第一卷　目　　录

第一篇　　系统动力学

第一章　　系统的数学模型及其解

§1.1　**系统的数学模型**……(1)
（一）数学模型的建立……(1)
（二）输入、输出和状态向量……(8)
（三）系统分类……(10)
§1.2　**数学模型(11.15)的解的存在性与唯一性**……(11)
（一）解释两个条件的意义和作用……(12)
（二）存在性的证明……(13)
（三）唯一性证明……(17)
§1.3　**线性系统的解**……(18)
（一）求解齐次方程……(18)
（二）状态转移矩阵的讨论……(19)
（三）非齐次方程的解……(22)
（四）线性定常系统……(24)
§1.4　**非线性系统的解**……(26)

第二章　　系统的可控性和可及性，可重建性和可观测性

§2.1　**线性时变系统的可控性与可及性**……(27)
（一）定义……(27)
（二）线性时变系统的可控性判据……(33)
（三）线性时变系统的可及性判据……(41)
§2.2　**线性定常系统的可控性和可及性及系统的分解**……(42)
§2.3　**输出可控性与输出可及性**……(55)
§2.4　**非线性系统的可控性**(李耀华)……(58)
§2.5　**线性系统的可重建性和可观测性**……(62)
（一）定义……(62)
（二）系统可重建和可观测的判定……(64)
（三）线性定常系统……(68)

（四）不可重建系统的分解……（70）
§2.6 Kalman 对系统的分解……（73）
§2.7 应用传递矩阵分析线性定常系统的可控性与可重建性……（78）

第三章 稳定性

§3.1 Liapunov 运动稳定性……（87）
（一）引论……（87）
（二）定义……（90）
（三）判断系统稳定性的定理……（92）
（四）判断系统不稳定的定理……（98）
§3.2 Liapunov 函数的构成……（99）
（一）线性系统……（99）
（二）二次型形式的Liapunov 函数……（100）
（三）积分形式的Liapunov 函数……（101）
（四）Krasovskii 方法……（102）
（五）变量梯度法……（103）
（六）J. L. Peczkowski 方法……（104）
（七）Lur'e方法……（107）
§3.3 线性系统……（112）
（一）用状态转移矩阵来判断线性系统的稳定性……（112）
（二）线性定常系统……（115）
（三）线性时变系统……（119）
§3.4 输入—输出稳定（I/O稳定）……（123）
（一）L_p空间简介……（123）
（二）定义……（125）
（三）I/O稳定和Liapunov 稳定的关系……（128）
（四）线性系统的开环稳定……（130）
（五）线性定常反馈系统……（137）
（六）时变和/或非线性系统……（142）

第四章 系统的综合

§4.1 给定的重量矩阵和传递矩阵的实现……（149）
§4.2 重量矩阵（传递矩阵）的最小实现……（155）
§4.3 线性定常系统的反馈——极点配置问题……（161）
（一）两种反馈……（161）
（二）通过状态反馈配值极点……（192）

（三）状态反馈对传递矩阵零点的影响……(164)
（四）通过输出反馈配置极点……(165)
§4.4 状态重建模型……(170)
（一）Kalman 状态重建模 型 ……(170)
（二）Luenberger状态重建模型 ……(172)
（三）非线性系统的状态重建模型（柳显）……(174)
§4.5 线性系统的可稳定性与可获得性……(178)
（一）线性定常系的可稳定性……(178)
（二）线性定常系统可获得性……(180)
（三）状态反馈与状态重建……(184)
§4.6 系统去藕……(186)
§4.7 确定性误差的估计和过滤……(193)
（一）双通道……(193)
（二）干扰的测量……(194)
（三）应用干扰的估值V^{Δ}使干扰对输出在稳态情况下不发生影响 ……(196)

第五章　离散系统

§5.1 两种本质上有区别的时间离散系 统……(200)
（一）采样系统……(200)
（二）另一种形式的离散系统……(201)
§5.2 离散状态方程的解……(202)
（一）解的存在与唯一性……(202)
（二）线性离散系统……(203)
（三）状态转移矩阵的计算……(205)
§5.3 线性时间离散系统的可控性与可及性……(207)
§5.4 线性时间离散系统可重建性和可观测性……(212)
§5.5 Liapunov稳定性……(215)
附录Ⅰ：化线性定常系统的数学模型为正则 型……(217)
（一）可控正 则 型……(217)
（二）可重建正 则 型……(222)
附录Ⅱ：矩阵的导出范数与矩阵的 测 度……(226)
（一）导出 范 数……(226)
（二）矩阵 测 度……(227)
附录Ⅲ：第三章的 附 注……(230)

第一篇　系统动力学

本篇研究确定性集中参数低阶系统的可控性、可及性、可重建性、可观测性、稳定性（Liapunov 稳定、输入输出稳定及超稳定理论）及系统的综合（最小实现，用状态或输出反馈配置极点，状态重建，去藕理论等）等问题。

第一章　系统的数学模型及其解

§1.1 系统的数学模型

（一）数学模型的建立

系统理论要解决的任务是：针对各种类型的系统（工业、农业、商业、经济、军事、管理、交通、环保、…），根据其数学模型进行分析、综合、辨识、预测、滤波、控制、管理以及运筹、指挥决择等，在进行这些工作时，首先要做的是找出它们的数学模型。

建立数学模型有两种办法：机理法和系统辨识法；前者是根据物理定理即系统应满足的运动规律直接列出系统的运动方程，后者则是用实验方法，通过记录系统的输出、输入来确定系统的数学模型。通常是将这两种方法结合起来，即先从机理分析（有时甚至是推测）得出系统大概的模型结构，然后通过系统辨识的方法来验证模型结构的正确性和确定模型的未知参数（系数）。下面列举电路、航天、医学、社会科学、交通、环保、军事等八个数学模型，有关系统辨识问题将在第三篇详细研究。

例11.1：如图11.1所示的网络中，u_e、i_e为已知的输入电压和电流。列出节点①和②的电流平衡方程：

$$\left.\begin{aligned}(u_e-u_{C1})/R_1-C_1\dot{u}_{C1}-i_L=0\\ u_{C2}/R_2-i_e+C_2\dot{u}_{C2}-i_L=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

由C_1、C_2、L组成的回路得到：

$$u_{C1}-L\dot{i}_L-u_{C2}=0\qquad(2)$$

将上述三式加以整理：

$$\dot{u}_{C1}=-u_{C1}/R_1C_1-i_L/C_1+u_e/R_1C_1\qquad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}_{C2}&=-u_{C2}/R_2C_2+i_L/C_2+i_e/C_2,\\ \dot{i}_L&=u_{C1}/L-u_{C2}/L\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

若给出了u_{C1}、u_{C2}及i_L的初始条件及输入u_e、i_e，就可由上述的三个方程求出u_{C1}、u_{C2}及i_L来，而网络其他元件上的电流和电压也都可以由这三个参数来确定，因此这三个方程式完全描绘了这个系统的运动规律，而u_{C1}、u_{C2}及i_L则完全确定了系统的运动状态；所以，（3）及（4）称为系统的状态方程，而u_{C1}、u_{C2}及i_L则称为系统的状态变量。引入向量：

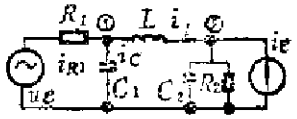


图 11.1

$$\mathbf{x}=[x_1\ x_2\ x_3]^T=[u_{C1}\ u_{C2}\ i_L]^T,\qquad \mathbf{u}=[u_1\ u_2]^T=[u_e\ i_e]^T\qquad(5)$$

及矩阵：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1/R_1C_1 & 0 & -1/C_1\\ 0 & -1/R_2C_2 & 1/C_2\\ 1/L & -1/L & 0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1/R_1C_1 & 0\\ 0 & -1/C_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

则状态方程(3)(4)可以写成矩阵形式：　　$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$　　(6)

式中$\mathbf{x}(t)$称为状态向量，$\mathbf{u}(t)$称为输入或控制向量，$\mathbf{A}$称为系统矩阵，$\mathbf{B}$称为输入或控制矩阵。输入加到系统以后，系统要对输入作出反应，根据需要，我们把某些反应量作为系统的输出，在此题中，我们把流经R_1上的电流i_{R_1}作为系统的输出，并以$y(t)$表之，则 $y=(u_c-u_{C1})/R_1=(u_1-x_1)/R_1$，写成矩阵形式就是　　$y=\mathbf{c}^T\mathbf{x}+\mathbf{d}^T\mathbf{u}$　　(7)

$\mathbf{c}^T=[-1/R_1,0,0]$称为系统的输出矩阵，$\mathbf{d}^T=[1/R_1,0]$称为影响矩阵，它表示输入$\mathbf{u}(t)$对系统输出的直接影响，我们将看到，这种影响并不是每个问题都存在的。■

