也给出了一个使偶图具有 Hamilton 圈的充分条件[49]。接着，任韩证明了除C_6外，他的这个条件将导致泛偶圈性[50]。关于正则图，朱永津、刘振宏和俞正光证明了Jackson提出的一个猜想[51]。不久，Bondy 等给出了一个简短的证明[52]。李浩引进3个类型的例外图，并推广和加强了这一结果[53]。施容华[54]、吴正声和刘一平[55]研究了无$K_{1,3}$作为导出子图的图的 Hamilton 性和泛圈性。最近，任韩发现一些新的 Hamilton 连通图、[5, n]-以及[6, n]-泛圈图[50]。关于图的联结数以及它与图的 Hamilton 性和泛圈性的关系，施容华取得了一系列的结果，其中有的是公开问题或猜想[56,57]。关于联结数的确定，王建方、田松林和刘九强给出了路或圈经过强卡氏积和张量积情形下的结果[58]。Saito 和田松林得到了边图和整图的联结数[59]。关于 Ore-k 型图，Win曾猜想在这种图中有$k+2$个互无公共边的1-因子。刘振宏证明了$k=2$的情形[60]。接着，吴正声进一步证明在 Ore-2 型图中有两个无公共边的 Hamilton 圈[61]。杨振启得到了图中过给定对集存在一个圈乃至 Hamilton 圈的一些条件[62]。施容华等证明了如果一个图中没有与$K_{1,3}$同胚的子图，则它的平方是泛圈的[63]，这就肯定了 Gould 等提出的一个猜想。最近，田丰和臧文安证明除$K_{m,n}$或Petersen 图外，最小次不小于m且阶不小于$2m+1$的2-连通图必含一圈，它具有至少$m(m-2)+1$条弦[64]，从而解决了由 Gupta 等提出的一个猜想。另外，施永兵还研究了圈长唯一的最大图的边数[65]，

以及唯一泛圈图[66]，证明只有7个唯一泛圈图。田永成和赵连昌[67]、田永成[68]还研究了1-坚韧图的周长以及1-坚韧图中的最长圈。

着色、色多项式及其他多项式

在这方面，国际上有两项令人振奋的成果。一个是Heawood 猜想的证明，经过近一个世纪的研究，于1968年由Ringel和Youngs宣告完成[69]。另一个就是1976年，Appel和Haken宣告借助电子计算机证明了四色定理[70]。当然，后者的纯理论性解决仍是一个悬而未决问题。色多项式的创始人和奠基人是Birkhoff[71]，他企图以这一理论解决四色问题，但未能成功。不过，由此引出了一系列的工作。我国在这方面几乎没有作出什么贡献。只有李慰萱和田丰给出了色多项式系数的界，并导出了外平面地图的色多项式[72]。洪渊研究了色多项式系数的一些有趣性质[73]。最近，有人也对图的全色数作了些开始性的研究[74,75]。关于边着色，多是基于Vizing定理研究图的依边色数的分类（C^1 和C^2），找出了一个图属于C^1或C^2类的一些充分条件[76]。另外，刘儒英由一类图的着色研究了素数子集的分类[77]。近些年来，对于色多项式唯一性的研究确有所增长。1985年，Whitehead 曾猜想 q-树的色多项式的唯一性，后由赵中云、李念祖和徐绍基给出了证明[78]。最近，董峰明给出一个简单的证明，并且证明了一些更为一般的图的色多项式的唯一性[79]。徐绍基还给出了图的二次σ-多项式的一个新的表征[80]。在色唯一性方面，黄济华讨论了唯一可3-边着色图的性质，否定了由Fiovini等和由Creenwell等提出的两个猜想[81]。郭知熠与李永洁讨论了圈并之补图的色唯一性[82]。Tutte的双色多项式的出现[83]，引出了对图上各种多项式的研究。李慰萱讨论了图的结构多项式[84]。张福基和林诒勋把图的多项式归纳为边覆盖多项式与节点覆盖多项式这两类，从而进行了更具一般性的研究[85]。

平面性、平面嵌入与平面分解

关于图的平面性的研究，其奠基者在国际数学界都享盛名，如Kuratowski、Whitney、MacLane 和W. T. Tutte[86]。我国著名数学家吴文俊在50年代中也对此作出过重要贡献[1]。20年之后，他才研究其算法实现，这一算法比国际流行的简单得多[87]，不过，其复杂性为$O(n^6)$。刘彦佩改进到$O(n^2)$[88]。事实上，刘彦佩把判定图的平面性的问题转化为在一个辅助图上求一个支撑树的问题。不过，这时辅助图的节点数与边数全是$O(n^2)$的量级。1986年，刘彦佩把辅助图的节点数降到$O(n)$[89]。接着，又研究了可使辅助图的边数降到$O(n)$的情形[90]。徐伟宣通过改进数据结构，设计出了一个$O(n\log n)$的算法[91]。孙晓荣将[90]中使辅助图边数降到$O(n)$的范围扩大，并在此范围内设计$O(n)$的算法[92]。经过大量计算，表明计算时间比当前国际上最好的算法明显减少，而且存储量并未增大。1987年，刘彦佩独立于所有已经建立的判准，创立一种新的判准，找出了在节点集上一种序关系下的7个平面性障碍，使得可以用$O(n)$的计算量得到一个不管是节点数还是边数均为$O(n)$的辅助图[93]；同时，也得到平面嵌入的$O(n)$量级[94]；进而确定出了一个图的所有拓扑不等价的平面嵌入数，还将一个非平面图分解为在某种意义下极少的平面子图[95]。用吴文俊的方法同样可在判别平面性的同时得到平面嵌入以及进行平面分解[96]。这也是我们的工作与国际上的不同之处。

曲面嵌入、最大亏格和亏格

Hilbert 提出的连线问题激励了图的曲面嵌入的发展[69]。1979年我国在这方面的第一篇文章发表：刘彦佩证明了除树外的任何连通图的不可定向最大亏格等于它的Betti数[97]。这就解决了White（1973）和Ringel（1974）的书中都提到的一个公开问题，同时，也解决了图的不可定向胞腔嵌入的存在性问题，这个问题1960年就开始提出了。几乎同时，Ringel、Stahl和Xuong也分别独立地得到这一结果，然而只有[97]是算法性的。接着，刘彦佩研究可定向的情形，并取得了一些比较一般性的结果[98]，由此出发，确定出了一批图的最大亏格[99]；关于图的亏格，完成了求K_n-K_3的亏格的Ringel遗留下来的所有情形的证明[100]，还发现了确定不可定向最大亏格与Edmonds曲面对偶定理的等价性[101]。刘彦佩也研究过曲面上的k-正则地图，发现两个不等式和一个恒等式，由此可以便利地导出Zaks和Kotzig的一些结果[102]。

图的代数性质

对于图的代数研究源于Tutte[103]。事实上，他的博士论文就已经奠定了图的代数基础。其目的在于通过图上的一些代数结构的研究发现更深一层的组合不变量乃至拓扑不变量。我国在这方面的第一篇文章发表于1979年：李乔和冯克勤研究图的相邻阵的特征值[104]，他们给出了其最大特征值的一个清晰的在图论意义上的描述，并且讨论了在图的变换下最大特征值的变化规律。其后，洪渊给出了单圈图最大特征值的范围[105]。同时，他还研究了树的第k个最大特征值[106]。最近，他给出了一个图的第2个最大特征值的取值范围[107]。在Cvetkovic 等的书中提出求一个图G使得它的特征多项式

$P_G(\lambda)=0$ 根式不可解，这种图称为不可解的。冯克勤发现了两个只有 6 个节点的不可解图，它们是最小的而且其特征多项式的伽罗华群都是对称群 S_5[108]。近来，刘绍学研究了有向图与路代数之间的联系，并且给出了有向图的路代数是 Artin 代数、Noether 代数、半本原代数以及素代数的充要条件[109]。

重构性

对于重构性的研究，源于 40 年代 Ulam 提出的一个猜想：任何一个阶不小于 3 的连通图均可由它的所有一级去点子图所唯一确定。人们试图通过研究任何一个组合不变量的重构性来解决这个猜想。目前，人们已经知道，从节点数、边数、色数，到色多项式、谱，以至特征多项式，全是可重构的[110]。洪渊给出了一个图是可重构图的一些等价条件[111]。最近，杨永志证明只要对于 2- 连通的图重构猜想成立，则 Ulam 重构猜想即成立[112]。同时已知，树以及极大平面图全是可重构的。如果考虑一级去边子图，则可得边的重构问题。谢力同通过讨论连通图支撑树系列基边向量总表的性质导出了一个充要条件[113]。最近，赵诚得到了平面图是边可重构图的一些充分条件[114]。

图的计数

一般而言，图以至地图的计数都是很难的问题，且多以 Polya 的定理为基础。然而 1963 年，W. T. Tutte 创立了一种平面地图的计数理论[115]，并由 Brown、Mullin和刘彦佩相继发展[116]。刘彦佩得到了一般有根平面地图带两个指标的计数显式，并给 Tutte 猜想的一个单指标公式以一种最直接的证明[117]。他接着研究无环[118]、简单[119]以及根节点不可分离[120]情形的平面地图，得到相应的计数公式，改进了 Tutte 的关于 3-网的著名计数公式[121]。对于依节点的次剖分节点集的序列的一般无环平面地图[122]、不可分离平面地图[123]以及 Euler 平面地图[124]的计数，他发现了在这些情形下母函数所满足的函数方程，它们全是带有一个线性泛函的非线性方程；对于一般外平面地图[125]和不可分离外平面地图[126]的依节点集剖分的计数全得到了显式。最近，对于外平面地图两指标的计数，他发现了一种特征解法[127]，以及对于面剖分情形下的一种非线性方程的解法，从而求出了各种外平面地图依面的次序列计数的简单无和公式[128]。进而，颜基义和董峰明也求得了一系列的关于外平面地图的两个指标的计数显式[129]。

