线性约束下不可分凸规划的二段线性逼近算法

计算数学专业研究生　徐晓阶　　指导教师　谭泽光

本文给出了解线性约束下不可分凸规划的下降方向算法。利用二段线性逼近的方法寻找下降方向。

首先，在初始可行解 z 处把目标函数分离化，把原不可分凸规划（P）变换成其基础可分问题（$SP(z)$）。即：

$$\begin{array}{ll} \min f(x) & \min S_z(x) \\ S,t\ x\in F & \Rightarrow \quad S,t\ x\in F \end{array}$$

并证明在 f 可微凸的条件下 z 为（P）的最优解当且仅当 z 为（$SP(z)$）的最优解。

然后对基础可分问题（$SP(z)$）作二段线性逼近。解有限次二级线性规划得到一个二段线性规划，使其最优解无分量在人工边界上。我们证明该解恰好是该二段线性规划在 F 域上分段线性延拓的最优解，记为 $\bar{x}$。我们证明，虽然不一定有 $f(\bar{x})$ 小于 $f(z)$，但 d 是 f 关于 z 点的可行下降方向，此处 $d=\bar{x}-z$。沿方向 d 作线搜索得到新的 z，这样又开始下一步迭代。

在本文 §3 部分 c 中，我们证明从 z 到 $\bar{x}$ 具有类似闭影射的性质，依据这种性质最后证明了算法的收敛性：迭代而得的可行解序列的每个聚点在目标函数可微的假设下都是（P）的最优解。

更进一步，我们探讨了不可微情形下算法的收敛性情况。证明当目标函数 Lipshitz 连续凸，且满足性质（b）时，算法依然保证迭代得的可行解序列的每个聚点都是（P）的最优解。

答辩日期：1988 年 12 月 5 日

四倍精度函数生成及测试包

计算数学专业研究生　李笑春　　指导教师　顾丽珍

计算机诞生后，科学计算者发现，在上机计算时需要经常、反复地计算一些函数，如三角、反三角函数，指数及对数函数，双曲及反双曲函数，幂和开方等。但最初的计算机内并没有这些基本函数。用户只得自编程序来解决基本函数的计算问题。为了避免这种不必要的重复劳动，人们把计算这些基本函数的子程序汇集起来存入机内为大家共享。而且在计算实践中，不断地提高这些子程序的精度和速度，这样产生了一个新的课题：在计算机上生成数学基本函数。

随着科技的发展，在很多领域，尤其是尖端技术领域，人们对计算精度的要求越来越

需要全本请访问 www.ertongbook.com

高。而目前一般机器上数学库中的子程序精度只介于单、双精度之间，远不能满足需要。因此美国几家大的计算公司，如 IBM,DEC 和 HP 等纷纷在开发四倍精度的函数库。

我们开发的四倍精度函数库基于表方法和最佳（或近似最佳）一致逼近多项式。在算法设计完成后，逼近多项式的次数、逼近区间及表距、计算次序等就被确定下来了。表方法的基本步骤是：（1）定义域压缩：把基本函数的整个定义域通过利用它的性质压缩到某一个小区间上去，定义域压缩后得到的区间称为基本区间；（2）将基本区间再细分成若干子区间；(2)用任意精度的软件包，如 MACSYMA，REDUCE 或 UNIX-BC 计算出子区间端点上的有关函数值做为精确的表值；（4）用任意精度的软件包计算出逼近区间上该函数的最佳（或近似最佳）一致逼近多项式的系数；（5）编程实现。