方程(7)称为系统的输出方程或测量方程。系统的状态方程(6)和输出(测量)方程一起，统称为系统的数学模型。若除i_{R_1}外还把流径R_2上的电流i_{R_2}也作为系统的输出，则有$i_{R_2}=u_{C2}/R=x_2/R_2$，以$y_1(t),y_2(t)$分别表之这个系统的输出i_{R_1}，i_{R_2}，则系统有两个输出方程：　　$y_1=(-x+u_1)/R_1$，$y_2=u_{C2}/R_2=x_2/R_2$；

或写成矩阵形式：　　$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t)$　　(8)

式中：　　$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$，　$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1/R_1 & 0 & 0\\ 0 & 1/R_2 & 0\end{bmatrix}$，　$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1/R_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

有两个或两个以上的输入和输出的系统称为多输入、多输出系统或简书为$MIMO$系统(它是英文多输入、多输出的简写)。$MIMO$系统的数学模型为(6)及(8)。

若系统有n个状态变量，p个输入，q个输出，则$\mathbf{x}(t)$、$\mathbf{u}(t)$、$\mathbf{y}(t)$分别为n维、p维和q维向量，而$\mathbf{A}$为$n\times n$矩阵，$\mathbf{B}$为$n\times p$矩阵，$\mathbf{C}$为$q\times n$矩阵，$\mathbf{D}$为$q\times p$矩阵。

在上面研究的两个例子中，诸矩阵$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}(\mathbf{b})$、$\mathbf{C}(\mathbf{c}^T)$、$\mathbf{D}(\mathbf{d}^T、d)$都是由常量元素组成的，但在更一般的情况下，组成矩阵$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}(\mathbf{b})$、$\mathbf{C}(\mathbf{c}^T)$、$\mathbf{D}(\mathbf{d}^T、d)$的各元素可能是时间的函数，这时应用时变矩阵$\mathbf{A}(t)$、$\mathbf{B}(t)\langle\mathbf{b}(t)\rangle$、$\mathbf{C}(t)\langle\mathbf{c}^T(t)\rangle$及$\mathbf{D}(t)\langle\mathbf{d}^T(t),d(t)\rangle$等来代替定常矩阵$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}(\mathbf{b})$、$\mathbf{C}(\mathbf{c}^T)$及$\mathbf{D}(\mathbf{d}^T、d)$，于是，在此种情况下，简单系统的数学模型将写成：

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}(t)u(t)\qquad(9a)$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{c}^T(t)\mathbf{x}(t)+d(t)u(t)\qquad(9b)$$

而$MIMO$时变系统的数学模型将写成：

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)\qquad(10a)$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)\qquad(10b)$$

我们约定：$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}(\mathbf{b})$、$\mathbf{C}(\mathbf{c}^T)$、$\mathbf{D}(\mathbf{d}^T、d)$都是定常矩阵的系统称为定常系统，而诸矩阵中有为时变矩阵的系统称为时变系统。下面举一个时变系统的例子

例11.2：火箭运动方程。　　设在瞬时t有两个质点：一个质量为$m(t)$，绝对速度为$\mathbf{v}$；另一个质量为dm，绝对速度为$\mathbf{u}$。在$t+dt$时，这两个质点合并为一个质量为$(m+dm)$速度等于$\mathbf{v}+d\mathbf{v}$的点子。在瞬时t这两个点子的动量为：$m\mathbf{v}+\mathbf{u}dm$,而在瞬时$(t+dt)$它们的动量为：$(m+dm)(\mathbf{v}+d\mathbf{v})$，在$dt$内动量的变化为(略去高阶微量$dmd\mathbf{v}$)：

$$(m+dm)(\mathbf{v}+d\mathbf{v})-(\mathbf{u}dm+\mathbf{v}m)=md\mathbf{v}+dm(\mathbf{v}-\mathbf{u})$$

根据动量定理，动量的增量等于质点系的合力$\mathbf{F}$在时间间隔dt中的冲量$\mathbf{F}dt$：

$md\mathbf{v}+dm(\mathbf{v}-\mathbf{u})=\mathbf{F}dt$，令：$\mathbf{c}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$　则　$m(t)\dot{\mathbf{v}}-\mathbf{c}\dot{m}(t)=\mathbf{F}$　　(11)

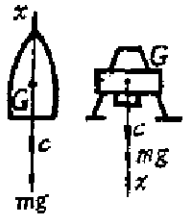
$\mathbf{c}$为质点dm相对于质点m的相对速度。以上讲的是两个质点m和dm合并的情形；当为质点分离时，从m分出一个另一个质点dm，则dm为负，(11)式变成：

$$\mathbf{F}-\mathbf{c}\dot{m}(t)=m(t)\dot{\mathbf{v}}\qquad(12)$$

质点不断从火箭喷管向外喷出，就相当于质点分离情况。所以一个垂直上升火箭的运动方程为

$$-f(x,\dot{x})-mg-(-c)\dot{m}=m\ddot{x}\Rightarrow c\dot{m}(t)-m(t)g-f(x,\dot{x})=m(t)\ddot{x} \qquad (13)$$

设铅垂向上方向为正，今相对速度向下，故应以$-c$代入(12)式。此处$f(x,\dot{x})$为空气阻力，$c\dot{m}$则为推力。请参考图11.2a



(a) (b)

图11.2

当软着陆装置徐徐降落于地球表面时(图11.2b)，其制动火箭产生的推力变成了阻力，以铅垂向下为正方向，则(12)变成

$$m(t)g-c\dot{m}(t)-f(x,\dot{x})=m(t)\ddot{x} \qquad (14)$$

(13)和(14)都是非线性时变系统模型。一般情况下，可以将线性系统和非线性系统的数学模型写成下述通式：

$$dx(t)/dt=f[x(t),\ u(t),t] \qquad (15a)$$

$$y(t)=g[x(t),\ u(t),t] \qquad (15b)$$

前者为状态方程，后者为输出方程；$x(t)$，$u(t)$，$y(t)$分别为n，p，q维向量，而f，g分别为n，q维向量函数。图11.3是线性系统(10)的方块图；而图11.4是单输入、单输出系统(9)的方块图。我们约定，方块图中，输送单变量(标量)用单线，输送向量用双线。

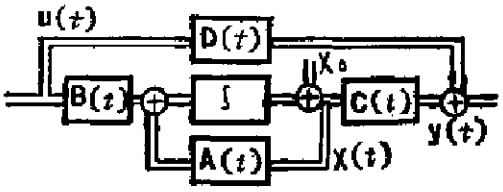


图11.3

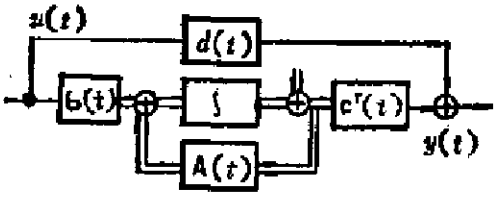


图11.4

例11.3：人体心脏血液输出的测量。确定心脏博出的血液数量是一个重要的问题，它广泛用于临床诊断、各种生理实验及心脏功能的常规测试等等，但由于在病态如中风、休克及动脉硬化情况下，脉博或血压和心脏博血量之间的关系很小，更因心脏的不可侵入性，从而使得用一种间接方法(非侵入法)来测定心脏博血量变得很为必要。

间接法中近年来有人提出用超声技术通过测量靠近皮层表面的血管血液流动来确定心脏博血量，这个方法的缺点是传感器必须和血管保持一定不变的角度，因而使得结构过于复杂。

早在1870年A.Fick即提出通过测量一个人吸入和呼出的血溶气体(blood—soluble gas)之差来估计肺血流，Fick假设这个差值就是实验时间之内在肺中溶于血液并被血液带走的气体数量，溶于血液中的气体乘上一个溶解系数就得到了肺部血流估计值，从而就可估算出单位时间内心脏的博血量。A.Zwart和O.Brovko等人完善和发展了Fick的这种思想提出了溶气法，它是应用系统辨识的方法来完成这个任务的。进行辨识时应用于呼吸道的数学模型为：

$$C_1\dot{P}_A=-\left[(1-M)\dot{V}+(1-N)\lambda_b\dot{Q}_0\right]P_A+(1-N)\ \lambda_b\sum_{j=1}^{N}\dot{Q}_jP_j+(1-M)\dot{V}P_I \qquad (16)$$

$$C_j\dot{P}_j=\lambda_b\dot{Q}_j\left[(1-N)P_A+N\sum_{k=1}^{N}P_k\dot{Q}_k/\dot{Q}_0-P_j\right],\qquad j=1,\cdots,N \qquad (17)$$

式中：C_1～肺部气体交换部份的等效气体体积

C_j～人体第j个部份等效气体体积

λ_b～血—气分离系数

M～肺部生理死区部份(未参加气体交换的部份)