色和方程

对于一类图或地图，给定一组组合的或拓扑的不变量和一个正整数 λ，对这类图或地图中所有那些具有给定不变量的，用 λ 种颜色着色，问总共有多少着色方式。这个依赖于给定不变量和 λ 的函数，称为色和函数。一般而论，确定色和函数是非常困难的。首先要研究各种色和函数所满足的方程。开创性的工作属于W. T. Tutte 1973 年给出带根的平面三角剖分的色和函数所满足的方程[130]。10年之后，刘彦佩给出了带根不可分离平面地图色和函数所满足的方程，由此可直接导出 Tutte 的方程[131]，并且引出了一类树的计数，得到了三维形式的杨辉三角[132]。接着，他研究了 $\lambda=2$ 的情形，恰导出不可分离平面偶地图的计数[133]。最近，刘彦佩又确定了有根平面3-正则地图的色和方程[134]。进而，结合他在外平面图计数中所用的特征方法，从这类地图的色和方程求出了色和函数的显式[135]。现在，他又将色和方程发展到双色和方程[136]。

递归性

图的方幂、边图、团图，以及 Hamilton 路图均可递归地进行研究。赵光复对一个图到它的 n- 次边图上的嵌入问题进行了研究，得到单圈图和树具有可嵌入性[137]。刘彦佩、董峰明和李祥贵研究了有关递归团图直径的一个方程的解的存在性问题。作为一个推论，给 Peyral、Rall 和Slater 提出的猜想一个回答[138]。吕涛军研究了递归 Hamilton 路图的结构性质。作为他所得结果的一个特例，给Chartrand、Kapoor和 Nordhaus 提出的猜想一个回答[139]。

标号设计

所谓图的标号设计，是指找出从图的节点集到某整数集的一个单射，使满足所需要的性质。如确定图的带宽、愉快性、调合性等。一般而论，确定一个图的带宽是个十分困难的问题，不大会有通用的简单公式。李乔、陶懋颀和沈韵秋给出了路的强乘积图和环面上的格子图的带宽[140]。接着，麦结华和罗海鹏用凝聚标号又求出了一些图的带宽，并且提供了图的带宽的一个下界[141]。对于图的愉快性，朱卫三给出了 Bodendiek 提出的一个猜想的一个较简单的回答，即证明了任何带一个弦的圈都是愉快的[142]。R. L. Graham 和 W. J. Sloane 于1980年曾证明几乎所有的图均非调合，但他们猜想所有树皆调合。1983年，T. Grace 研究了调合性中的相继性，得到 $C_{2n+1}\odot K_1$ 是相继的，并猜想 $C_{2n}\odot K_1$ 是调合的，最近，柳柏濂和张显坤证明 $C_{2n}\odot K_1$ 也是相继的，从而更是调合的，由此证明了这个猜想[143]。

子图结构

图论中很多问题与子图结构有关。C. Berge 1973年曾猜想：每一个4-正则的简单图都含有一个 3-正则的子图。这个猜想于1985年被张利民证实[144]。Ramsey 数的确定是图论中的著名问题之一，与此有关，将一个完全图 K_n 的边剖分为3个类，问其中有多少个3条边同属于一类的三角形。这个问题的一般情形远未解决。李炯生和黄国勋解决了 K_{17} 的情形[145]。金芳蓉(F. R. K. Chung)和 Graham 于1978年曾给出以所有n条边的树作为子图的图的阶的下界估计。1985年杨晚兰改进了这个下界[146]。最近，王成德证明了由 Cockayne、Favaran、Payan和 Thomason 1981年提出的关于图中两个独立参数和的上界的一个猜想[147]。毛经中刻划了平面图的节点次序列，从而解决了 Schmeichel-Hakimi 的一个猜想[148]。施永兵研究了一个图的路分布，证明除两类图外全可由路分布所确定，并且刻划了一个整数序列是某树的路分布的条件[149]。Gyöy 等人曾提出过这样的问题：对于两自然数 s、t，问是否存在一个最小的自然数$f(s, t)$，使任何连通度至少为$f(s, t)$ 的图均可将其节点集剖分为两个子集，并且这两个子集的生成子图分别具有连通度 s 和 t。Thomassen 将其中的连通度改为节点的最小次。这时，用 $g(s, t)$ 代替$f(s, t)$。施容华给出了$g(s, 3)$和$g(s, 4)$ 的准确值，并且对一般的 $g(s, t)$ 给出了较好的估计[150]。

竞赛图

早在1968年，J. W. Moon就有这方面的专著[151]。朱永津和田丰给出了一个竞赛图为弧k-回路的一个充分条件[152]。吴正声、张克明和邹园将 n-阶竞赛图的弧-泛回路性简化为弧 3-回路性和弧 n-回路性[153]。黄靖和李慰萱[154]，以及吴正声[155]都研究过一些与王有关的性质。关于竞赛图的得分向量，李炯生刻划了所有 $n-1$ 阶子竞赛图均有相同得分序列的这样一类竞赛图[156]。李炯生和黄国勋将 Kotzig 用得分向量刻划一个竞赛图从而使所有一级去点子竞赛图皆同构的工作推广到多分竞赛图上[157]。令人注目的是，姚天行最近证明了 Reid 于1978年提出的一个猜想：每个正整数的非空集合均可作为某个竞赛图的得分集[158]。

利用与应用

万哲先的《非线性移位寄存器》一书，不仅为代数，也为图论应用到技术科学开辟了一个新天地[159]。万哲先和刘木兰研究了 de Bruijin-Good 图的自同构与同态[160]。冯克勤提供了纯轮换与补轮换因子关联图的特征[161]。万哲先、熊荣华等用代数方法给出了de Bruijin-Good图中短圈数目的计数[162]。在组合矩阵论方面，因为一个所有元素皆非负的方阵可与一个图建立一一对应关系，所以人们可用图研究这种矩阵的定性性质。邵嘉裕证明了 n 阶对称本原阵的本原指标集为 $\{1, 2, \cdots, 2n-2\}-S$，其中 S 为 $\{n, n+1, \cdots, 2n-2\}$中的所有奇数，这就完全解决了1964年以来的一个悬而未决的问题[163]。最近，邵嘉裕和李乔还完全地确定了对称不可约0-1阵的最大密度的指标集[164]。郭忠证明了含 d 个对角元、本原指标为 $2n-d-1$的 n 阶含最少正元素的本原矩阵的存在性和唯一性[165]。在组合最优化方面，许国志、朱永津和田丰研究了在一些无入弧的节点上带有次限制的最小树形图问题[166]。朱永津和刘振宏研究了过两个给定节点的最小单圈图问题[167]。刘振宏、马仲蕃、朱永津和蔡茂诚研究了在一个独立集中的节点上带次限制的最小树问题[168]。所有上述关于组合最优化的研究中均给出了多项式的算法或使算法可多项式实现的条件。确定平面上的过 n 个点的 Steiner 最小树问题，至今虽已有不少人研究，但距完全解决还甚远。即使所有 n 个点全在同一个圆周上，至今也未完全解决。在这一条件下，Jarnik 和 Kössler 于 1934 年研究了 $n \leqslant 6$的情形，并且对$n=6$和 $n \geqslant 13$证明 Steiner 树的节点集恰为这 n 个点。1987年，堵丁柱、黄光明等证明：当 n 个点为正 n 边形的顶点时，若 $7 \leqslant n \leqslant 12$，则也有这样的性质。从而，完成了这样一个猜想的证明：对于$n \geqslant 6$，过任何正 n 边形的 n 个顶点的 Steiner 树的节点集就是这 n 个顶点[169]。堵丁柱还提出一个求最小可行图的问题，并且发现了一个可多项式识别的条件以判断一个图的最小性[170]。另外，李万学提供了一种插入算法以建立一种近似最佳高度动态2-3树[171]。管梅谷等研究了在平面图上确定最小权的圈覆盖，并讨论了与中国邮递员问题的关系[172]。魏万迪等将人员分配问题表示为一个偏序集到另一个偏序集的嵌入问题，并在一些情形下给出了求最优解的方法[173]。将图论应用于化学的有刘为民[174]、张福基等。特别是张福基等近年来在这一方面做了一系列的工作[175~179]。

推广：超图、拟阵及广义拟阵

关于将图推广到超图，刘桂真给出了 r-超树上有1-因子的一个充要条件[180]。何其美研究了超图的团秩并推广了 Lovász的一个不等式[181]。张天赐给出了满复形的表征，并得到了超图的一些性质以及这些性质与满复形的关系[182]。在拟阵方面，李慰萱研究了使Weinberg连通度最大的拟阵[183]。之后，他还讨论了Tutte-连通度与 Whitney-连通度的关系。Welsh 曾经猜想，平均地

看，一个拟阵中圈的数目少于基的数目。刘桂真证明：对于二分拟阵，它的基的数目大于它的圈的数目与它的圈秩之和[184]。刘桂真还将图上的树图推广到拟阵上的基图，并研究了基图连通度的一个下界[185]。马仲蕃、刘振宏和蔡茂诚将限制最小树问题推广到求一个拟阵的最优限制基的问题，并给出了有效的算法实现[186]。颜基义研究了广义拟阵的多面体，表明在一些特定的条件下仍保持拟阵所具有的性质：它相应的多面体的诸顶点均为0、1，并且与拟阵的元素一一对应[187]。