本文所做的工作就是讨论在四倍精度下如何去简化 Meinardus 的单一交换法。Meinardus 的单一交换法本身已经是对 Remez 算法的简化，但实现起来仍嫌繁琐且在高精度下确能大大简化。本文说明了在被逼近函数 $f(x)$ 满足 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，$x\in(a,b)$（(a,b) 是逼近区间），在算法 1 的每次迭代过程中，$P_n(x)-f(x)$ 在 (a,b) 恰好有 n 个极值点 $\{x_k\}_2^{n+1}$，且 $f(x)$ 在 $a,\{x_k\}_2^{n+1}$，b 上的值是正负交替的、这样的迭代过程满足[4]中列的收敛条件，故算法是收敛的。由此结论出发，算法就被大大简化了。虽然相对误差函数的 minimax 多项式对数学库中的奇函数是需要的，由于相对误差函数的 minimax 多项式的偏差点个数不能确切知道，而我们又不想使算法复杂化，故本文提出一个替代方法。在条件 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\neq 0$ 及 $\dfrac{f(x)}{x}\neq 0$，$x\in(a,b)$成立下，法算法 1 求出 $\dfrac{f(x)}{x}$ 的绝对误差的 minimax 多项式 $P^*_{n-1}(x)$，则得 $f(x)$ 的相对误差函数的近似 minimax 多项式 $x*P^*_{n-1}(x)$ 并且 $x\cdot P^*_{n-1}(x)$ 的相对误差与 $f(x)$的相对误差函数的 minimax 多项式的相对误差具有相同的二进制数量级。

本文还对函数生成过程中产生的误差进行了分析，在一些实例中说明了如何处理这些误差的方法。

最后本文介绍了用 C 语言，Cshell，UNIX-BC 及任意精度软件包 REDUCE 开发的精度测试包和单调性测试包。

答辩日期：1988 年 12 月 8 日

高精度函数的生成

计算数学专业研究生　陈星原　　指导教师　顾丽珍

随着科学技术的发展，高精度科学函数库的重要性越来越显示出来。本文介绍了生成高精度科学函数库的方法和步骤，着重讨论了开生高精度科学函数库所必备的环境和工具，以及几个函数子程序的实现技巧和改进。

生成高精度科学函数的一种有效的方法是表驱动方法。该方法的思想是先把自变量的范围从无穷区间压缩到有限的小区间上，然后在小区间上选取若干个表结点，在表结点附近做最佳一致逼近。计算表结点上的函数值、最佳一致逼近多项式的系数以及检测所生成的函数都需要一个精度更高的软件。本文对几个常见的高精度软件（MACSYMA、REDUCE、UNIX BC）做了评价，从实际情况出发，选择了 BC 做为开发高精度函数的工具。利用区间压缩方法，对 BC 的原有库函数做了改进，大大提高了计算速度，还增加了一些 BC函数库中所没有的函数。以扩充后的 BC 函数库为标准函数库，建立了检测四倍精度函数的检测包。此外，在 BC 上实现了求最佳一致逼近多项式系统的 Remez 算法。

本文给出了三个函数子程序的实例。三角函数区间压缩是一个很繁的问题，要将大变量（$>2^{16000}$）压缩到 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 中，$\frac{2}{\pi}$ 必须存 30000 多个二进制有效位，还需要超长精度的算术运算。本文实现了只用整数算术运算的三角函数区间压缩的子程序，精度可达到误差不超过 0.5ulp，速度也很快。

对自然对数函数子程序，本文比较了现有的几种方法的优点，在此基础上提出了改进的算法并实现。改进后的算法的精度和速度都有所提高。本文还对改进后的方法做了比较详尽的误差分析，其结论与实测结果相符。

对伽玛函数，要生成四倍精度的子程序，不象做初等函数那么容易。首先其标准函数很难计算，其次无法做区间压缩和利用表驱动方法。本文将在高精度软件上求伽玛函数的标准值的问题转化成求 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^k}$ （$k=3, 5, 7, 9$）几个级数和问题，并给出了四倍精度伽玛函数子程序的算法设计。

本文最后给出了用MACSYMA、REDUCE、BC 语言编写的 Remez 算法程序，BC 标准函数库中的几个库函数程序，BC 精度检测包的所有程序，三角函数区间压缩子程序，自然对数函数子程序等二十多个源程序。