N～心脏血液输出通过肺的部份

$\dot{V}$～排气(ventilaton)，体积/单位时间

N～人体分部数。

$P_I(t)$～吸入气体的局部压强

$P_j(t)$～人体第j个部份的局部压强

$\dot{Q}_j(t)$～人体第j个部份的渗透率，故$\sum_{j=1}^{N}\dot{Q}_j(t)=\dot{Q}_0$，其单位为：体积/单位时间

$P_A(t)$～呼出气体最后部份的局部压强，它非常接近于主动脉气体的局部压强

例11.4：近年来由于工业的发展，空气污染（包括有害的固体粒子，小液珠及它们的复合物等）越来越严重，为了保护人民的健康，必须对工矿企业有害排泄物进行控制以保证空气在随机状态下其污染程度低于某一水平。从1961年开始已经提出了各种基于平移扩散污染浓度分布的时空数学模型。

比较简便的是针对某一种特有的、从不同的污染源发射出来的污染。如SO_2的平移时空扩散模型，分确定性和随机两个位份，确定性部份模型（Automatica，1978，p583）为：

$$\frac{\partial C_m}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[K_x\frac{\partial C_m}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K_y\frac{\partial C_m}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z\frac{\partial C_m}{\partial z}\right]-V_x\frac{\partial C_m}{\partial x}-V_y\frac{\partial C_m}{\partial y}-V_z\frac{\partial C_m}{\partial z}$$
$$+\sum_{i=1}^{l}q_{mi}(t)\delta(x-x_i)\delta(y-y_i)\delta(z-z_i) \qquad (18)$$

式中：C_m：于位值(x,y,z)，时间t，污染浓度C_0的总体平均值。ppm

q_{mi}：污染源发射率$q_{i0}(Nm^2/s)$的总体平均值

l：污染发射源的数目

K_x、K_y、K_z：相应于x、y、z方向的紊动扩散系数，m^2/s

V_x、V_y、V_z：相应于x、y、z方向的平均风速。m/s

δ：δ函数

而对污染浓度C_0的随机分量C，满足下述方程（$IEEE.A.C.$1974年，p.904）

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[K_x\frac{\partial C}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K_y\frac{\partial C}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z\frac{\partial C}{\partial z}\right]-V_x\frac{\partial C}{\partial x}-V_y\frac{\partial C}{\partial y}-V_z\frac{\partial C}{\partial z}$$
$$+\sum_{i=1}^{l}q_i(t)\,\delta(x-x_i)\,\delta(y-y_i)\,\delta(z-z_i) \qquad (19)$$

式中q_i为q_{i0}的随机分量，风的随机分量未予考虑。

例11.5：一辆汽车通过街道，其运动规律可能是随机的，但从宏观上去研究街道上所有来往车辆，却意外地发现这个运动群体的运动规律是一个可再现的确定性过程，因而我们有可能列写出这个车流的数学模型，并应用这个数学模型进行仿真、预测、数据处理和系统分析…等等，以实现对交通的良好管制。这个例题研究城市高速干道（立交、限制进入、以保证车辆高速运行的快车道）的数学模型。我们将高速干道分成许多段，每一段长为几公里，若有进入或退出的滑车道，则以这两个滑车道为干道分段的起始点，然后再将这几公里的一段车道分成400～800公尺的小段，参见图11.5。观测时间也进行分段，每段长度固定为T，即每隔T时间取一组数据，并引入：

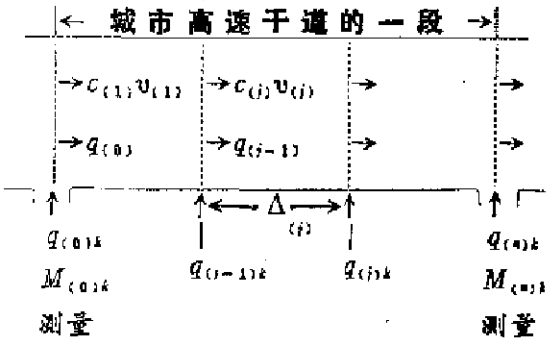


图11.5

$c_{(j)k}$：第j个小段在时刻kT的车辆密度，辆/kM，

$v_{(j)k}$：第j个小段在时刻kT的车辆平均速度，kM/h

$q_{(j)k}$：从第j个小段流入第$j+1$个小段的车流体积，即在时间间隔$kT\leqslant t<(k+1)T$除以T的时刻内，从第j个小段流入第$j+1$个小段的车辆数。辆/h

r_k，s_k：时间间隔$kT\leqslant t<(k+1)T$，从滑道进入、离开干道的车流体积

$M_{(j)k}$：横断面j处车辆在时区$kT\leqslant t<(k+1)T$内的平均速度，辆/h

通常选$c_{(j)k}$和$v_{(j)k}$作为状态变量，$q_{(j)k}$可以通过这两个变量来表示。

从简单的车辆平衡概念，不难得到j小段内，$k+1$时刻和k时刻的车流密度关系：

$$c_{(j)k+1}=c_{(j)k}+(T/\Delta_{(j)})(q_{(j-1)k}-q_{(j)k}) \qquad (20)$$

式中$\Delta_{(j)}$是第j小段干道的长度，明显地从滑车道流入和流出的车辆已在(20)右边的方括号

内加以考虑了。H.J.Payne（Simulation council proc. 1，51，1971）提出了下述关于平均速度 $v_{(j)k}$ 的递推计算方程

$$v_{(j)k+1}=v_{(j)k}+(T/\tau)[V(c_{(j)})-v_{(j)}]_k+(T/\Delta_{(j)})[v_{(j)}(v_{(j-1)}-v_{(j)})\mathrm{sat}(c_{(j-1)}/c_{(j)})]_k$$
$$+(\nu T/\Delta_{(j)}\tau)[(c_{(j)}-c_{(j-1)})/(c_{(j)}+\beta)]_k \qquad (21)$$

式中第二项的 τ 为 $v_{(j)}$ 渐近地收敛于稳态 $V(c_{(j)})$ 所花费的时间，这一项称为松弛项，它代表这渐近收敛过程对平均值的影响。（21）中第三项称为扩散项，它是考虑到速度差 $v_{(j-1)}-v_{(j)}$ 对第 j 小段的影响，车辆离开 $(j-1)$ 小段进入第 j 小段对 j 小段平均速度所作出的贡献，决定于车流数量即车流密度比。（21）中第四项称为密度梯度项，它考虑到司机的主观能动（超前作用）影响，ν 是加权敏感系数；实践证明，低密度范围内，缺少因子 β 时，模型将工作不正常。

在所研究地段首（$j=0$）尾（$j=n$）处的 q_0 和 q_n 是给定的，$q_{(j)k}$ 作为一个中间变量，参考流体力学方法将表为：
$$q_{(j)k}=\alpha(c_{(j)}v_{(j)})_k+(1-\alpha)[c_{(j+1)}v_{(j+1)}]_k \qquad (22)$$
α 为加权系数。稳态值 $V(c_{(j)})$ 可表为：
$$V(c_{(j)})=V_f[1-(c/c_{max})^l]^m \qquad (23)$$
式中 c_{max} 为挤紧密度，V_f 为密度为另时的自由速度，l、m 为正的参数。利用(22)我们可得到横断面平均速度的递推公式为：
$$M_{(j)k}=\alpha v_{(j-1)k}+(1-\alpha)v_{(j)k} \qquad (24)$$
将这一段高速干道作为一个系统来研究，我们已经得到这个系统的数学模型(20)～(24)，下面我们来确定这个系统的状态变量 x_i，输出变量 y_i 和控制（输入）变量 u_i

明显的，当车流密度 $c_{(j)k}$ 和车流平均速度 $v_{(j)k}$ 求到后，整个系统的状态就描绘出来了，因此我们选定 $c_{(j)k}$ 和 $v_{(j)k}$ 作为状态变量（$j=1$，…，n）。即状态向量：$x=[c_{(1)}, v_{(1)}, \cdots, c_{(n)}, v_{(n)}]^T$