[1] 吴文俊，《数学学报》，**5**(1955) 505
[2] 万哲先，*Scientia Sinica*, **11**(1962) 889；《数学通报》，11(1958) 478
[3] 谢力同，《山东大学学报(自然科学版)》，**3**(1962) 21
[4] 管梅谷，《数学学报》，**10**(1960) 263
[5] 华罗庚等，《数学学报》，**11**(1961) 63
[6] 朱永津等，*Scientia Sinica*, **14** (1965) 1396
[7] 林诒勋等，《数学年刊》，**6A** (1985) 715
[8] Liu G. Z. (刘桂真)，*Acta Math. Appl. Sinica*, **3** (1987) 313
[9] 刘家壮，《科学通报》，**28**(1983) 1469
[10] 郑汉鼎，《山东大学学报（自然科学版）》，增刊（1984）82
[11] 王振宇，《数学物理学报》，**2**(1982) 81
[12] 王振宇，*Chin. Ann. Math.*, **4B** (1983) 501
[13] 刘家壮，《山东大学学报(自然科学版)》，**21** (1986) 25
[14] 柳柏濂，《科学通报》，**32**(1987) 244
[15] 刘彦佩，《科学通报》，**30**(1985) 1521
[16] 张天赐，《山东大学学报(自然科学版)》，3(1982) 37
[17] 毛经中，《数学学报》，**26**(1983) 291
[18] Tutte W.T., *Connectivity in Graphs*, University of Toronto Press (1966)
[19] 朱必文，《数学学报》，**24** (1981) 436
[20] 张福基等，《新疆大学学报》，**1**(1981) 4
[21] Erdös P. *et al.*, *Canad. J. Math.*, **18** (1986) 106
[22] 陶懋颀等，《科学通报》，19(1982) 1213
[23] 朱必文，《应用数学学报》，**6**(1983) 292
[24] 刘桂真，《湖南数学年刊》，1(1985) 20
[25] 张福基等，《应用数学学报》，**8**(1985) 227
[26] 田丰等，《系统科学与数学》，**3**(1983) 55
[27] 徐俊明，中国科学技术大学数学系硕士论文（1988）
[28] 蔡茂诚，*J. Syst. Sci. Math. Sci.*, **7** (1987) 113
[29] 毛经中，《数学杂志》，**6**(1986) 17
[30] 苏健基，《科学通报》，**33**(1988) 241
[31] Tutte W. T., *Canad. J. Math.*, **4** (1952) 314
[32] 蔡茂诚，《系统科学与数学》，**3**(1983) 71
[33] 郑茂林，《应用数学学报》，**10**(1987) 211
[34] 郑茂林，《应用数学与计算数学学报》，2(1987) 42
[35] 郑茂林，中国科学院应用数学研究所硕士论文(1986)
[36] 刘桂真，《山东大学学报(自然科学版)》，3(1985) 11
[37] 刘桂真，《数学物理学报》，**5**(1985) 267
[38] 刘桂真，《山东大学学报(自然科学版)》，4(1986) 7
[39] 于青林，《山东大学学报(自然科学版)》，4(1987) **24**
[40] 王建方，《中国科学》A辑，4(1982) 703
[41] 王建方，《中国科学》A辑，5(1983) 400
[42] 杨世辉，《应用数学学报》，**6**(1983) 393
[43] 宁齐，《科学通报》，**30**(1985) 1691
[44] Ore O., *Amer. Math. Monthly*, **67** (1960) 55
[45] 范更华，*J. Comb. Theory*, **B37** (1984) 221
[46] Bondy J. A., *J. Comb. Theory*, **B11** (1971) 80
[47] 田丰等，《系统科学与数学》，**6**(1986) 258
[48] 刘彦佩，《数学的研究与评论》，1(1989) 121
[49] 吕涛军，《中国科学院研究生院学报》，1(1988) 10
[50] 任韩，中国科学院应用数学研究所硕士论文(1988)
[51] 朱永津等，《系统科学与数学》，**6**(1986) 36
[52] Bondy J. A., *J. Comb. Theory*, **B44** (1988) 177
[53] 李浩，《科学通报》，**33**(1988) 474
[54] 施容华，《科学通报》，**32**(1987) 233
[55] 吴正声等，《科学通报》，**32**(1987) 556
[56] 施容华，*Acta Math. Appl. Sinica*, **2** (1985) 79
[57] 施容华，*Acta Math. Appl. Sinica*, **2** (1985) 154
[58] 王建方等，《数学学报》，**30**(1987) 650
[59] Saito A. *et al.*, *Graphs & Comb.*, **1** (1985) 351
[60] 刘振宏，《数学学报》，**30**(1987) 675
[61] 吴正声，《科学通报》，**31** (1986) 317
[62] 杨振启，中国科学院应用数学研究所硕士论文(1988)
[63] 施容华等，*J. Syst. Sci. Math. Sci.*, **6** (1986) 281
[64] 田丰等，《科学通报》，**34**(1989) 156
[65] 施永兵，《科学通报》，**33**(1988) 795
[66] 施永兵，《科学通报》，**30**(1985) 252
[67] 田永成等，《科学通报》，**32**(1987) 566
[68] 田永成，《科学通报》，**33**(1988) 1116
[69] 刘彦佩，《数学的实践与认识》，1(1981) 65；2(1981) 59；3(1981) 33；4(1981) 59；1(1982) 34
[70] 刘彦佩，《数学的研究与评论》，3(1983) 122；1(1984) 121；1(1985) 125；3(1985) 123；2(1986) 175
[71] Birkhoff G. D., *Ann. Math.*, **14** (1912) 42
[72] 李慰萱等，《数学学报》，**21**(1978) 223
[73] 洪渊，《华东师范大学学报(自然科学版)》，4(1984) 33
[74] 王建方等，《科学通报》，**32**(1987) 1516
[75] 张忠辅等，《科学通报》，**33**(1988) 1835
[76] 赵诚，《科学通报》，**32**(1987) 154
[77] 刘儒英，《科学通报》，**32**(1987) 1756
[78] Chao C.Y. *et al.*, *J. Graph Theory*, **10** (1986) 129
[79] 董峰明，中国科学院应用数学研究所硕士论文(1988)
[80] Xu S. J., *Discrete Math.*, **69** (1988) 189
[81] 黄济华，《应用数学学报》，**7**(1984) 285
[82] 郭知熠等，《科学通报》，**33**(1988) 1676
[83] Tutte W. T., *J. Comb. Theory*, **2** (1967) 301
[84] 李慰萱，《数学学报》，**23**(1980) 641
[85] 张福基等，《数学学报》，**28**(1985) 122
[86] 刘彦佩，《应用数学学报》，**2**(1979) 350
[87] 吴文俊，《数学的实践与认识》，1(1973) 20
[88] 刘彦佩，《应用数学学报》，**1**(1978) 321
[89] 刘彦佩，*Chin. Ann. Math.*, **7B** (1986) 425

[90] 刘彦佩，*Acta Math. Appl. Sinica*, **4** (1988) 257
[91] 徐伟宣，*Proc. First China-USA Inter. Conf. on Graph Theory and its Applications* (to appear)
[92] 孙晓荣，《计算机学报》，1(1989) 33
[93] 刘彦佩，*Acta Math. Sinica*, **4** (1988) 316
[94] 刘彦佩，*Acta Math. Sinica*, **5** (1989) 64
[95] 刘彦佩，*Ann. Operations Research* (to appear)
[96] 吴文俊，*J. Syst. Sci. & Math. Sci.*, **5** (1985) 290; **6** (1986) 23
[97] 刘彦佩，《中国科学》，数学专辑 I (1979) 191
[98] 刘彦佩，*Scientia Sinica, Special Issue on Math.* II (1979) 41
[99] 刘彦佩，《数学学报》，**24**(1981) 817
[100] 刘彦佩，《科学通报》，**25**(1980) 959
[101] 刘彦佩，《运筹学杂志》，1(1983) 62
[102] 刘彦佩，*Acta Math. Appl. Sinica*, **1**(1984) 57
[103] Tutte W.T., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **43** (1947) 26
[104] 李乔等，《应用数学学报》，**2**(1979) 167
[105] 洪渊，《华东师范大学学报(自然科学版)》，1 (1986) 31
[106] 洪渊，*Linear Algebra & its Appl.*, **30** (1985) 151
[107] 洪渊，*Acta Math. Appl. Sinica*, **4** (1988) 165
[108] 冯克勤，《科学通报》，**30**(1985) 888
[109] 刘绍学，《数学学报》，**31**(1988) 483
[110] Tutte W. T., 《运筹学杂志》，1 (1986) 43
[111] 洪渊，《华东师范大学学报 (自然科学版)》，3(1985) 29
[112] Yang Y. Z., *J. Graph Theory*, 2 (1988) 237
[113] 谢力同，《山东大学学报(自然科学版)》，3(1986) 14
[114] 赵诚，《山东大学学报(自然科学版)》，3(1988) 22
[115] Tutte W. T., *Canad. J. Math.*, **15** (1963) 708
[116] 刘彦佩，*J. Math. Res. & Expos.*, 3 (1984) 37
[117] 刘彦佩，*Utilitas Math.*, **25** (1984) 77
[118] 刘彦佩，*Acta Math. Appl. Sinica*, **2** (1985) 14
[119] 刘彦佩，*Acta Math. Appl. Sinica*, **2** (1985) 101
[120] 刘彦佩，*Chin. Ann. Math.*, **9B** (1988) 390
[121] 刘彦佩，*J. Comb. Theory*, **B36** (1984) 118
[122] 刘彦佩，《应用数学学报》，**12**(1989) 210
[123] 刘彦佩，《科学通报》，**30**(1985) 646
[124] 刘彦佩，《科学通报》，**31**(1986) 81
[125] 刘彦佩，《科学通报》，**31**(1986) 1045
[126] 刘彦佩，《科学通报》，**31**(1986) 1681
[127] 刘彦佩，*Acta Math. Appl. Sinica*, **5** (1989) 169
[128] 刘彦佩，《科学通报》，**33**(1988) 1441
[129] 董峰明等，《数学学报》，**32**(1989) 377
[130] Tutte W. T., *Canad. J. Math.*, **25** (1973) 426
[131] 刘彦佩，*Cong. Num.*, **45** (1984) 275
[132] 刘彦佩，《应用数学与计算数学学报》，1(1988) 1
[133] 刘彦佩，《数学物理学报》，**9**(1989) 21
[134] 刘彦佩，*Acta Math. Appl. Sinica*, **3** (1987) 136
[135] 刘彦佩，《科学通报》，**33**(1988) 1261
[136] 刘彦佩，*Discrete Math.* (to appear)
[137] 赵光复，*Acta Math. Appl. Sinica*, **3** (1987) 111
[138] 刘彦佩等，《科学通报》，**34**(1989) 898
[139] 吕涛军，《数学学报》，**31**(1988) 830
[140] 李乔等，《中国科学技术大学学报》，1(1981) 1
[141] 麦结华等，《应用数学学报》，**7**(1984) 86
[142] 朱卫三，《科学通报》，**30**(1985) 1052
[143] 柳柏濂等，《科学通报》，**34**(1989) 313
[144] 张利民，《长沙铁道学院学报》，1(1985) 111
[145] 李炯生等，《应用数学学报》，**7**(1984) 430
[146] 杨晚兰，《应用数学学报》，**8**(1985) 284, 398
[147] 王成德，*Discrete Math.*, 2 (1988) 199
[148] 毛经中，《科学通报》，**30**(1985) 1852
[149] 施永兵，《上海工业大学学报(自然科学版)》，2 (1982) 23
[150] 施容华，《科学通报》，**30**(1985) 650
[151] Moon J. W., *Topics in Tournaments*, Holt (1968)
[152] 朱永津等，*Scientia Sinica, Special Issue on Math.* II (1979) 18
[153] 吴正声等，《中国科学》，12(1981) 915
[154] 黄靖等，*J. Graph Theory*, **11** (1987) 7
[155] 吴正声，《应用数学学报》，**10**(1987) 284
[156] 李炯生，《科学通报》，**32**(1987) 1436
[157] 李炯生等，《数学进展》，**17**(1988) 398
[158] 姚天行，《科学通报》，**33**(1988) 481
[159] 万哲先，《非线性移位寄存器》，科学出版社(1978)
[160] 万哲先等，《数学学报》，**22**(1979) 170
[161] 冯克勤，《应用数学学报》，**5**(1982) 1
[162] 万哲先等，*Discrete Math.*, **62** (1986) 85
[163] 邵嘉裕，《中国科学》A辑，9(1986) 931
[164] 邵嘉裕等，*Discrete Appl. Math.*, **21** (1988) 147
[165] 郭忠，《数学学报》，**31**(1988) 283
[166] 许国志等，《应用数学学报》，**2**(1979) 295
[167] 朱永津等，《应用数学学报》，**2**(1979) 241
[168] 刘振宏等，《应用数学学报》，**3**(1980) 1
[169] 堵丁柱等，*Discrete Comp. Geom.*, **2** (1987) 65
[170] 堵丁柱，*Discrete Appl. Math.*, **14** (1986) 101
[171] 李万学，《科学通报》，**30**(1985) 653
[172] 管梅谷等，*Ars Comb.*, **20** (1985) 61
[173] 魏万迪等，*SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, **7** (1986) 150
[174] 刘为民，*Scientia Sinica*, **22** (1979) 539
[175] 张福基，《科学通报》，**24**(1979) 966
[176] 张福基，*Scientia Sinica*, **22** (1979) 1160
[177] 张福基，《科学通报》，**28**(1983) 726
[178] 张福基等，《科学探索》，**3**(1983) 35
[179] 张福基等，*Graphs Comb.*, **1** (1985) 883
[180] 刘桂真，《数学进展》，4(1986) 381
[181] 何其关，《应用数学学报》，**6**(1983) 505
[182] 张天赐，《山东大学学报(自然科学版)》，1(1985) 18
[183] 李慰萱，*J. Comb. Theory*, **B35** (1983) 20
[184] 刘桂真，《科学通报》，**30**(1985) 970
[185] 刘桂真，*Discrete Math.*, **69** (1988) 55
[186] 马仲蕃等，*Ann. Discrete Math.*, **9** (1979) 253
[187] 颜基义，*Acta Math. Appl. Sinica*, **2** (1985) 263