答辩日期：1988 年 12 月 8 日

对流占优问题的特征线差分方法

计算数学专业研究生　王光德　　指导教师　陆金甫

对流占优的对流扩散方程在流体力学问题中有着非常广泛的应用背景。在对这类问题作数值模拟时，一个通常的困难是数值耗散过大或是出现振荡的非物理解，为了克服这个困难出现了许多专门的数值方法。其中有人在 60 年代提出了一种所谓的 Eulerian-Lagrangian 网格法。其特点是在求解过程中将每个时间步长分裂成两步：在对流步，沿相应的双曲型方程的特征线计算一个对流问题，并根据计算生成的空间网格，在扩散步计算一个扩散问题。该方法虽然在处理对流占优问题时比较有效，但由于计算中网格是不固定的，实际应用时并不方便。在 1982 年发表《SIAM J.Numer.Anal》的一篇文章上，Jim.Douglas 和Thomas F.Russell 提出一种同样有效，但计算更

方便，更容易实现的的方法，方法的思想是在固定的矩形网格上将双曲型方程的特征线同有限差分结合起来，对于一维线性情况，作者就如下的初值问题：

$$\begin{cases} c(x)\dfrac{\partial u}{\partial t}+b(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=f(x,t) & x\in \boldsymbol{R},\ 0<t\leqslant T \\ u(t,0)=u_0(x) & x\in R \end{cases}$$

证明了差分格式在一定条件下按照极大模是收敛的，本文在此基础上将特征线差分方法推广至一维和两维非线性情况。

一维非线性情况，我们对初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+b(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(a(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=f(x,t,u) & x\in \boldsymbol{R},\ 0<t\leqslant T \\ u(x,0)=u_0(x) & x\in R \end{cases}$$

提出如下的差分格式：

$$\begin{cases} \dfrac{V_j^{n+1}-\bar{V}_j^n}{\Delta t}-\delta_{\bar{x}}\left(A_{j+\frac{1}{2}}^n\delta_x V_j^{n+1}\right)=f(x_j,t^{n+1},V_j^n) & -\infty<j<\infty \\ V_j^0=u_0(x_j) & 0\leqslant n\leqslant[T/\Delta t]-1 \end{cases}$$

其中 $\bar{V}_j^n=(I_1V_\Delta^n)(\bar{X}_j^n)$ I_1 是分片线性插值算子。

$\bar{X}_j^n=x_j-b(x_j,V_j^n)\Delta t$，$\delta_{\bar{x}}$，$\delta_x$ 分别是向后（前）差分算子，

$$A_{j\pm\frac{1}{2}}^n=a(x_j\pm\tfrac{1}{2},\ V_{j\pm\frac{1}{2}}^n),\quad V_{j\pm\frac{1}{2}}^n=\frac{1}{2}(V_j^n+V_{j\pm1}^n)$$

证明了差分格式在一定条件下是收敛的。并给出离散 l^2—范数下的误差估计，在二维情况，我们将方法应用于涡度——流函数形式的 Navier-Stokes 方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial t}+u\dfrac{\partial\omega}{\partial x}+v\dfrac{\partial\omega}{\partial y}-\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\omega=0 & (x,y)\in\Omega,\ 0<t\leqslant T \\ \Delta\phi+\omega=0 & (x,y)\in\Omega,\ 0\leqslant t\leqslant T \\ \phi|_\Gamma=f(x,y,t),\ \dfrac{\partial\phi}{\partial N}|_\Gamma=g(x,y,t) & (x,y)\in\Gamma,\ 0<t\leqslant T \\ \omega(x,y,0)=\omega_0(x,y) & (x,y)\in\Omega \end{cases}$$

其中 $u=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$，$v=-\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$，$\Omega=\{(x,y)/0<x,\ y<1\}$

$\Gamma=\partial\Omega$，N 是 Γ 的外法向

得到类似的收敛性结果和误差估计不等式，需要说明的是，迄今为止，关于用特征线有限差分来证明上述 Navier-Stokes 方程解的收敛性还未曾有过。此外，一维和两维的数值计算结果表明，特征线差分方法在处理对流占优问题时确实是一种行之有的方效法。