在车流密度较低的情况下，这段干道的车流动态状况完全决定于干道始截面 $j=0$ 处的输入车辆数 $q_{(0)k}$ 及 $M_{(0)k}$，所以选 $q_{(0)k}$ 及 $M_{(0)k}$ 为输入变量或控制变量。在高密度、车流拥挤的情况下，出口处的不断增长的拥挤状态，必然反方向传播影响到后来者即整个这段干道的车辆分布。因此出口处（$j=n$）的 $q_{(n)k}$ 和 $M_{(n)k}$ 也应选作输入变量。这样输入向量 u 将是四维的：$u=[q_{(0)}, M_{(0)}, q_{(n)}, M_{(n)}]^T$。至于输出变量可以根据需要来选取，但它必须是可以测量的，现选 $q_{(j)k}$ 和 $M_{(j)k}$ 作为输出变量，即输出向量 y 为：$y=[q_{(j)}, M_{(j)}]^T$，这样，将(22)代入（20），（23）代入(21)得到系统的状态方程为：
$$x_{k+1}=f(x_k,u_k,\Theta) \qquad (25)$$
由（22）和(24)可得到系统的输出方程为：
$$y_k=g(x_k,\Theta) \qquad (26)$$
（25）（26）中的 $\Theta=[V_f,c_{max},l,m,\alpha,\beta,\nu,\tau]^T$，这些参数需要通过测量输出参数 y 用系统辨识的方法（见本书第三篇）加以确定，至于长度 $\Delta_{(j)}$ 和离散时间间隔 T 则是事先近似地选定，然后在辨识中加以检验。

例11.6：商业系统模型。设一批货物的成本为 C（包括生产、运输、仓储管理等），出售后的总收入为 R，则利润 $P=R-C$。货物的价格 p 是销售量 x 的函数 $p=p(x)$，这个函数称为需求函数，就整个市场来说，价格高需求量就减少，价格低时需求量就高，所以需求函数 $p(x)$ 是 x 的渐减函数。如果它是线性函数时，则其斜率为负，即 $p(x)=-ax+b$，$(a>0)$，而总收入：$R=xp(x)=-ax^2+bx$。货物的成本 C 由不变成本 FC 和可变成本 CV 两部份组成 $C=VC+FC$，如对农作物的成本，土地、工具的花费是不变成本，它是一个常数，而播种、肥料、收获的花费是可变成本，它是数量 x 的函数。

如果我们要问对某一货物销售量 x 多大才能使利润 P 达到最大？则由 $P=R-C$，对

x求导；由$\dot{P}=0$得到　　$\dot{R}=\dot{C}$　　（27）

这个公式乃古典经济学中使利润达到最大的一个基本关系式。

例11.7：城市动力学模型 —Forrester模型

我们知道，马尔赛斯人口论（人口按几何级数增加）用数学方程描述出来就是$\dot{x}=ax$。又如：我们设某城市每年有前一年4%的人口离开这个城市，又有前一年2%的人口数从全国其他城市迁入，若假定每年人口自然增长率为1%，试求出这个城市人口的增长规律。

设　$x_{(1)k}$～该城市k年的人口数，　$x_{(2)k}$～全国除该城以外的人口数。

则不难得到k年和$k+1$年该城人口和全国人口的关系式：

$x_{(1)k+1}=1.01[(1-0.04)x_{(1)k}+0.02x_{(2)k}]$；$x_{(2)k+1}=1.01[0.04x_{(1)k}+(1-0.02)x_{(2)k}]$

将上式写成矩阵形式就是：$X_{k+1}=AX_k$，明显地，它和马氏人口模型是相同的。

在前人工作的基础上，美国麻省理工学院的J、W、Forrester（他有专著　Urban Dynamics 1969及Industrial Dynamics 1961)根据资本主义世界的城市情况（他将城市分为商业、人口、住宅三个部份，每个部份又分为三个等级，如人口部份分为管理人员，工人，失业者三个等级，并假定工人和失业者之间可以互相流动，而管理人员向工人的流动则忽略不计）提出了一个数学模型、对城市进行动态分析。它的模型是一组一阶非线性微分方程：

$$dy_i/dt=y_i(t)[K_{i+}a_{i+}-K_{i-}a_{i-}]\qquad(28)$$

$y_i(t)$是输出变量，它是根据需要确定的，如人口数量等等。K_{i+}（K_{i-}）表示y_i的名义百分比增长率(减少率)。a_{i+}(a_{i-})是修正系数，它根据在系统(城市)中存在的条件，改进、修正名义增长(减少)率，a_{i+}(a_{i-})是一系列修正因子的乘积，每个因子代表一个因素（如人口问题中住房的多少的影响)通常取　$a_{i+}=\Pi_{k=1}^{l}M_{jk+}(y,u)$　$a_{i-}=\Pi_{k=1}^{l}M_{jk-}(y,u)$　（29）

u代表外界影响，(29)(28)只是Forr-ester模型的一种简单形式。因为a_{i+}只是y的显函数，并且没有考虑诸如社会上信号流动所需的时间在方程中造成的时间滞后。

例11.8：兰切斯特方程(见$E.C.$温特切勒，"现代武器运筹学导论"周方等译校，p.203)

我们来研究最简单的一种战斗模型。　设红、兰双方进行对阵，红方有N_1个同类战斗单位(如坦克、飞机、军舰、导弹等)，兰方有N_2个同类战斗单位，但兰方的战斗单位不一定与红方的战斗单位同类（例如飞机可以同坦克或军舰对战，等等）我们先作下述假设

（1）每一方的每一个战斗单位在未被击毁的情况下所进行的每次射击都构成一个具有某一平均发射率的泊松事件流（随机时间系列）。

参加战斗的每一个战斗单位所实施的射击组成的系列都可看作是一个事件流，如果假定它为泊松事件流则将大大简化对战斗模型的研究。我们称无后效的普通事件流为泊松事件流，它指的是在给定的时间τ内发生的事件(射击)的次数服从泊松分布，泊松分布的概率公式为：

$$P_m=a^m e^{-a}/m!\qquad(30)$$

式中：m～时间间隔τ内发生的事件(射击)数；a～时间间隔τ内的平均事件数；

λ～单位时间内的平均事件数，故有：$a=\int_t^{t+\tau}\lambda(t)dt$，当$\lambda$=常数时的泊松事件流称为平稳泊松事件流或最简单的事件流，此时$a=\lambda\tau$

应该指出的是：当用一门武器（如一门炮）进行射击时，不可能准确地构成泊松射击事件流，但概率论中业已证明，若干个互相独立的随机事件流叠加所形成的事件流近似于泊松事件流。因此，当若干门炮对同一目标进行射击时，该目标所受到的总射击流完全可以看作是泊松事件流，实践证明，即使是同一门炮并具有显著后效性的情况下、将射击事件流看作

是泊松事件流时，对计算结果也并无多大影响。

如果某次射击击毁了目标，我们就称这次射击为成功射击，显然，成功射击本身也构成一个事件流，如果射击流是泊松事件流，且各次射击中“击毁目标”或“未击毁目标”是互相独立的事件，则成功射击流也将是泊松事件流；若令p为一次射击中击毁目标的概率，则成功射击流密度（它好比是武器的“有效发射率”）Λ和原射击流的密度λ之间的关系为：

$$\Lambda=p\lambda \tag{31}$$

（2）每一方的任何一个战斗单位可以向对方的任何一个战斗单位进行射击，一次射击最多只可能击毁对方一个战斗单位。

（3）如果击毁了某个战斗单位，则立即瞬时地将火力转移到另一尚未摧毁的战斗单位。被击毁那个战斗单位不再参加战斗。

（4）与总的战斗持续时间相比，炮弹(或其他飞行器)飞到目标的时间很短，可以忽略不计。

（5）在任一时刻每一方的总战斗力（即所剩战斗单位的总的平均发射率）与战斗单位剩存数的平均值(数学期望值)成比例，而不是与战斗单位实际剩存数（它是一个随机数）成比例。

在有大量战斗单位参加战斗的情况下，尤其是在战斗初期，每一个战斗单位被击毁或不被击毁的随机性对总战斗力并不产生多大影响，因此实际总战斗力很接近于它的平均值。只有在战斗临近结束时，一方或双方所剩存的战斗单位寥寥无几，每一战斗单位被击毁或不被击毁的随机性才显示出来。

在上述假设的基础上，我们来推导作战双方在任意时刻t的**平均实力**的数学方程，它能大致地予计战斗的发展进程。

红(兰)方一个战斗单位平均发射率用λ_1(λ_2)表示，一个战斗单位每一次击毁目标的概率为p_1(p_2)，则由(31)，红兰双方成功射击流的密度为：

$$\left.\begin{aligned}\Lambda_1&=\lambda_1 p_1\\ \Lambda_2&=\lambda_2 p_2\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

设在时刻t，红方有$x_1(t)$个战斗单位，兰方有$x_2(t)$个战斗单位。每一个兰方战斗单位在时间间隔Δt内平均实施$\Lambda_2\Delta t$次成功射击，每一次成功射击击毁一个而且只击毁一个红方战斗单位。用$\Delta x_1(t)$表示Δt内产生的$x_1(t)$的增量，则明显地应有：$\Delta x_1(t)=-\Lambda_2 x_2(t)\Delta t$　上式两边同除以Δt，并令$\Delta t\to 0$，即得到$x_1(t)$应满足的微分方程为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=-\Lambda_2 x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)&=-\Lambda_1 x_1(t)\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