常 微 分 方 程

·朱思铭

近两年来，常微分方程的全国性学术会议有第四次泛函微分方程会议（上海）、第二次定性理论会议（长春）、第二次动力系统会议（杭州）和第三次稳定性理论会议(厦门)。西安交通大学、中山大学、华中师范大学和湖南大学等也召开了全国或国际性的专题会议。

叶彦谦受国家教育委员会委托，召开了常微分方程学科发展研讨会，与会者就常微分方程各分支做了国内外动态报告[8,9]。"常微分方程与控制论"武汉讨论会的综合报告发表于[10]。散见于各杂志上的综述很多[9,11~14]。出版的专著有[1~7,33]。

定性理论

秦元勋[16,32]提出复域常微分方程积分曲面理论。通过强有根定理、通积分表示定理和极限联系定理等，对实系数 n 次多项式系统(E_n)估计得极限环的最大个数 $N(n)\leqslant 2(n^2+n+1)$；再利用电子计算机详细分析，得到更精确的估计 $N(2)=4$。这项工作引起了人们的广泛注意。

1985年P. Joyal、C. Ronssean引进了细鞍点的鞍点量概念。随后，秦朝斌和秦元勋[16]、蔡燧林[17]、张平光[17]、蔡燧林和张平光[11,22]、朱德明[18]等同时分别讨论了二次系统的鞍点量及细鞍点的二次系统，得到实和复域中二、三阶鞍点量公式及其相互关系。陈伟峰[28]研究了具有细焦点的二次系统，吕启龙[30]和蔡燧林[28]也讨论了二次系统的极限环。

平面二次系统多按叶彦谦分类进行研究。对(Ⅰ)类方程，已知极限环不超过一个。继丁孙荭得到分界线环的存在条件后，谢云荪[20]在计算机上用数值方法求出了分界线环的参数曲线。对(Ⅱ)类方程，沈伯骞[17]给出了 $n=0$ 时极限环(1,1)分布的充分条件和必要条件，而对 $m+2a=0$ 情形则得到充要条件。孙建华[22]用计算机研究了 $m=0$ 时极限环的分支曲面。张平光[28]和赵申琪[22]讨论了 $l=0$ 时的极限环的存在性和唯一性。杨信安[22]则分析出 $\delta=n=0$ 时系统有26种不同的拓扑结构。(Ⅲ)类方程相当于一般的二次系统。叶彦谦和叶唯寅[22]证明了极限环(2,2)分布的不可能性，还将Berlinskii定理应用推广于二次和三次系统。叶唯寅[22]证明了具有两共轭复直线解的实二次系统不存在极限环。杨信安[22]则讨论了弱焦点的有界二次系统极限环的存在性。

李继彬和黄其明[18]研究了一类平面三次Hamilton扰动系统，得到了系统的极限环分支和相图，同时证明了三次系统极限环个数 $N(3)\geqslant 11$。刘一戎[16]、戴国仁等[31]分别讨论了平面三次系统的焦点量和分界线环。陈国雄[22]讨论了有限奇点情形的有界三次系统。

叶彦谦[22]讨论了多项式微分系统的轨线和一般积分的几何问题。吕启龙[9]研究了平面 n 次系统的中心判定问题。索光俭和沈伯骞[11,22]用Dulac函数估计多项式系统极限环的上界及极限环所包含的奇点。

葛渭高[14,26]、韩茂安[22,27]和刘朝杰[22]讨论了广义Lienard方程的极限环问题。沈伯骞[8]和党新益[11]也讨论了平面系统极限环的存在性和唯一性。徐兆和杨宗炼[29]研究了一类拟Hamilton系统的极限环。刘世泽和袁晓凤[26]讨论了极限环的计算与作图。

周荣星[23]讨论了环面上微分方程的全局结构及其应用。吴葵光[16]证明了没有极限环的一类空间二次齐次向量场至少有10种不同的拓扑结构。廖可人[17]用定性方法给出自旋振动三维系统的轨线分布的全局结构。

陈一元[19]引入高维空间中旋转向量场的概念，证明了与平面旋转向量场理论类似的一些定理。

燕居让[17,28]给出二阶线性微分方程解振动的充分条件，梁中超[14,22]、陈永邵[22]、向子贵[22]、李秉团[19]、柳训明和陈庆益[11]分别讨论了二阶方程的振动性和渐近性。高仕安[16]研究了周期二次线性微分方程的复振动理论。

张禄[32]、高占海[32]和赵晓强[20,32]用不动点等方法研究了 n 维空间的周期解问题。王联和王慕秋[22,31]用 V 函数方法讨论了高阶非线性系统的周期解的存在性。陈叔平[12]、陈菊芳[14]讨论了周期微分方程的周期解。

葛渭高[18]研究了非保守的 n 维Duffing型方程的 2π 周期解。钱定边[22]则讨论了Duffing方程临界情形周期解的存在性。刘镓生等[23]提出用一系列代数方程组求解非线性振动系统主振型的新方法。

钱敏等[16]对调频输入正切锁相环路进行了定态分析，得到存在周期解的参数范围。李骊和任保经[23]、丁孙荭[16]研究了一类有间断特性的二阶微分方程的周期解。王荣良[20]讨论了柱面上一类带强迫项的二阶非

* 朱思铭　中山大学数学系教授。

线性方程周期解的存在性和稳定性。伍炯宇[20]分析了机床再生颤振的周期的存在性。

王慕秋等[11,16]讨论了大系统周期解的存在性和唯一性。蒋美跃[16]用临界点理论讨论了一类Hamilton系统周期解的存在性。

何崇佑[22]、曾唯尧[23]、孙建华和何崇佑[32]、美东平[22,27]和王全义[22]均讨论了非自治系统的概周期解和周期解。林发兴[22]则研究了拟自守系统的拟自守解。

周之铭[29]研究了n维食饵-捕食生态方程的极限集和周期解。刘南根[18]和张发秦[26]讨论了具有Holling I型功能反应和捕食者厌食的生态系统的极限环。戴国仁[30]则研究了广义Volterra方程的极限环。丁孙荭[23]、戴国仁[20]、宋国华[26]和雷英果[27]分别对一类食饵-捕食生态系统进行了全局结构分析。金钧[23]则讨论了三种群生态系统周期解的全局稳定性。

彭晓林[19]和张平光[12]分别研究了一个生物化学方程的极限环的存在性和唯一性。童勒业等[28]分析研究了心脏细胞的双道模型，解释了某些病理现象。崔启武[26]从营养动力学的角度讨论了种群和生态模型的结构。

动力系统和紊动

廖山涛[21]研究了稳定流形的扰动，解决了紧黎曼流形上C^1常微系统的一个扰动问题。陈藻平等[15]引进Ω-单一化稳定性概念，研究了紧黎曼连通流形上一类自映射生成的半动力系统。

钱敏等[15]讨论了流形上微分半动力系统的稳定性，得到了自映射的扩张不变集及压缩不变集的基本性质，证明了自映射的R-稳定性。冯庆富[16]证明了公理A自覆盖映射具有Markov分解和有理ζ-函数。

陈藻平和何连法[17]、李振全和宋国华[14]得到圆周上连续自映射嵌入半流的充要条件。麦结华[17]则给出圆周上自同胚有N阶迭代根的充要条件。杨润生[25]讨论了圆周自映射的非游荡点集。

张景中和杨路[17]研究了逐段单调连续函数嵌入半流的问题。武河等[15]引入多参流概念，给出一类高维收缩映射嵌入多参流的充要条件。廖公夫[18]探讨了第二类Feigenbaum函数方程的单谷扩充连续解的性态。