答辩日期：1988 年 12 月 8 日

异步牛顿迭代与双曲守恒律方程的计算

计算数学专业研究生　周　章　　指导教师　陈景良

并行计算过程从本质上说，就是把一个总任务分成若干子任务，然后由不同的处理机同时执行，从而能够充分利用现有资源，加快计算速度。并行算法可以分为同步和异步算法，同步算法的特点是不同的处理机之间有等待，这是因为有些子任务为另外子任务的前提，因此如果某个进程没有完成，其它进程就不能执行。异步算法的特则是各个子任务完全独立，执行时相互之间不需要等待，它们一般只跟一个共享内存有数据交换、因而总的来说异步并行的效率比同步要高。在数值并行算法中，有相当一部分是针对大型流水线机而设计的，这类方法主要是将串行过程向量化执行，一般把它们归入同步并行算法。异步并行算法虽然实际应用还不多，但在理论研究上已经取得不少进展，在数值计算方面有区域分裂法及异步迭代法等，本文首先根据异步迭代的思想，讨论异步牛顿迭代的收敛性，在此我们用范数作为度量，这为验证条件带来方便，而且更符合人们研究收敛时的习惯做法。

文章第二部分讨论了求解双曲守恒律方程的全变差下降方法，这一思想由 Harten 在 1983 年提出，后来取名 TVD 方法、它具有分辨率高无振荡等优点，该法近年来发展迅速，以此为基础产生多种很好的算法，而且精度越来越高。在这里，我们把原始的隐式 TVD 格式做某些变形。不加简化的隐式格式很难计算，现已有两种简化方式，一种保持了 TVD 性质但不再与守恒律相容，另一种是与守恒律相容但不具有 TVD 性质、本文提出了既具有 TVD 性质又与守恒律相容的简化方法，不过格式变为非线性的，离散结果为非线性方程组。

在最后一部分，我们用异步牛顿迭代解每步离散出来的非线性代数方程组，从而构成一个求解双曲守恒律方程的完整算法。但由于没有异步并行机，这里的数值实验只能是串行执行的结果。

总之，本文在把异步并行算法用于求解非线性偏微分方程方面做了些尝试，当然这种结合还不太理想，从计算结果看出，我们提出的算法受非线性代数方程组解法的制约，因此在方程形式很复杂时，如离散后的空气动力学方程组，成功率就会降低，我们在计算过程中遇到过这种情况。但对于标量方程来说，结果还是令人满意的。同时对异步牛顿迭代收敛性的讨论，也可以扩展到其它解非线性代数方程组行之有效的迭代法。

答辩日期：1989 年 5 月 30 日

次模函数及一类更广义的离散集合函数

计算数学专业研究生　姜爱民　　指导教师　林翠琴

组合最优化是运筹学的一个重要分支，由于它在理论上和实践上的重要性，近年来发展比较快，而且成为当前运筹学发展的主要方向。作为与许多组合最优化问题紧密相

需要全本请访问 www.ertongbook.com

关的次模函数理论，特别是这一理论与离散数学规划之间的关系，最近几年有了很大发展。近期来，我们已经知道在离散情形下的次模函数与连续的凸函数极其相似。因为，在连续最优化中凸函数起着主导作用，所以，人们也就希望次模函数在离散最优化中起类似的作用。而且实际上也正是这样。对于离散最优化中的次模性的高度重视是值得的，次模性已经统一并推广了已有的许多基本结果，并导致了一些 open 问题的解决。