同理对x_2：

我们已假定战斗开始前，红、兰一方分别有N_1和N_2个战斗单位，故(33)的初始条件为$x_1(t_0)=N_1$，$x_2(t_0)=N_2$。(33)就是有名的兰切斯特方程。（33）式并未考虑到战斗时的实力补充。如进一步假定红(兰)方在每单位时间内将有$u_1(t)$($u_2(t)$)个单位投入战斗，则(33)式将变成：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=-\Lambda_2 x_2+u_1\\ \dot{x}_2&=-\Lambda_1 x_2+u_2\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

引入符号：$\mu_1=\Lambda_1 N_1/N_2$，$v_1=u_1/N_1$，$z_1=x_1/N_1$，$\mu_2=\Lambda_2 N_2/N_1$，$v_2=u_2/N_2$，$z_2=x_2/N_2$，

则(34)变成

$$\left.\begin{aligned}\dot{z}_1(t)&=-\mu_2 z_2(t)+v_1\\ \dot{z}_2(t)&=-\mu_1 z_1(t)+v_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \dot{\mathbf{z}}=\mathbf{A}\mathbf{z}+\mathbf{b}\mathbf{v},\ \left\{\begin{aligned}\mathbf{A}&=\mathrm{diag}[-\mu_1,-\mu_2]\\ \mathbf{v}&=(v_1,v_2)^T\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

μ_1的物理意义：μ_1的分子$\Lambda_1 N_1$为战斗开始时红方在每单位时间内所实施的平均成功射击数，即所击毁的平均兰方战斗单位数。将$\Lambda_1 N_1$除以N_2即得到战斗开始时红方在每单位

时间内所击毁的相对兰方平均战斗单位数，μ_2也有相同的物理意义。

我们称 μ_1为红方对兰方的抗击强度特征。引入：

$$\eta=(\mu_1/\mu_2)^{1/2} \tag{36}$$

则参数 η 称为红方对兰方的优势系数，$\eta>1$表红方实力超过兰方，战斗经过若干时间后将以红方获胜而告终。$\eta<1$ 表示兰方实力超过红方，$\eta=1$ 表示双方势均力敌，胜负难分。

方程(35)是在若干假设的前题下得到的，它只考虑了武器一个因素，而忽略了人的作用，因此其结果只能作为参考。但主要应看到的事实是，一个战斗过程经过若干假定以后也可以用数学模型表示出来。不尚空谈，首先建立系统的数学模型，然后定量地分析系统过去和现在的行为，预测将来动态，判断其好坏优劣，进行控制、管理，正是现代系统工程理论的特点。

（二）输入、输出和状态向量

在数学模型中，对输入、输出和状态变量这三个量我们来解释一下，从外部加到系统的物理量称为系统的输入。在输入的作用下，系统内部发生反应的物理量可以根据需要和实际情况选作系统的输出，输出量应该是可量测的。通常在机电系统中我们都是以速度，加速度、位移、角位移、速度、角加速度及电流、电压等等作为系统的状态变量，它们直接或间接代表着系统能量的大小。所以状态向量$x(t)$的大小表征着系统能量的分布状态，如果在初始时刻t_0，其能量分布状态为$x(t_0)$，在$t>t_0$的某个时刻t，系统的能量分布状态变为$x(t)$，则由能量不灭定律，系统能量的增加或减少，即$x(t)$的变化都是输入$u(t)$作用的结果，所以从物理意义上说，知道了初始时刻t_0系统能量的分布状态$x(t_0)$及大于t_0以后的输入$u[t_0,t]$就应该能够确定任意时刻$t>t_0$的能量分布状态$x(t)$，从而求到相应时刻的输出$y(t)$。

数学运算正好证实了上述物理过程。前面已经说过，一般情况下，系统的数学模型可用(15)来表示，若方程(15a)的解存在且唯一，将这个方程积分便得到：

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(x(\tau),u(\tau),t)d\tau \tag{37}$$

可见，只要知道了初始状态$x(t_0)$及$t\geqslant t_0$的输入$u[t_0,t]$，就可以从(37)式求到$x(t)$，从而由(15b)确定系统的输出$y(t)$。至此，我们可以对状态向量及状态变量下一个定义：

定义11.1：一个向量$x(t)$，如果知道了它在初始时刻t_0的值$x(t_0)$及$t\geqslant t_0$的输入$u[t_0,t]$，就能完全确定系统的输出$y(t)$，则这个向量$x(t)$称为状态向量，它的分量x_i称为状态变量。

状态向量$x(t)$有n个分量$x_i(t)$，$i=1,2,\cdots,n$；$x(t)$可以表述为n维空间的一个向量$\overrightarrow{op}$，o点是坐标的原点，p点的坐标值就是$x_i(t)$，这个空间称为状态空间。当时间t发生变化时，系统的状态跟着发生变化，每一个瞬时$t_0,t_1,t_2,\cdots$，相应地在状态空间可以找到一个点$p_0,p_1,p_2,\cdots$，而：$x(t_0)=\overrightarrow{op_0}$，$x(t_1)=\overrightarrow{op_1}$，$x(t_2)=\overrightarrow{op_2}$，……。

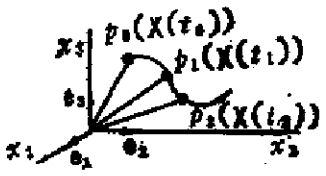


图 11.6

将$p_0,p_1,p_2,\cdots$这些点连接起来构成的曲线称为系统的运动轨迹，参见图11.6

当状态变量$x_i(t)$的数目等于2，状态空间变成了一个平面，状态平面又称为相平面，这时的系统运动轨迹简称为相迹。请读者不要把系统在状态空间的运动轨迹和它在真实空间的运动轨迹混同起来，这是完全不同的两码事。下面对状态向量作两点重要的说明：

（1）系统的状态向量并不是唯一的，同一系统可以选择不同的状态变量：图11.7b所示

的 $R-C$网络，对回路①和节点①列方程

$$\dot{i}_L = -u_c/L + u/L$$
$$\dot{u}_c = +i_1/C - u_c/RC$$

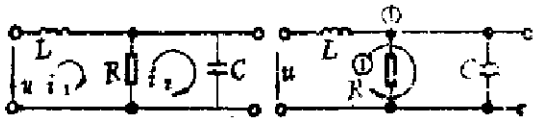


图11.7(a)　　图11.7(b)

如选i_L、u_C作为状态变量，u_C作为输出，并令$x_1=i_L$，$x_2=u_C$，$y=u_C=x_2$，则上式可书为：

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}u,\quad y=\mathbf{c}^T\mathbf{x}\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -1/L\\ 1/C & -1/RC\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1/L\\ 0\end{bmatrix},\ \mathbf{c}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \tag{38}$$

若选回路电流i_1、i_2作为状态变量，（参见图11.7a）又得到一组状态方程：

$$\dot{i}_1=-i_1R/L+i_2R/L+u/L,\quad \dot{i}_2=-i_1R/L+[R/L-1/RC]i_2+u/L$$

令$x_1'=i_1$，$x_2'=i_2$，输出仍为$u_C=R(i_1-i_2)$，并令$y=u_C$，则又可得到这个系统的另一个数学模型：

$$\dot{\mathbf{x}}'=\mathbf{A}'\mathbf{x}'+\mathbf{b}'u,\qquad y=\mathbf{c}'^T\mathbf{x}' \tag{39}$$

$$\mathbf{A}'=\begin{bmatrix}-R/L & R/L\\ -R/L & R/L-1/RC\end{bmatrix},\ \mathbf{b}'=\begin{bmatrix}1/L\\ 1/L\end{bmatrix},\qquad \mathbf{c}'=\begin{bmatrix}R\\ -R\end{bmatrix}$$

同一系统的两个数学模型(38)、（39）必然存在着某种联系，因

$$\left.\begin{matrix}i_L=i_1\\ u_C=R(i_1-i_2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x_1=x_1'\\ x_2=R(x_1'-x_2')\end{matrix}\right\}\Rightarrow\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{x}',\text{而}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ R & -R\end{bmatrix}$$

此$\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{x}'$就是两组状态向量之间的联系，以之代入（38）

$$\dot{\mathbf{x}}'=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{x}+\mathbf{T}'^{-1}\mathbf{b}u,\qquad y=\mathbf{c}^T\mathbf{T}\mathbf{x}' \tag{40}$$

比较(40)和(39)有：

$$\mathbf{A}'=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T},\ \mathbf{b}'=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{b},\ \mathbf{c}'^T=\mathbf{c}^T\mathbf{T} \tag{41}$$

这个结果不难推广到多输入、多输出的时变系统（10），引入变换

$$\mathbf{x}=\mathbf{T}(t)\mathbf{x}'\Rightarrow\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{T}(t)\dot{\mathbf{x}}'+\dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{x}' \tag{42}$$