周作领[16,18]讨论了拓扑Markov链，给出了拓扑熵、非游荡集和周期点集等7个等价条件，同时引进局部可剖空间来统一拓扑紧微流形和紧微可剖空间，研究了连续映射的Ω-爆炸。熊金城[16]和岳澄波[16]研究了扑拓熵和正测度熵问题。

丁同仁曾解答了关于动力系统的一个Birkhoff猜想，麦结华[16]则通过平面拓扑变换给出更简单的解答。麦结华[16,18]还给出四维环面和Hilbert空间上有指定性质的两个动力系统，并对推广的C^1封闭引理给出较简单的证明。

何连法[11]讨论了不可定向流形上二维动力系统周期轨道的存在性。朱德玥[17,19]对不可定向曲面证明了4个拓扑和动力系统性质，给出Möbius带和Klein瓶上的分类定理，并研究了非零伦周期轨道的存在性。

韩茂安[11,19,27]研究了曲面上连续流的闭轨和奇闭轨，并讨论了环面上任意连续流的旋转方向和旋转数。章梅荣[16]探讨了环面上Anosor自映射的π_1性质。陈永红[17]得到了环面上存在正积分不变量的孤立奇点的动力系统具有各态历经的充要条件。

余澍祥[15]研究了平面C^1向量场在一有界连通区域上的连结奇点的轨线的存在性。陈一元[22]讨论了平面上的P-向量流。

张芷芬曾回答了Немыцкий提出的一个动力系统问题，田庆辉[9]则进一步在R^3中构造了含有完备渐近子系统的动力系统。林小东[19]研究了紧黎曼流形上时变向量场的指数二分法。万章勇和叶思源[29]用不变性原理研究了动力系统的渐近性态。

周作领[16~18]讨论了紊动现象的Li-Yorke观念，提出了全紊动的概念，并进一步证明了单边和双边符号空间上的转移自同胚是在Li-Yorke意义下紊动的。

刘曾荣、朱照宣等[16]通过理论分析和数值例子提出奇怪吸引子的几何构造是无限多的Smale马蹄以复杂形式共存的推断。朱照宣和刘曾荣[23]还分析了一个分段线性Henon映射吸引集的结构。曾振炳[16]也讨论了一类二维映射的紊动条件。王正栋[25]则研究了高维映射产生紊动的一个方法。程宝龙[23]分析了Helleman映像和奇次准保测映像的紊动性态。

张广远[16]得到了流形上离散动力系统周期轨道发生各种分歧的充要条件。朱文骅[28]对分析非线性动力学的胞映射法提出了两种分阶段细化胞方法。

朱思铭和张秀君[18]应用泛函方法研究了Melnikov函数及其误差估计。徐振源和李骊[23]分析了Melnikov函数与Poincare映射之间的关系。陈一元[27]讨论了分歧和紊动中的Lie括号运算。万世栋和李继彬[23]则给出了Melnikov方法所常用的椭圆函数展开式。

徐振源和刘曾荣[11]讨论了软弹簧Duffing方程在小扰动下紊动的情况，发现了在有限紊动区间中次谐与紊动共存的复杂现象。蒋继发和刘曾荣[20]研究了非Hamilton系统的次谐分叉和马蹄以及次谐的稳定性。万世栋和李继彬[22]讨论了平面二次系统扰动的Poincare分歧和紊动性态。

周建莹[20]研究了一类具有高次奇点的非线性微分方程的紊动现象。沈家骐和俞伯华[17]对一个电机工程

中提出的具体方程用Melnikov方法分析了它的紊动解和次谐波解。孙建华[23]研究了大阻尼非自治系统的周期解与紊动态。管克英[16]研究了固体的能谱结构和环面上一个自治系统的分歧现象。

稳定性理论

贺建勋[15]提出了不连续实用稳定性理论，并应用于大型动态系统，得到了若干有效判别准则。

朱思铭[29]在提出区域稳定性理论的基础上，进一步讨论了不变集的区域稳定性。赵怀忠[14]引进了一类一般意义下的集合渐近稳定、(拟)收缩稳定等概念，并给出了它们的判定定理。

曹庆杰[22]研究了非自治系统渐近稳定的比较法。刘冰[11]讨论了自治系统不稳定定理及应用。谢建华[20]将稳定性基本定理中V函数条件减弱为在环域中定义。

梁中超[16]研究了二阶线性系统的稳定性，利用振动解的"示性序列"建立了振动方程在振动情形下稳定性的充要条件。廖宗璜和卢德渊[23]则讨论了三阶变系数线性微分方程的解的不稳定性。对一般线性系统，林兴发[22]讨论了结构稳定性与指数二分法的关系，还具体研究了三角形系统的指数二分法。

孙振琦和王联[20]应用微分不等式得到非线性系统渐近稳定的判别准则。赵俊三[23]对一类非线性系统给出了渐近稳定的充要条件。魏有德[21]讨论了几类非线性微分方程组解的有界性和稳定性。赵怀忠[20]研究了具有缓变系数的可分离变量系统的运动稳定性。

李惠卿[17]给出了Lienard方程全局稳定的充要条件，并修正了Krasovskii的条件。徐安石[18]研究了二阶常微分方程和时滞微分方程的有界性和稳定性。郜奉欣等[20]讨论了具有无界分段常矩阵的三阶微分方程的指数。吴明录[16]讨论了一类三阶非线性系统的全局稳定性。金均[22]研究了四阶非线性微分方程的一致有界性。

刘南根[11]提出可经有限次运算判别平面多项式系统在零根情形下的稳定性，解决了Ляпунов情形的Arnold问题。段魁臣[11]则对双零根情形的高次系统进行了讨论。

刘永清等[24]讨论了代数方程的根具有负实部的判定问题。谢朗和谢琳[11]、开平安和徐晖[24]均讨论了复系数多项式的稳定性。刘智敏和李凤翎[24]研究了多项式矩阵的稳定性。王晓君[23]则给出了多项式稳定的几何判据。屠伯埙和李君如[18]研究了方阵特征值分布及其在稳定性理论中的应用。高维新[15]研究了一类矩阵方程的连分数解法，这可用于构造Ляпунов函数。

杜英[20]得到了存在李森林-Ляпунов函数的充要条件，并用于讨论非线性系统的全局稳定性。叶伯英[20]研究了Ляпунов函数能量度量方法的改进。

1983年Bialas提出了区间矩阵$N(P, Q)$的稳定性问题。高为炳、廖晓昕和徐道义等进行了讨论[6]。施志诚和高为炳[16]研究了一类具有更广泛意义的区间参数矩阵的稳定性。

陈小林和黄琳[23]研究了线性控制系统的稳定性与最优性的关系。段广仁等[24]进行了线性系统极点配置控制器的鲁棒稳定性分析。

廖晓昕[15]通过拓扑变换，将Лурье间接控制系统化为变量分离的非线性控制系统，然后引进部分变元稳定性，从而得到绝对稳定性的充要条件。赵素霞[16]用Лурье型V函数研究了多个执行机构的控制系统在有限扇形角的绝对稳定性，得到了它的充要条件和代数判别准则。陈芳跃[22]和李克难[22]均讨论了直接控制系统的绝对稳定性。

刘金宪和刘永清[24]及廖福成[11]研究了线性时变大系统的稳定性。冯昭枢和朱思铭[13]研究了带有一个参数的大系统不变集的分歧问题。

朱思铭[20]研究了高维资源竞争系统的解的极限性态。刘大一[20]讨论了一类多种群猎物-捕食者生态系统的稳定性。戴国仁和陈兰荪[20]研究了具单终端捕食者的多资源食物链系统的有界性和稳定性。冯德天等[24]研究了带年龄结构的非线性共生生态模型的稳定性。王辅俊[26]则讨论了含人口迁移的流行病模型的稳定性。彭芬国和周之铭[26]研究了环状三维捕食-被食系统的全局稳定性。周孔容和雷镜朝[31]对一类生态竞争模型进行了全局稳定性分析。陆征一[31]讨论了一类生态系统的不变集。

陈兰荪等[26]研究了种群生态系统的持续生存问题。刘平舟和刘志汉[26]用Ляпунов直接方法讨论了生态系统的持续生存。

李中和黄琳[23]讨论了线性时不变离散系统的Ляпунов方程的解集的几何性质及分段线性离散系统的稳定性。何学中[14]和马万彪[25]均研究了离散系统的稳定性。刘永清和刘金宪[22]讨论了离散系统Ляпунов函数的构造。唐友功[24]研究了一类时变离散大系统的稳定性。张鸿亮[13]讨论了离散大系统的结构和关联稳定性。

泛函微分方程

张作元[15,30]研究了线性差分微分方程组的渐近稳定锥的几何特性，解决了Hale1982年提出的两个问题，并得到了二阶滞后泛函微分方程全时滞稳定的代数判据。

温立志[11]得到了滞后型泛函微分方程稳定性的广义Разумихин型比较定理。吴建宏[21]借助具有常负导数的Ляпунов泛函提出了一种研究高维系统一致稳定

性的降维方法。林宜中[23]研究了一类超前型微分差分方程的有界解。王怀忠和李勇[25]也讨论了滞后和超前型泛函微分方程的解的存在唯一性。

徐道义[16]讨论了一类多时滞线性滞后系统的指数稳定性。王克[25]提出了可变时滞泛函微分方程的基本理论。马万彪[17,18]利用向量V函数给出了一类变时滞变系数线性差分方程的指数稳定性判据，并研究了具有变时滞的自动调节系统的全局稳定性。

黄发伦[15,22]研究了无限时滞自治线性泛函微分方程，得到了基本矩阵指数稳定的充要条件，运用反例并从理论上证明了 Corduneanu 和 Lakshmikantham 问题的答案是否定的。何敏[19]则研究了无限时滞泛函微分方程的一致有界性和一致最终有界性。

斯力更和马万彪[16]给出了中立型线性定常微分系统渐近稳定性的代数判据。夏华兴[19]则建立了中立型泛函微分方程中 Ляпунов 泛函的 Разумихин 型定理。邵周德[18]讨论了中立型泛函微分方程解的可微性。高国柱[16]和魏有德[31]分析了一类非线性中立型泛函微分方程的零解的稳定性、不稳定性和渐近性态。