次模性是组合最优化中的一个重要概念，许多组合极小——极大关系是建立在次模性及另一个组合最优化中的重要概念——全对偶整性基础上的。研究次模性，也就是要研究次模函数。我们已经知道次模函数在组合最优化中起着重要作用，那么，是否还有其它集合函数类比次模函数更广，而且有同次模性类似的更深刻的理论？Lovász 在1983年首先提出这个问题。多拟阵交定理说明，尽管两个次模函数的极小一般不再是次模函数，但它仍给出了具有较好性质（整数顶点）的多面体。Hoffman 和 Gröflin(1981)的结果说明，一个类似于拟阵分划（matroid Partition）定理的结论，对于两拟阵交的秩函数是正确的，但这个秩函数不再是次模函数，而是两个次模函数的卷积。以上这个问题对于寻找更广义的离散集合函数起到了积极作用。祁力群在这个问题上做了很好的工作，并得到很有意义的结果。他将次模函数推广到奇次模函数和 Dilworth 函数。而且又从另一个方向将次模函数推广到有向次模函数和有向奇次模函数，在这种推广过程中，全对偶整性继续保持。

本文在总结已有的次模函数理论结果的基础上，着重研究了次模函数和有向次模函数上的运算和算法。给出了极大化非减次模函数近似算法误差界的直接证明。讨论了有向次模函数上的一些运算。证明了在一定条件下，有向次模函数的 Dilworth truncation 仍是一个有向次模函数，两个 D(s)(S 的所有有向子集的集合)上的有向次模D(s)函数的极小和 D(s) 上的次模函数的单调化是非可消族上的有向次模函数，并给出了一个非减集合函数是非减有向次模函数的充要条件。

答辩日期：1989 年6月 10 日

利用弧段观察流估计 OD 出行阵

计算数学专业研究生　李有梅　　指导教师　郑乐宁

有一运输网络上，出行点和目的点之间的出行量用一个二维矩阵来表示，称之为 OD 阵或出行阵。在各种交通分析和规划研究中，OD 阵占很重要的位置。最初，OD 阵是通过出行调查获得的，但如果希望所得的 OD 阵满足一定的精度，就要考虑相当大的一部分样本，这样导致所花费的人力和物力都是非常巨大的。在最近几年来，科研工作者不断提出了各种 OD 估计模型，有线型模型，也有非线性模型，利用概率统计方法或最优化方法去直接或间接估计出行阵。但是各种方法都有自己的优缺点和适用范围，本文作者则试图从路线流量的角度来描述 OD 阵的估计问题。

已知一参考出行阵 (t_{ij})，$\{\hat{V}_a\}_2$ 为网络的一组弧段观察流，通常都用下面的熵模型来选取 OD 出行阵：

$$\min \sum_{(ij)\in w} T_{ij}\log T_{ij}/t_{ij}$$

$$\sum_{(ij)\in w} n^a_{ij} T_{ij} = \hat{V}_a \quad \forall a \in L$$

$$T_{ij} \geqslant 0 \qquad \forall (ij) \in w$$

但是熵模型的解有赖于 $\{n^a_{ij}\}$ 的确定，并对 $\{n^a_{ij}\}$ 的值非常敏感，以前的许多方法都利用比例分配模型来确定 $\{n^a_{ij}\}$，而这在有容量约束的网络上，是会导致有很大误差的。作者提出用参考阵 (t_{ij}) 来确定比例 $\{n^a_{ij}\}$ 的思想：

首先，将 (t_{ij}) 平衡分配于网络上，即求解下述非线性模型：

$$\min \sum_a \int_0^{N_a} C_a(x)dx$$

$$s,t \quad \sum_{P\in R_{ij}} F_p = t_{ij} \qquad \forall (i,j) \in W$$

$$\sum_{P\in R} F_p \delta^p_a = V_a \qquad \forall a \in L$$

$$F_p \geqslant 0 \qquad V_a \geqslant 0$$

得到唯一的一组弧段流量 $\{V_a\}_L$，但是路线流量 $\{F_p\}$ 却并不唯一。从直观角度讲，由于生活习惯或都路线自身特性等各种因素的影响，每条路线所占的出行比例是确定的，因此通过利用各种路线信息，对每条路线 $P\in R$，给定一权重 $W(P)$，以此为衡量标准，求解下面的线性规划，得到一组在所给权重意义下的路线流量 $\{F_p\}$：