以之代入(10)第一式并和

$$\dot{\mathbf{x}}'=\mathbf{A}'(t)\mathbf{x}'+\mathbf{B}'(t)\mathbf{u},\qquad \mathbf{y}=\mathbf{C}'(t)\mathbf{x}'+\mathbf{D}'\mathbf{u} \tag{43}$$

相对比便得到：

$$\left.\begin{matrix}\mathbf{A}'(t)=\mathbf{T}^{-1}(t)[\mathbf{A}(t)\mathbf{T}(t)]-\dot{\mathbf{T}}(t),\ \mathbf{B}'(t)=\mathbf{T}(t)^{-1}\mathbf{B}(t)\\ \mathbf{C}'(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{T}(t),\qquad\qquad \mathbf{D}'(t)=\mathbf{D}(t)\end{matrix}\right\} \tag{44}$$

此外还可推出：

$$\boldsymbol{\Phi}'(t_1,t_0)=\mathbf{T}^{-1}(t)\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0)\mathbf{T}(t) \tag{45}$$

$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Phi}')$称为状态转移矩阵，下一节将要谈到。数学模型之间的这种变换称为相似变换，其特点是变换矩阵$\mathbf{T}$必须是非奇异的，且两个系统的输入、输出不变，只有状态变量发生变化。系统数学模型之间的相似变换可以理解为该研究系统的参考坐标系之间的变换，为此将状态向量$\mathbf{x}(t)$改写为：

$$\mathbf{x}(t)=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n,\qquad \mathbf{e}_i=[0,\cdots,1,0,\cdots,0],\ i=1,\cdots,n \tag{46}$$

（第i个元素）

$\mathbf{e}_i$为n维状态空间的一组自然坐标基，因$n\times n$矩阵$\mathbf{T}$是非奇异矩阵。设$\mathbf{t}_1$，…，$\mathbf{t}_n$为$\mathbf{T}$的n个线性无关的列向量，即$\mathbf{T}=[\mathbf{t}_1,\cdots,\mathbf{t}_n]$，则(42)的右边等式可改写为：

$$\mathbf{x}=x_1'\mathbf{t}_1+\cdots+x_n'\mathbf{t}_n \tag{47}$$

n个线性无关的列向量$\mathbf{t}_1$，…，$\mathbf{t}_n$，构成n维状态空间的一组坐标基。$x_i'(t)$是$\mathbf{x}(t)$在相应的坐标轴上的坐标。(46)和(47)说明：同一状态向量$\mathbf{x}(t)$对两组不同的坐标基$(\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n)$和$(\mathbf{t}_1,\cdots,\mathbf{t}_n)$列出的分量表达式，请参见图11.8。因此同一系统的两个相似数学模型可以理解为**在不同参考系上**对系统列出的方程。

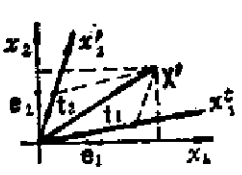


图11.8

（2）状态变量的数目应当是最少的。怎样选取状态变量才是数量最少的呢？答复是："当状态方程中各个一阶微分方程彼此线性无关时，则所选取的状态变量就是最少的。"

刚体作机械运动时，每一个自由度可以列出一个二阶微分方程，选取2个状态变量；以空间飞行器为例，其质心运动有三个自由度，就将得到六个状态变量；如果再考虑到转动的三个自由度，则应有12个状态变量。在电气网络分析中，通常取电感上的电流i_L、和电容两端的电压u_C作为状态变量。如图11.9所示的网络中，有七个储能元件，但由于L_2，L_3，L_4相交于一个结点，C_1，C_2，C_3及L_1，C_1分别构成闭合回路，所以只能得到4个线性无关的一阶微分方程。因而状态变量只能有4个，取L_1，L_2上的电流作为状态变量x_1，x_2；C_1，C_2的端电压取作为另外两个状态变量x_3，x_4；L_4上的电流写作i_{L4}，则由回路①、②、③（参见图11.9）：

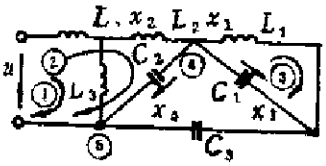


图11.9

$$\left.\begin{aligned} &L_4\dot{i}_{L4}+L_3(\dot{i}_{L4}-\dot{x}_2)=u \\ &L_2\dot{x}_2+L_4\dot{i}_{L4}+x_4=u,\quad L_1\dot{x}_1=x_3 \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

由节点④和节点⑤：

$$\left.\begin{aligned} &C_2\dot{x}_4+C_2\dot{x}_3+x_1-x_2=0 \\ &(C_2+C_3)\dot{x}_4-C_3\dot{x}_3-x_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

由(49)求解$\dot{x}_3$和$\dot{x}_4$，由(48)消去$\dot{i}_{L4}$，即可求到它的状态方程组。

(三)系　统　分　类

可以从各种不同的角度对系统进行分类：

1.记忆系统与非记忆系统　如果一个系统在某一瞬时t_1的输出$\mathbf{y}(t_1)$仅与这个瞬时的输入$\mathbf{u}(t_1)$有关，而与输入向量函数$\mathbf{u}(\cdot)$在此瞬时之前$t_{-1}<t_1$或这个瞬时之后$t>t_1$的变化情况无关，这样的系统便叫做非记忆系统。

典型的非记忆系统例子就是仅仅由欧姆电阻组成的网络。欧姆电阻上的电压和电流只与外加电压或电流的瞬时值有关，它本身不能储存电能，当外加电压或电流消失的瞬时，电阻上的电压和电流随之消失。另外一种系统，它包含有储能元件：如电感、电容、弹簧、具有质量及转动惯量的机械元件等，当输入停止以后，依靠储能元件储备的能量，能使系统继续发生运动，在$t=t_1$瞬时，系统的输出$\mathbf{y}(t_1)$不仅与输入的瞬时值$\mathbf{u}(t_1)$有关，也与t_1以前$(t_{-1}<t_1)$的$\mathbf{u}(\cdot)$的值有关，这种系统称为记忆系统或能储存能量的系统，在这儿，把能量的储存或积蓄理解为信息的记忆。

非记忆系统称为静态系统，它是由代数方程描述的，而记忆系统称动态系统(严格地说，输出$y(t_1)$只与$\mathbf{u}(t_1)$及$\mathbf{u}(t_{-1})$有关而与$\mathbf{u}(t>t_1)$无关的系统称动态系统）它是由微分方程描述其运动状态的。通常称由常微分方程描述的系统为有限维系统，由偏微分方程描述的系统为无限维系统，常微分方程的阶数就是有限维系统状态向量的维数。

2.时间连续系统与时间离散系统　一个时间函数$f(t)$的定义域是连续或离散的称为时间连续或时间离散函数。一个时间函数$f(t)$的值域是连续或离散的称为幅值连续或幅值数值化函数。根据系统中出现的时间函数是连续的抑或离散的，相应地称为时间连续系统或时间离散系统。

3.线性系统与非线性系统　当输入或初始状态线性叠加时，系统的输出也线性叠加就称为叠加原则，这个原则乃是划分系统为线性或非线性的出发点。

定义11.2：一个非记忆系统称为线性的，如果对每一个$t\in T$，每一个$\mathbf{u}^{(1)}(t)$、$\mathbf{u}^{(2)}(t)\in U$及每一个k_1、$k_2\in R$，输出$\mathbf{y}(t,k_1\mathbf{u}^{(1)}(t)+k_2\mathbf{u}^{(2)}(t))=k_1\mathbf{g}(t,\mathbf{u}^{(1)}(t))+k_2\mathbf{g}(t,\mathbf{u}^{(2)}(t))$

成立。此处g的意义同(15b)

例11.9：用直线方程$y(t)=y_0+k_0u(t)$所描述的系统却是非线性的，这是因为$g(ku(t))=y_0+kk_0u(t)$，而$kg(u(t))=k[y_0+k_0u(t)]$；二者不相等于是定义11.2不成立故也

定义11.3：一个动态系统称为线性的，如果对每一个t、$t_0\in T(t>t_0)$，对两个不同的输入函数$u^{(1)}(\cdot)$、$u^{(2)}(\cdot)\in U$，对两个不同的初始状态$x_0^{(1)}$、$x_0^{(2)}\in X$，及对每一个k_1、$k_2\in\mathcal{O}$（复数集合），下述关系成立：

$$g(t,t_0,k_1x_0^{(1)}+k_2x_0^{(2)},k_1u^{(1)}[t_0,t]+k_2u^{(2)}[t_0,t])$$
$$=k_1g(t,t_0,x_0^{(1)},u^{(1)}[t_0,t])+k_2g(t,t_0,x_0^{(2)},u^{(2)}[t_0,t]) \quad (50)$$