张书年[15,22]研究了无限时滞滞后型泛函微分方程的有界性和稳定性，并对无限时滞中立型泛函微分方程建立了与有限时滞滞后型泛函微分方程相对应的3种基本类型的稳定性定理，给出了在各种情形下稳定性的统一形式。吴建宏[17,22]在有界连续函数空间上讨论了无限时滞中立型方程的局部理论的稳定性。

胡作生[18]讨论了具有小时滞的线性中立型方程的解的渐近性态。斯力更[18]则研究了一类非线性中立型时滞微分方程的解的性态。徐远通[29]、陈伯山[16]和翁佩萱[20]讨论了一类非自治时滞微分方程的渐近性。

温立志和夏华兴[15]用定性分析相应自治常微分方程周期解的方法研究了含两个滞量的微分差分方程周期解的存在性。何猛省[17]结合 Ляпунов泛函和逼近法证明了一类抽象泛函微分方程在非共振情形下周期解的存在和唯一性。胡跃明[11]讨论了无限时滞系统的周期解。

黄启昌[15]和王克[18]引入$|\cdot|_h$模和C_h空间，并应用 Ляпунов 第二方法得到了无限时滞泛函微分方程的一致有界性及周期解的存在性定理。高国柱[18]讨论了不需要解算子紧性条件的中立型泛函微分方程的周期解的存在性。王志成[16]研究了线性 Volterra 微分方程和积分微分方程的周期解。

张炳根[16]研究了带偏差变元的微分方程的振动理论。张炳根等还出版了这方面的英文专著[1]。

钱祥征和廖六生[22]、魏俊杰[20,22]分别研究了一阶滞后型和超前型非线性微分方程的振动性。陈永劭[22]讨论了二维一阶泛函微分方程的振动性。

王志成[16]得到了一类中立型泛函微分方程振动的充要条件。阮炯[18,22]研究了带多个滞量的中立型微分差分方程解的振动性，并讨论了二阶中立型线性微分差分方程和二阶具有非正系数的中立型及滞后型泛函微分方程的非振动解的类型和判别方法。

燕居让[18]、李小军[11]、张玉森[11]和张振国[14]讨论了二阶和n阶非线性泛函微分方程的渐近性、振动性和非振动性。

刘永清和朱学峰[22]研究了时滞控制系统稳定性等价问题。郑慧恒[22]讨论了时滞非线性控制系统稳定性。

章毅[16,22]应用构造 Ляпунов泛函的方法研究了具有无限时滞的大系统的稳定性。谢胜利[16]用矩阵测度工具和不等式估值方法讨论了中立型大系统的稳定性。阮士贵[13]和张毅[14,22]讨论了线性及非线性时滞大系统的稳定性。斯力更和马万彪[16]建立了反向时滞不等式，并用于研究无限时滞大系统零解的不稳定性。

伍炯宇[20,31]研究了具有滞后影响的食饵-捕食生态模型，证明了其非常数周期解的存在性，并讨论了白血球生成的三维时滞泛函方程模型的稳定性。

奇摄动边值问题等

欧阳亮[17]研究了一类算子微分方程的奇摄动问题。周钦德和苗树梅[12,23,25]讨论了二阶微分和积分微分方程的非线性奇摄动边值问题。周钦德和王怀忠[30]、李勇[30]研究了带有转向点的奇摄动边值问题。

林宗池[19]利用不变域理论研究了向量二阶拟线性边值问题的解的存在性和渐近性。林宗池和林苏榕[16,23]还讨论了伴有边界摄动的半线性二阶和向量四阶微分方程边值问题的奇摄动。

刘光旭[23]和莫嘉琪[19]分别研究了二阶拟线性和四阶非线性微分方程边值问题的奇摄动。康盛亮和陈琪[23]也讨论了非线性向量边值问题的奇摄动。

王俊禹[25]、赵为礼[17]和叶新泉[30]分别研究了带有奇性的和三阶的非线性微分方程的两点边值问题。陈绍著[20]讨论了二阶常微分方程极限边值问题的解的存在性和唯一性。

苗树梅[12,30]研究了双时滞的和具有定时滞的奇摄动边值问题。李勇[30]和王怀忠[30]讨论了微分差分方程边值问题的解的存在性和迭代方法。

冯芷兰和刘兴权[30]研究了拟线性奇摄动系统的周期解。

高维新[17]分析了具有正则奇点的线性微分方程，得到了解的结构和基本解组的直接递推公式。高仕安[17]研究了一类常微分方程的亚纯解的个数。

黄发伦和刘康生[16]讨论了 Hilbert 空间中线性动

力系统的指数稳定性。李虹和黄发伦[32]、洪佳林[32]、庄万[14]、李黎明[14]、郑权[31]和肖体俊[31]研究了Banach空间中微分方程的解的存在唯一性、稳定性、振动性等问题。

[1] 张炳根等，*Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*, Marcel Dekker (1987)

[2] 李森林，温立志，《泛函微分方程》，湖南科学技术出版社(1987)

[3] 王联，王慕秋，孙振绮，唐贤瑛，《离散动力系统稳定性》，天津科学技术出版社(1988)

[4] 刘永清，宋中昆，《大型动力系统的理论与应用——分解、稳定与结构》，华南工学院出版社(1988)

[5] 张筑生，《微分动力系统原理》，科学出版社(1987)

[6] 廖晓昕，《稳定性的数学理论及应用》，华中师范大学出版社(1988)

[7] 徐远通，《泛函微分方程与测度微分方程》，中山大学出版社(1988)

[8] 《南京大学学报·常微分方程报告专辑》，数学半年刊(1987)

[9] 《数学进展》，(1987)，(1988)，(1989)

[10] 《常微分方程与控制论——武汉学术讨论会论文集，1987年11月》，华中师范大学出版社(1988)

[11] 《数学研究与评论》，(1987)，(1988)

[12] 《高校应用数学学报》，(1987)，(1988)

[13] 《应用数学》，(1988)

[14] 《数学季刊》，(1987)，(1988)

[15] 《中国科学》A辑，(1987)，(1988)

[16] 《科学通报》，(1987)，(1988)

[17] 《数学学报》，(1987)，(1988)

[18] 《数学年刊》A辑，(1987)

[19] 《数学年刊》B辑，(1987)，(1988)

[20] 《应用数学学报》，(1987)，(1988)

[21] 《系统科学与数学》，(1988)

[22] 《微分方程年刊》，(1987)，(1988)

[23] 《应用数学与力学》，(1987)，(1988)

[24] 《控制理论与应用》，(1987)，(1988)

[25] 《东北数学》，(1987)，(1988)

[26] 《生物数学学报》，(1987)，(1988)

[27] 《南京大学学报(自然科学版)》，(1987)，(1988)

[28] 《浙江大学学报》，(1987)，(1988)

[29] 《中山大学学报(自然科学版)》，(1987)，(1988)

[30] 《吉林大学学报(自然科学版)》，(1987)，(1988)

[31] 《四川大学学报(自然科学版)》，(1987)，(1988)

[32] 《西北大学学报(自然科学版)》，(1987)，(1988)

[33] 陈兰荪，《数学生态学模型与研究方法》，科学出版社(1988)

算 子 理 论

· 严绍宗

在1987～1988年期间，算子理论各个方面都取得不同程度重要而有益的进展，某些重要问题和猜测得到解决，一些新的思想、方法和工具更加广泛地融入算子理论的研究中。算子理论与代数、几何等学科的最新领域之间的联系已被人们普遍关注，出现了一系列令人瞩目的工作。现就作者所知简介如下。

近年来，非交换微分几何、非交换代数拓扑以及C^*-代数中一些深刻理论对算子理论的研究产生了直接的影响，并导致初步成效，但就目前而言，还只是专注于一些很特殊的具体算子及其所生成的C^*-代数。例如R. Ji和J. Xia合作的《关于交换子理想分类》，就是利用K-理论研究了算子代数的分类问题。J. Xia对几乎周期Toeplitz算子计算了相应的K_1-群，并证明T_ϕ在某种意义下的可逆性等价于$[\phi]$在K_1-群中的平凡性。受Connes关于foliation上指标理论的影响，E. Curto、S. Muhly和J. Xia开展了流上的Toeplitz算子及随机Toeplitz算子的研究("流"指紧Hausdorff空间X上有一个与实轴同构的连续变换群)。他们还研究了Hardy空间$H^2(R)$上以$\varphi_x(t)=\varphi(x+t)$为符号的Toeplitz算子的谱及其所生成的算子代数的性质，发现它们与X的拓扑性质有直接的联系。利用这种联系，他们计算了Toeplitz算子的指标和交换子的迹，并讨论T_{φ_x}的可逆性。1982年S. Muhly和J. Renault发现在局部紧群的子半群上定义的Wiener-Hopf算子所生成的C^*-代数$W(P)$是某群胚C^*-代数表示的像。近两年，这方面工作走向深入，群胚C^*-代数的工具在算子理论中的作用更加显得重要。1987年A. Nica注意到群胚的单位空间的闭不变子集能提供$W(P)$的理想结构的信息，从而构造了另一个有用的群胚$\mathscr{G}$，并对$\mathscr{G}$进行了深入的研究，相当于达到对$W(P)$的刻画。S. Muhly、J. Renault和D. Williams还对群胚C^*-代数的等价、同构和子代数进行了研究，得到了一系列结果。

C^n域上多变量Toeplitz算子和Hankel算子理论是当今算子理论的中心课题之一，它和K-理论、拟微分算子、非正常算子及函数论有着密切的联系。目前人们的兴趣尚在单位球、典型域、拟凸域等。N. Salinas、