$$\min \sum_{P\in R} W(P)F_p$$

$$s.t. \sum_{P\in R_{ij}} F_p = t_{ij} \qquad \forall (ij) \in W$$

$$\sum_{P\in R} F_p \delta^p_a = V_a \qquad \forall a \in L$$

$$F_p \geqslant 0 \qquad \forall P \in R$$

这样就得到一组出行比例 $\{n^a_{ij}\}$：

$$n^a_{ij} = \sum_{P\in R_{ij}} \frac{F_p \delta^p_a}{t_{ij}}$$

在此求解过程中，需要明确知道平衡分配后所使用的路线集 R_{ij}，作者在 Moore-Dijkstra 的最短路线算法的基础上，给出了一求解路线集 R_{ij} 的算法，它避免利用逐条添加次短路的想法，是一种非常可行的算法。

这样，利用熵模型可得到出行阵的一组估计值 $\{\hat{T}_{ij}\}$。

通过在试验网络上的验算，可以看到，这样得到的 $\{n^a_{ij}\}$ 和 $\{\hat{T}_{ij}\}$ 有很好的性质，是很有希望应用于实际问题的研究的。

答辩日期：1989 年 6 月 10 日

DAE'S的数值解法及其在对流—扩散计算中的应用

计算数学专业研究生　顾金生　　指导教师　胡显承

微分代数方程组，简称 DAE'S，广泛出现于电网络及动力系统模拟，及流体力学方程组的求解中。因此研究 DAE'S 的基本理论及数值方法就具有十分重大的意义。为此作者检索、查阅了国外有关 DAE'S 问题的大量文献，在此基础上，对形如 $Ay'+By=g(t)$ 线性常系数 DAE'S 的基本理论作了详细的综述，分析了求解此问题的三种数值方法（向后差分方法、隐式 Runge-Kutta 方法、线性多步法）的相容性、收敛性及稳定性，并就该问题的特殊情形（A对称、半正定，$B=B_1+B_2$，B_1对称、正定，B_2反对称）进行较为深入的研究，得到了一些有益的结果，这些结果刻划了一类非常重要的实际问题的性质。在此同时，本人将连续时间 Galerkin 方法用于如下的非线性椭圆——抛物型问题：

$$\begin{cases}\sigma(x)u_t-\nabla(r(x,u)\nabla u+\vec{P}(x)\cdot\nabla u=f(x,t,u) & (x,t)\in\Omega\times(0,T]\\ u(x,0)=u_0(x) & x\in\Omega\\ u(x,t)=0 & (x,t)\in\alpha\Omega\times(0,T]\end{cases}$$

其中 $\sigma(x)\geqslant 0$，$\forall x\in\Omega$，Ω 是 R^n 中有界区域。并应用 sobolev 空间的大量工具，对其先验误差估计独立地进行了推导，对含有 $\sigma(x)$ 的项作了特殊的处理，从而在一系列的假定之下，得到了最优 $L^2(H^1)$ 模误差估计及其它一些结果。并指出，由于 $\sigma(x)$ 在 Ω 中某些区域为零，故所得到的有限元方程是一个非线性 DAE'S 问题，并就 $r(x,u)$，$f(x,t,u)$ 与 u 无关时给出了极为重要的定理 0，该定理是我们能用有限元Galerkin 方法及 DAE'S 方法求解线性椭圆——抛物型问题的依据。最后，作者针对线性对流——扩散问题做了大规模的数值试验。首先使用了连续时间 Galerkin 方法作空间离散，得到了微分代数方程组，然后使用 DAE'S 方法进行数值求解。由于计算量大，且有关系数矩阵是稀疏的，因而作者采用了压缩存储技术；另外，为了形象地表示数值解趋于稳态及其它一些性质，本人在熟悉绘图软件 plot.for 的基础上，编制了绘图服务程序 graph.for；数值解的误差如何估计是 DAE'S 的一个重要课题，只有好的误差估计，我们才能选用适当的时间步长，为此作者参阅了有关文献，对常规的预测——校正误差估计作了修正，也就是用算子 $(A+\rho_0 hB)^{-1}A$ 作用一下，这样就可滤掉那些不重要的没必要控制的分量的误差。本人比较了不同参数 ε，不同方法及不同时刻的误差，这些试验结果表明，用 DAE'S 方法求解线性椭圆——抛物型问题是十分有效的。但是由于线性非常系数 DAE'S 及非线性 DAE'S 比线性常系数 DAE'S 要复杂得多，故没对其进行性质探讨及数值试验，这是本文的遗憾之处，尚需进一步改进、提高和推广。尽管如此，在 DAE'S 方面已作的这些初步探讨是十分有意义的。