例11.10：数学模型为(10)的系统是线性系统。设状态方程(10a)的解存在且唯一（证明见§1.2），$y^{(1)}$，$y^{(2)}$是相应于输入函数$u^{(1)}$、$u^{(2)}$及状态向量$x^{(1)}$、$x^{(2)}$的输出函数。根据定义11.3，欲证明这个给定的系统是线性的，就是要证明：当输入为 $u=k_1u^{(1)}+k_2u^{(2)}$，初始状态为 $x(t_0)=k_1x^{(1)}(t_0)+k_2x^{(2)}(t_0)$时，

输出相应地变成： $y(t)=k_1y^{(1)}(t)++k_2y^{(2)}(t)$。

因为我们假定状态方程的解存在且唯一，则当输入函数为$u^{(1)}(t)$和初始状状态向量为$x^{(1)}(t_0)$时，状态方程的解一定是$x^{(1)}(t)$。当输入为$u^{(2)}(t)$初始条件为$x^{(2)}(t_0)$其解为$x^{(2)}(t)$。则应用(10a)可得：

$$k_1\dot{x}^{(1)}+k_2\dot{x}^{(2)}=A(t)\{k_1x^{(1)}+k_2x^{(2)}\}+B(t)\{k_1u^{(1)}+k_2u^{(2)}\}$$

此式说明：当输入为 $u=k_1u^{(1)}+k_2u^{(2)}$，初始条件为 $x(t_0)=k_1x^{(1)}(t_0)+k_2x^{(2)}(t_0)$时，方程(10a)的解为 $x(t)=k_1x^{(1)}(t)+k_2x^{(2)}(t)$，将这个结果代入(10b)即不难得到我们所要证明的结论。

4．**定常系统与时变系统** 先介绍一下函数平移的意义和书写方法，若Δ为任意的正实数，则$u(t-\Delta)$的图像是$u(t)$的图像沿t轴正方向平移Δ的结果，并以$z^{\Delta}u$来表示$u(t-\Delta)$。

定义11.4：一个动态系统称为定常的，若其输出满足

$$g(t,t_0,x_0,u[t_0,t])=g(t+\Delta,t_0+\Delta,z^{\Delta}u[t,t]) \quad \blacksquare$$

也就是说：当输入函数平移一段时间Δ后，定常系统的输出也平移同样一段时间。通俗一点解释就是：不论何时，同样的输入，作用在同一系统之上，其输出是相同的。

例11.11：数学模型为(6)(8)的系统是定常系统。此结论将在§1.3的最后进行证明。

5．**确定性系统和随机系统** 其输入及参数均为确定性（非随机）变量的系统称为确定性系统，它是可再现的。输入或参数为随机变量的系统称为随机系统，(19)式代表的就是随机系统。

§1.2数学模型(11.15)的解的存在性与唯一性

一般情况下系统的数学模型(11.15)有两组方程。前者为一阶微分方程组，而后者为代数方程组，先要从(11.15a)求到$x(t)$，才可以由(11.15b)求$y(t)$，所以下面先讨论如何求解微分方程组(11.15a)。

定义12.1：时间区间$[t_1,t_0]$上的一个**连续**函数$\varphi(t,t_0,x(t_0),u[t_0,t_1])$称为方程(11.15a)的解，如果下式成立。

$$\dot{\varphi}(t,t_0,x(t_0),u[t_0,t_1])\equiv f(\varphi(t,t_0,x(t_0),u[t_0,t_1]),u(t),t) \quad \blacksquare$$

从能量的观点说来，如果已知系统的初始能量分布状态$x(t_0)$，则在已知的输入函数$u(t)$的作用下，在区间$[t_1,t_0]$上，系统每一个时刻的能量分布状态$x(t)$也应该是已知的和唯一地确定的，这就是说，作为描述系统运动规律的状态方程(11.15a)当已知初始条件$x(t^0)$

和输入$u(t)$的情况下在区间$[t_a,t_b]$上，应该存在一个解，且只存在一个解；这就是所谓解的存在与唯一性问题，如果满足下面的两个条件，则方程（11.15a）的解存在且唯一。

定理12.1：对状态方程(11.15a)，如果：

1）f对时间t而言，是在区间$[t_a,t_b]$上只有有限个第一类不连续点的有界函数

2）f对$x(t)$而言，满足全局Lipshitz条件，即存在一个实数$L>0$，使得$\forall t\in[t_a,t_b]$，$\forall u(t)\in U$，$\forall x(t)\in X$（此处X为状态空间，U为容许控制集合），对**任意**两个状态向量$x^{(1)}(t)\in X$，$x^{(2)}(t)\in X$，下述不等式成立

$$\|f(x^{(1)}(t),u(t),t)-f(x^{(2)}(t),u(t),t)\|\leqslant L\|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)\| \qquad (1)$$

则 $\forall x(t_0)\in X$，$\forall t_0\in(t_a,t_b)$，$\forall u(t)\in U$，方程(11.15a)存在唯一的一组解

（一）先来解释这两个条件的意义和作用

1. 函数$f(t)$在$t=c$这一点，如果$\lim_{t\to c+0}f(t)$与$\lim_{t\to c-0}f(t)$都存在，但不等于$t=c$这一点的函数值$f(c)$，则$t=c$这一点称为$f(t)$的第一类不连续点。在时间间隔(t_a,t_b)上，f的第一类不连续点可能是由f_i本身的性质产生的，也可能是输入$u_j[t_0,t_f](t_0,t_f\in[t_a,t_b)$ $j=1,\cdots,p$)具有第一类不连续点的缘故。

如线性时变系统的状态方程（11.10a）当固定$x(t)$，要求f_i是分段连续的，则$u_j(\cdot)(j=1,2,\cdots,p)$及$A(\cdot)$，$B(\cdot)$的各个元素$a_{ij}(\cdot),b_{ij}(\cdot)$都应是分段连续的有界函数。

实际问题中，多是输入函数$u(\cdot)$的各个分量$u_j(\cdot)$有第一类不连续点存在，如系统的输入电压是矩形脉冲，在起动和停止工作时突然合上或拉开闸刀，系统有阶跃输入，都属于这种情况。

2．下面解释Lipschitz条件。当(11.15a)为标量方程时，Lipschitz条件(1)变成

$$\left|\frac{f(x^{(1)}(t),u(t),t)-f(x^{(2)}(t),u(t),t)}{x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)}\right|\leqslant L>0$$

它说明$f(x(t),u(t),t)$对x是连续的，且$(\partial f/\partial x)$存在，因为根据中值定理，$f(x(t),u(t),t)$在闭区间$[x^{(1)}(t),x^{(2)}(t)]$连续，开区间$(x^{(1)}(t),x^{(2)}(t))$可导，则必：

$$\frac{f(x^{(1)}(t),u(t),t)-f(x^{(2)}(t),u(t),t)}{x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*(t),u(t),t} \qquad x^{(1)}\leqslant x^*\leqslant x^{(2)}$$

成立，由此得到：

$$\left|\frac{f(x^{(1)}(t),u(t),t)-f(x^{(2)}(t),u(t),t)}{x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)}\right|=\left|\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*(t),u,(t),t}\right|\leqslant L$$

一般情况下，当$\partial f_i/\partial x_j(i,j=1,\cdots,n)$存在且有界时，$f(x(t),u(t),t)$必满足Lipschitz条件。根据中值定理，f的某一个分量$f_i(x(t),u(t),t)(i=1,2,\cdots,n)$在闭区间$[x^{(1)}(t),x^{(2)}(t)]$连续，开区间$(x^{(1)}(t),x^{(2)}(t))$可导，则必存在一个$x^*(t)$：

$x^{(1)}(t)\leqslant x^*(t)\leqslant x^{(2)}(t)$，使得下式成立。

$$f_i(x^{(1)}(t),u(t),t)-f_i(x^{(2)}(t),u(t),t)=f_{ix}^T(x^*)[x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)] \qquad (2)$$

此处 $i=1,\cdots,n$ $f_{ix}(x^*)=[\partial f_i/\partial x_1,\cdots,\partial f_i/\partial x_n]^T$，$f_{ix}(x^*)$是$f_i$在$x^*$处的梯度。

上式(2)两边平方并应用公式$x^Ty=\|x\|\|y\|\cos\theta\leqslant\|x\|\|y\|$ 则得：

$$[f_i(x^{(1)}(t),u(t),t)-f_i(x^{(2)}(t),u(t),t)]^2=[f_{ix}^T(x^*)(x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t))]^2$$
$$\leqslant\|f_{ix}(x^*)\|^2\|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)\|^2 \qquad (3)$$