· 严绍宗　复旦大学数学系教授。

A. Sheu 和 H. Upmeier 的论文《拟凸域上的 Toeplitz算子和 foliation C^*- 代数》利用 Toeplitz 算子刻画了一般拟凸域的 Koszul复形，对 Reinhardt域上 Toeplitz C^*-代数进行全面分析，并给出了指标公式。C. A. Berger、L. A. Coburn和 K. H. Zhu 对Cartan域上 Bergman 空间上Toeplitz 算子和 Hankel 算子进行系统研究，建立了这些区域上 BMO及 VMO 函数论，并发现这些函数类正好刻画了紧和有界的 Toeplitz 算子 T_f 和 Hankel算子 H_f 的符号函数的特征。他们的工作是 1986 年 S. Axler 有关工作的深入和发展。孙顺华最近也对 Axler 的有关工作进行了分析，从不同角度对类似问题进行研究，并利用对偶关系刻画了Hankel算子的紧性和有界性。与 Berger 他们的工作不同，J. Peetre 等人致力于研究多类函数空间上Toeplitz算子和 Hankel 算子属于 C_p类的符号函数的刻画。在他们的工作中，插值理论是有力的工具。在 C^n 单位球上，张根凯讨论了类似问题，将算子理论方法与插值理论有机结合起来，给出了一系列相应结果。国内从事这方面研究的还有北京大学的一些学者。

Toeplitz算子理论一方面在高维区域发展，另一方面也在平面的多连通区域不断发展，J. B. Conway 的长篇论文《平面区域上Hardy空间上某些算子的谱性质》讨论的就是一般平面区域 G 上 Hardy空间 $H^p(G)$ 上符号为有界解析函数的乘法算子 M_φ 的谱性质，得到了许多深入的结果。

关于非正常算子的研究，重点仍是次正常及亚正常算子，近两年这两类算子的研究工作很多，值得一提的是以下几方面。夏道行关于次正常算子解析模型的工作解决了自交换子为有限秩的不可约完全次正常算子的所有形式，他引入了次正常算子的Mosaic函数 $M(z)$，并讨论了它与Pincus函数的关系。杨立明证明了拟相似的次正常算子具有相同的本质谱，解决了一个关于次正常算子的多年悬而未决的重要问题。M. Martin 和 M. Putinar 关于亚正常算子的工作同样引人注目，他们的论文《亚正常算子的酉不变量》利用亚正常算子原有的一些酉不变量刻画了新的不变量，并研究不变量之间的关系。在他们的研究中，算子值的分布占有重要地位。长期来，人们希望弄清亚正常算子和次正常算子之间究竟有多大区别，其中一个很重要的问题是，在多项式运算下仍保持亚正常性的算子是否就是次正常算子。尽管这个问题至今尚未解决，但E. Curto、S. Muhly和J. Xia的工作却使我们找到了一条很可能会接近问题核心的道路。他们利用算子组定义了多种亚正常性的概念，讨论它们之间的关系，从而把多项式亚正常算子是否必为次正常算子的问题归结为关于具体的加权平移算子的同样问题。

算子组谱理论仍然是近年来算子理论的又一中心课题，Pincus 的局部指标理论取得一系列深入的结果。L. Fialkow、R. Curto 和李绍宽等人的工作使得 Taylor 谱的刻画更为精细。值得注意的是，A. Mcintosh和 A. Pryde 利用 Clifford 代数将算子组表示成单个算子，定义了谱，给出谱的性质，比较了 Taylor 谱的关系，并建立函数演算系统，他们的工作在算子方程系统求解问题中有一些应用。此外，值得一提的是，胡善文在不用算子组研究中的传统假设"重交换"的条件下，进行了算子组理论的研究。

对偶代数与算子不变子空间问题是密切联系的，自 1979年 S. Brown 技巧产生以来，它受到人们的广泛重视，其中最重要的一个问题是A 类算子是否等于A_1类算子。1983年这个猜测被完全证实，它的证明是Bercovi、Chevreau、Pearcy 等人给出的，这是对偶代数研究中一个重要进展。

我们知道，函数代数上的 Hilbert 模使许多代数概念及方法可以更广泛地引入算子理论。最近，R. G. Douglas、V. I. Paulsen、H. Sah、严克任等人在这方面做出了深入系统的工作，从对 Hilbert 模的不变量的刻画和计算到 Hilbert模上刚性定理的建立，从 Berger-Shaw 定理在高维代数中的推广到 qusi-Silov 模的研究等等。许多新问题、新概念和新方法正在产生和发展。国内，四川大学在这方面也有一些工作。

两年来，不定度规空间上算子理论也有很大发展，Louis de Bronges 的新作《平方可和幂级数》提出了一种新的 Krein空间补空间的观念。严绍宗和陈晓漫等人近年来研究 Π_K 空间上的压缩算子，建立了它的三角模型和谱分析理论。褚铁利用Π_K 上自共轭算子的三角模型研究中子迁移过程含有裂变现象（这时碰撞算子是不定的）的问题，指出并纠正了 W. Greenberg 和 C. V. M. Van der Mee原研究中的基本错误。

算子理论其他方面值得一提的结果还有：D. Hudwin和 Nordgren关于 Berger-Shaw 定理的推广，他们在自交换子为正算子与迹类算子之和的条件下，建立了类似的 Berger-Shaw 不等式；张少华得到导算子值域闭的充要条件；严绍宗和朱建中给出 Hilbert 空间有界线性算子 A 和 A^* 的二次齐次方程全部可解性及通解形式，它在算子方程解研究中是少见的；董裕孙给出积分核形式的算子为广义幂零的充要条件，即它"本质上"是 Volterra型积分算子，从而满意地回答了 Nikyleski 所提出的公开问题。国内吉林大学、南京大学、华东师范大学等校同行都分别在谱算子、非正常算子方面作出了很好的工作，作者在完成本文过程中得到他们极有益的支持和帮助，在此深表谢意。

非 线 性 分 析

· 陈文嫄

1987年在意大利"第三世界理论物理中心"，张恭庆、Ambrosetti、Ekeland等举办了一个"临界点理论及其应用"讨论班。1988年在南开数学研究所，姜伯驹、Dold主持了一个不动点国际会议。这两次活动对我国非线性分析的研究有着很大的推动作用。

变分学及其应用

张恭庆与史树中[1]得到一个缺乏紧性与凸性的局部极小极大定理。张恭庆和刘嘉荃[5]应用临界点理论讨论了一类半线性波方程无穷多解的存在性。龙以明[45]讨论了具有强迫项的超二次二阶Hamilton系统多重解的存在性。张恭庆、龙以明和E. Zehnder[8]讨论了复摆的强迫振荡问题。张恭庆讨论了调和映射的热流的整体存在性，并用此热流建立了调和映射的多重解[6]，对调和映像建立了Morse理论[7]，讨论了Nash平衡点问题[3,4,29]，讨论了Hamilton系统解的多重性及Hamilton函数的周期性的关系[5]。陈文雄、丁伟岳[13,14]讨论了关于数量曲率方程的解的存在性问题，将已有的关于曲率$R(x)$是对称的情况推广到非对称的情况，给出可解性的一些充分条件。王宏玉在博士论文(1987)中讨论了$S^2 \times S^2$上的Yang-Mills泛函的无穷多临界点的存在性。丁伟岳[18]利用变分方法给出了球面间对称调和映射存在的充要条件。张东[21]应用变分方法讨论了具临界Sobolev指数椭圆方程多解问题。蒋美跃[22]讨论了一类Hamilton系统周期解的存在性问题。王志强[27]、刘嘉荃和李树杰[23]、刘嘉荃[26]等都涉及到Morse理论及其应用。朱熹平[30]利用变分方法给出R^N中有界区域上拟线性临界增长椭圆方程Dirichlet问题的非平凡广义解的存在性。范先令[33]给出了Banach-Finsler流形上的A-proper泛函的定义和若干判别方法。吴绍平[39]讨论了一类拟线性椭圆方程的非平凡解的存在性。李树杰和刘嘉荃[22]讨论了渐近线性Hamilton系统的周期解的存在性。

拓扑方法及其应用

王志强在博士论文(1986)中对Hilbert空间在紧Lie群作用下等变算子的拓扑度进行了计算，并应用于球面上的椭圆方程多解问题。钟承奎在博士论文(1988)中将王志强的结果推广到一般Banach空间，并建立了T^2群指标理论。王乃静[31]把Leray-Schauder度缺方向性质的一个定理推广到重合度的情况，给出了一类算子方程具有非零正解的一些判别条件。孙经先[34]利用拓扑度理论研究了一类超线性算子方程特征元的全局结构。郭大钧和孙经先[35]应用拓扑度理论将Birkhoff Kellogg定理推广到全局情况，并给出了一些应用。郭大钧和V. Lakshmikantham[36]利用序Banach空间的非紧致度讨论了Banach空间中的常微分方程两点边值问题的多重正解存在性问题。程建纲在博士论文(1988)中对次凝聚映射建立了一套完整的拓扑度理论，并将该理论应用于中立型泛函微分方程，他还证明了线性映射是次凝聚的充要条件是本质谱半径小于1。杜一宏在博士论文(1988)中利用锥方法和拓扑方法研究了一个非线性固有值问题，基本上搞清了解集的结构。孙勇在博士论文(1988)中系统地研究了弱内向映射的正不动点及多重不动点问题，并部分证明了Massabo-Stuart猜想。潘兴斌[40]研究了一类非单调算子的正固有元及迭代算法，并应用于微分方程和积分方程。

算子理论与半群

陈志敏在博士论文(1988)中系统地研究了连续函数空间上的算子半群，并将所得到的结果应用于非线性抛物型方程组的三种形式的Hölder估计，推广了H. Amann的结果。张克威在博士论文(1987)中建立了一个弱-强收敛定理并应用于单调型拟线性椭圆方程组的解的存在性问题。

Galerkin 方法

汪守宏在博士论文(1988)中研究了大尺度大气运动方程解的存在性、正则性及唯一性问题。王海明在博士论文(1988)中讨论了强非线性带耗散项的波方程周期解的存在性问题。王耀东[32]讨论了可缩渗流问题解的存在性与连续性。

不动点理论及其应用

郭大钧与V. Lakshmikantham[37]利用单调迭代技巧研究了一类非线性算子的耦合不动点的存在性，并

· 陈文嫄　兰州大学数学系教授。

将其应用于具不连续右端的常微分方程的初边值问题。丁协平[38]利用Ishikawa的迭代程序构造了一类拟压缩、广义拟压缩以及拟非扩张映像的不动点，推广了一些已有的结果。张石生[41,42]讨论概率度量空间的拓扑结构和性质，并应用于概率赋范空间中线性算子的理论及概率度量空间中不动点的存在性。

凸分析及优化

史树中应用penalty方法和Ekeland变分原理证明了由强变分不等式控制的凸优化控制问题解的优化条件[11]，将Nagumo的一个定理和Browder、Ky Fan的一个定理推广到偏微分包含问题[10]，将古典的Choquet定理应用到非光滑分析中，证明了在可析Banach空间的一个开子集上，连续函数的次微分正则性、正则Gateaux可微性和严格可微性是等价的[9]。张克威在博士论文中也讨论了Nash平衡点的存在性。

其他

洪崇威利用球极投影方法研究了R^2上的给定Gauss曲率问题[17]，讨论了S^2上的Gauss曲率问题[16]。田刚讨论了Kähler流形上的Kähler-Einstein度量问题[20]讨论了一类Monge-Ampère方程解的存在性[19]。陈贵强、陆云光[44]讨论了补偿列紧法以及其对双曲守恒律的应用。李树杰和冯德兴[43]讨论了非线性种群的增长模型。

本文是在马天、汪守宏的协助下完成的。

限于作者水平，本文所述内容肯定有不当或遗漏，敬请读者谅解。

[1] Chang K.G. *et al.*, *Proc. in Honor of Ky Fan, Nonlinear and Convex Analysis, Leture Notes in Pure and Appl. Math.* 107,Dekker (1987) 211
[2] Chang K.C. *et. al.*, *Kexue Tongbao*
[3] Chang K.C.. *MSRI Publications* 12, Springer-Verlag (1988) 217
[4] Chang K.C., *CMS Report* (1987)
[5] Chang K.C., *CMS Report* (1987)
[6] Chang K.C., *Preprint Courant Institute of Math. Sci.* (1988), to appear *Analyse Nonlinear*, Insitut H. Poincare
[7] Chang K.C. *Preprint ETH Zurich* (1988)
[8] Chang K.C. *et al.*, *Preprint ETH Zurich* (1988)
[9] Shi S., *J. Math. Pures et Appl.*, **67** (1988) 411
[10] Shi S., *Nonlinear Anal.*, **12**, 9 (1988) 951
[11] Shi S., *SIAM J. Control and Opt.*, **26**, 2 (1988) 274
[12] Ding W.Y., *Comm. Math. Phys.*, **118** (1988) 641
[13] Cheng W. X. *et al.*, *TAMS*, **303** (1987) 365
[14] Cheng W. X. *et al.*, «科学通报», **33**(1988) 533
[15] Ding W.Y., *Math. Annalen*, **282** (1988) 463
[16] 洪崇威，«偏微分方程», **1**(1988) 13
[17] Hong C. W., *J. Math. Anal. Appl.*, **130** (1988) 484
[18] 田刚，«科学通报», **28** (1984) 833
[19] 田刚，*Acta Math. Sinica*, **4**, 3 (1988)
[20] Tian G., *Inv. Math.*, **89** (1987) 225
[21] 张东，*Acta Math. Sinica*, **3** (1987) 27
[22] 蒋美跃，«科学通报», **33**(1988) 325
[23] Liu J.Q. *et al.*, *ISAS* (1986/87)
[24] Liu J.Q., *ICTP* (1988)
[25] Liu J.Q., *ICTP* (1988)
[26] Liu J.Q., *ICTP* (1988)
[27] Wang Z.Q., *Lecture Notes in Math.* 1306, Springer-Verlag (1987) 244
[28] Zhang K. W., *ibid.*, 262
[29] Zhang K. W., *Acta Math. Sinica*, **4** (1988) 155
[30] 朱熹平，«中国科学»A辑，**3**(1988) 225
[31] 王乃静，«数学年刊», **8A**, 3(1987) 311
[32] 王耀东，«数学学报», **31**, 2(1988) 262
[33] 范先令，«兰州大学学报», **23**, 3(1987)1
[34] 孙经先，«数学年刊», **9A**, 3(1988) 257
[35] Guo D. J. *et al.*, *J. Math. Anal. Appl.*, **129** (1988) 231
[36] Guo D. J. *et al.*, *J. Math. Anal. Appl.*, **129** (1988) 211
[37] Guo D. J. *et al.*, *Nonlinear Anal.*, **11**, 5 (1987) 623
[38] Ding X. P., *J. Math. Anal. Appl.*, **132** (1988) 114
[39] 吴绍平，«高校应用数学学报», **3**, 3(1988) 339
[40] 潘兴斌，«计算数学», **10**, 2(1988) 129
[41] 张石生，«应用数学和力学», **9**, 2(1988) 117
[42] 张石生，«应用数学和力学», **9**, 3(1988) 193
[43] 李树杰等，«系统科学与数学», **7**, 4(1987)
[44] 陈贵强等，«科学通报», **33**, 9(1988) 641
[45] Long Y., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **310** (1988) 1
[46] Guo D. J. *et al.*, *Nonlinear Problems in Abstract Cones, Notes and Reports in Math. in Sci. and Eng.*, Vol. 5 (1988)
[47] 郭大钧，孙经先，«非线性积分方程»，山东科学技术出版社 (1987)
[48] 王宏玉，北京大学博士论文(1987)
[49] 王志强，北京大学博士论文(1986)
[50] 钟承奎，兰州大学博士论文(1988)
[51] 程建纲，兰州大学博士论文(1988)
[52] 杜一宏，山东大学博士论文(1988)
[53] 孙勇，山东大学博士论文(1988)
[54] 陈志敏，南开数学研究所博士论文(1988)
[55] 张克威，北京大学博士论文(1987)
[56] 汪守宏，兰州大学博士论文(1988)
[57] 王海明，兰州大学博士论文(1988)

微　分　几　何　学

·胡和生

微分几何是有悠久历史的重要数学学科。到了近代，几何学的研究对象有了很大拓广：从古典的三维空间发展到微分流形，从欧氏结构发展到 Riemann 结构及其推广，并建立了纤维丛及其上联络论，还分出了拓扑学作为独立的数学分支学科，出现了代数几何等边缘学科。

近半个多世纪来，微分几何实现了由局部到整体的过渡，研究的重点转向微分流形的整体性质。整体微分几何的重要地位在于：(1) 它在描述自然规律上有其特殊重要性，特别是 Einstein 的引力论以拟Riemann 流形(4 维 Lorentz 流形)为其数学形式，Yang-Mills 规范场理论的数学基础之一是纤维丛上的联络论；(2) 整体微分几何的研究揭示了局部性质和整体性质之间的极为重要的相互制约关系，微分流形的拓扑结构与可容许微分结构之间的关系；(3) 微分几何的理论基本上是非线性理论，它对促进我们对非线性现象的了解有很大的作用；(4)整体微分几何和其他数学分支间的相互作用日益加强，它对于多复变函数论、微分方程、代数几何、Lie 群、泛函分析及概率论的发展起了重要作用。

十几年来，由于整体微分几何与分析学、理论物理的相互结合，它的发展更为迅速。各个数学发达国家都投入了很大的力量从事研究。可以预期，微分几何还会有更迅速的发展，同时将在理论物理和应用物理上发挥更多的作用，从而有着重大的应用前景。

在 1986 年国际数学家大会上，整体微分几何及与整体微分几何有关的报告占了很大比重；在最近的两届 Fields 奖获奖者中，几何学家占了很大比例。这充分说明国际上对整体微分几何的重视，也说明了整体微分几何渗透到其他数学学科所产生的重大作用。现在先介绍国际数学家大会上所反映的几个结果。

1. William Meeks 介绍了近年来利用计算机图像作为工具对 R^3 中曲面的研究所取得的惊人进展，特别是在具体地制作 R^3 中新的正常嵌入极小曲面方面所取得的令人注目的成功。

200多年以来，人们只知道 3 个具有有限拓扑型的正常嵌入极小曲面，即平面、正螺旋面和悬链面。(一个曲面若同胚于一个被除掉有限个点的闭曲面，则称它具有有限拓扑型。) 利用计算机绘图，C. Costa、David Hoffman 和 William Meeks 在 R^3 中构造出无穷多个具有有限拓扑型的正常嵌入极小曲面。在这一工作中，计算机成为了解新曲面的对称性、嵌入性的有力工具。

1981年，C. Costa 首先在他的博士论文中得出了一个正常浸入的极小环面(除掉 3 个点的)，计算机所绘成的图像说明这个新曲面是嵌入，而且有一个大的对称群。Hoffman 和 Meeks利用对称性严格地证明了这个曲面确实是嵌入。这一突破使 Hoffman 和 Meeks 发现：对于每个正亏格，都有无穷族极小嵌入曲面。接着他们又用计算机把这种曲面描绘了出来，此外还得到了一系列有关的定理。关于这个发现，在 1986 年 4 月的 *Magazine Science Digest* 上有一篇很出色的文章，并载有这些曲面的彩色图像。

2.发现了浸入在 R^3 中的常平均曲率环面。H. Hopf 有如下的猜测：若Σ 是 R^n 中的紧致的具有常平均曲率的浸入超曲面，则Σ 就是一个嵌入的通常的超球面。

在假定Σ 是嵌入的前提下，A. D. Alexandroff 证明了这个猜测是成立的。

H. Hopf 本人证明：如果 Σ 是一个 S^2 到 R^3 的浸入，则这个猜测也成立。后来，项武义给出了一个S^3到 R^4 的具常平均曲率的浸入，它并不是通常球面。

至于 $n=3$ 时，Hopf 猜测是否成立，一直是一个未解决的问题。1985 年，Henry C. Wente 给出了反例，从而得知，当 $n=3$ 时，Hopf 的猜测是不成立的。

Wente 的研究首先把浸入曲面的构造归结为求解 sinh-Laplace 方程

$$\Delta\omega+\sinh\omega\cosh\omega=0。$$

利用它的任一解ω，以及曲面的第一、二基本形式

$$\mathrm{I}=ds^2=e^{2\omega}(du^2+dv^2),$$

$$\mathrm{II}=e^{\omega}(\sinh\omega du^2+\cosh\omega dv^2),$$

可以制作出平均曲率为常数的曲面。Wente的工作是证明了 sinh-Laplace 方程存在这样的双周期解ω，利用这个ω所作出的曲面正好就是浸入在R^3中的常平均曲率环面。

这种曲面的图像也已由计算机绘制出来。

3.Yang-Mills 方程的求解近年来在微分几何学中成为一个重要的问题。这次会上，获得 Fields 奖的两

· 胡和生　复旦大学数学系教授。