式中$i=1,2,\cdots,n$将。上式(3)的n个不等式相加，再两边开平方：

$$\|f(x^{(1)}(t),u(t),t)-f(x^{(2)}(t),u(t),t)\|$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n}[f_i(x^{(1)}(t),u(t),t)-f_i(x^{(2)}(t),u(t),t)]^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\|f_{ix}(x^*)\|\right)^{\frac{1}{2}}\|(x^{(1)}-x^{(2)}\|\qquad(4)$$

取$L>0$，并满足$\left(\sum_{i=1}^{n}\|f_{ix}(x^*)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant L>0$，则(4)可以写成：

$$\|f(x^{(1)}(t),u(t),t)-f(x^{(2)}(t),u(t),t)\|\leqslant L\|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)\|$$

这就是Lipschitz条件(1)

3．下面我们粗略地来说明两个条件的作用：

设f仅仅是时间的函数，方程(11.15a)的形式为：$\dot{x}(t)=f(t)$　　(5)

它与下述积分方程是等价的：$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(t)d\tau=\varphi(t,t_0,x(t_0))$　　(6)

(6)中的$x(t)=\varphi(t,t_0,x(t_0))$就是(5)的解，欲(5)的解存在，就是要(6)中的积分存在，或函数$f(t)$是可积的，而欲此积分存在或$f(t)$可积，则$f(t)$必须：或者是连续的，或者是具有有限个不连续点的有界函数，或者是单调有界的函数；所以第一个条件是保证(11.15a)的解存在。至于第二个条件，则保证(11.15a)的解是唯一的；但Lipschitz条件只是一个充分条件，不满足它，(11.15a)的解可能是唯一的，也可能不是唯一的，下面举一个不是唯一的例子。

例12.1：已知状态方程：$\dot{x}^2+x^2=1$ 或 $\dot{x}=\pm(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=f(x)$　　(7)

$f(x)$满足第一个条件，但却不满足Lipshitz条件。因 $\partial f/\partial x=\mp x(1-x^2)^{-1/2}$

当$x=\pm1$时，$1-x^2=0$，$\partial f/\partial x\to\infty$，$\partial f/\partial x$不存在。但因为满足第一个条件，(7)的解存在，并且不难求得为$x=\sin(t+c)$，可以将它代入进行验证。但也容易看出$x=\pm1$也是方程的一组解。将这两组解即(7)的积分曲线划成图，直线$x=\pm1$就成了正弦曲线组的包络线，在包络线上的每一点同时都有两条积分曲线经过。即在这些点上，方程(7)的解不是唯一的。

例12.2：给定系统的状态方程为　$\dot{x}(t)=\sigma(t-t_1)x(t)+u(t)$

$$\sigma(t-t_1)=\begin{cases}0 & \text{当 } t\leqslant t_1\\ 1 & \text{当 } t>t_1\end{cases}\qquad\sigma(t-t_1)\text{为单位跳跃函数}$$

此题：$f(x(t),u(t),t)=\sigma(t-t_1)x(t)+u(t)$，$\partial f/\partial x=\sigma(t-t_1)$

对每一个固定的t，$\partial f/\partial x$是一个与x无关的常数，所以$\partial f/\partial x$存在，即f对于x满足Lipschitz条件。对时间t，f并不满足Lipschitz条件，但求证微分方程(5)解的存在与唯一性时，并不要求f对时间t也满足Lipschitz条件，只要求具有有限个不连续点即可。Lipschitz条件是比连续更苛刻的条件，一般地说，它意味着函数f关于x是可导的。

(二)定理12.1的证明

证明分三步，先按Picard-Linderlof的逐步逼近法求出一个函数φ，然后证明φ满足状态方程(11.15a)，即φ是(11.15a)的解，最后证明这个解是唯一的：

1．**第一步**．Picard-Linderloq的逐步逼近法求出(11.15a)解的过程如下：

满足初始条件$x(t_0)=x_0$的微分方程(11.15a)的解与积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(x(\tau),u(\tau),\tau)\,d\tau\qquad(7a)$$

的解等价，只要f是可积的。选择一个连续函数$\varphi_0(t)$，它满足条件$\varphi_0(t_0)=x_0$；作一个新的函数。

$$\varphi_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f[\varphi_0(\tau),u(\tau),\tau]d\tau \tag{7b}$$

函数$\varphi_1(\cdot)$满足初始条件$\varphi_1(t_0)=x_0$。由φ_1再作一个新的函数$\varphi_2(t)$：

$$\varphi_2(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f[\varphi_1(\tau),u(\tau),\tau]d\tau$$

如此继续下去，一般情况下，当定义了$\varphi_{k-1}(t)$以后，将有

$$\varphi_k(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f[\varphi_{k-1}(\tau),u(\tau),\tau]d\tau \tag{7c}$$

我们将证明当$k\to\infty$时，$\varphi_k(t)$的极限：　　$\varphi(t,t_0,x_0)=\lim_{k\to\infty}\varphi_k(t)$　　(8)

就是我们所要求的微分方程(11.15a)的解。

例12.3：用Picard—Limderlof的逐次逼近法求解下述微分方程的解

$$\dot{x}(t)=-x(t)+\sigma(t-t_1) \tag{9}$$

$\sigma(t-t_1)$是单位阶跃函数。这个例子的$f(x,u,t)=-x+\sigma(t-t_1)$，作为时间的函数，$f$满足存在与唯一性定理的第一个条件，因 $\sigma(t-t_1)$仅在$t=t_1$时，存在一个第一类不连续点。又 $\partial f/\partial x=-1$，所以f还满足Lipschitz条件。因此方程(8)存在唯一的一个解，用Picard—Limdereof的逐步逼近法来求这个解。

方程(8)与积分方程　　$x(t)=x_0+\int_0^t[-x+\sigma(\tau-t_1)]d\tau$　　(10)

等价，取$\varphi_0(t)=x_0$，则(8)的解的第一次近似为：

$$\varphi_1(t)=x_0+\int_0^t[-x_0+\sigma(\tau-t_1)]d\tau=x_0(1-t)+(t-t_1)\sigma(t-t_1)$$

第二次近似为：$\varphi_2(t)=x_0+\int_0^t[-\varphi_1(\tau)+\sigma(\tau-t_1)]d\tau$

$$=x_0(1-t+t^2/2)+[(t-t_1)-(t-t_1)^2/2]\sigma(t-t_1)$$

第k次近似为：$\varphi_k(t)=x_0[1-t+t^2/2!-\cdots+(-t)^k/k!]+\{(t-t_1)-(1/2)(t-t_1)^2+\cdots+(1/k!)[-(t-t_1)]^k\}\sigma(t-t_1)$

当$k\to\infty$时，求得积分方程(10)也就是微分方程(9)的解为：

$$\varphi(t)=\lim_{k\to\infty}\varphi_k(t)=x_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-t)^k-\sigma(t-t_1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}[-(t-t_1)]^k$$

$$=x_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-t)^k+\{1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}[-(t-t_1)]^k\}\sigma(t-t_1)$$

$$=x_0\exp(-t)\{1-\exp[-(t-t_1)]\}\sigma(t-t_1)$$

图12.1中取$x_0=1.5$，$t_1=0.5$，画出了近似解$\varphi_0(t)$，$\varphi_1(t)$至$\varphi_5(t)$及正确解$\varphi(t)$。可见，近似解不断地向正确解逼近。

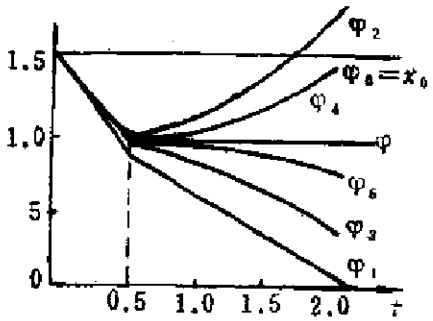


图12.1

2．**第二步**：证明由Picard-Linderlof逐次逼近法求到的函数(8)就是微分方程(11.15a)的解。

〈予备知识〉：证明 $\left\|\int_{t_0}^{t}\mathbf{y}(\tau)d\tau\right\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|\mathbf{y}(\tau)\|d\tau\right|$　　(11)

欧氏空间内(参见图12.2)，

$$\|PQ\|\leqslant\|PR_1\|+\|R_1R_2\|+\cdots+\|R_nQ\|$$　　(12)



图12.2

因近似地有：　　$\sum_{i=k_0}^{k}\mathbf{y}_i(t)\Delta t_i=\int_{t_0}^{t}\mathbf{y}(\tau)d\tau$　　(13)

根据(12)：　　$\left\|\sum_{i=k_0}^{k}\mathbf{y}_i(t)\Delta t_i\right\|\leqslant\sum_{i=k_0}^{k}\|\mathbf{y}_i(t)\Delta t_i\|$　　(14)