答辩日期：1989 年 6 月 10 日

二维带小参数对流占优问题的数值方法

计算数学专业研究生　林友明　　指导教师　胡显承

二维带小参数对流占优问题有很强的实际背景。比如，燃烧模型，对流扩散模型，半导体器件模型等都属于这一类问题。

用数值方法求解这个问题的最大困难在于数值方法的高精度和数值稳定性不可兼得。已有的主要方法有：对称化方法，指数型有限元方法，自适应方法，SUPG方法及A.M-IZUKAMI 和 T.J.R.HUGHES 提出的方法（简称 MH 方法）。前二种方法最后都归结为求解一个和原问题类似的问题。自适应方法算法复杂，在计算机上实现有一定困难。SUPG 方法通过控制解在流线方向的方向导数来增加算法的稳定性，同时也具有较高的精度，但它仍产生数值振荡，有时数值振荡使它不能反映出真解的形状。增加算法稳定性的另一种方法是构造单调格式。MH 方法正是基于这一点，通过改变流线方向，构造出一个满足守恒性及离散最大值原理的算法。即使原问题是线性的，MH 方法也是非线性的。采用迭代法，算法的收敛性得不到保证。从作者所作的一些计算来看，MH 方法是不稳定的，其收敛性可能不成立。

本文在 MH方法的基础上，针对线性问题，提出一个满足守恒性及离散最大值原理的线性算法（简称 NEWCM 方法）。首先根据算法应该满足守恒性条件及正型性条件，作出特殊的三角形网格剖分，即每个单元都有一条边与流线方向平行，再适当选取权函数。当 ε（扩散项系数）很小时，NEWCM 方法近似等价于特征线方法。NEWCM 方法也是一种流线逆风 Petrov-Galerkin 方法，但逆风方向与 SUPG 不同，而且在每个单元上也不相同，证明了解满足守恒性及离散最大值原理。证明了由 NEWCM 方法所得出的系数矩阵的逆矩阵是非负的。证明了对于非对流占优问题，解的无穷模误差是一阶的。证明了解的能量模误差估计。通过构造围墙函数，证明了解的节点误差估计。最后，针对九个测试问题，分别用标准 Galerkin 方法、SUPG 方法、MH 方法及 NEWCM 方法进行计算，并用计算机绘出一部分三维图形及截面图。计算结果表明：对对流占优问题，标准 Galerkin 方法产生剧烈的数值振荡；SUPG 方法是一个比较稳定的方法，但只加流线方向的扩散项有时是不够的；MH 方法不稳定，其收敛性可能不成立；而 NEWCM 方法不论是对对流占优问题还是对非对流占优问题，其精度和稳定性都是令人满意的，这也说明流线方向不一定是最合适的逆风方向，但遗憾的是，理论分析不能充分说明这一点。

答辩日期：1989 年 6 月 10 日

带有无穷大弹性地基坝体有限元分析中的若干问题

计算数学专业研究生　肖人岳　　指导教师　韩厚德

本文是用有限元方法计算平面弹性力学中带无限大地基的水坝的位移问题，所用方程为二维弹性力学基本方程组：

$$(\lambda+G)\text{graddiv}\vec{u}+G\nabla\vec{u}+\vec{f}=0$$

其中：$\vec{u}=(u_1, u_2)$ 为位移向量。$\vec{f}=(f_1, f_2)$ 为体力向量。在工程上，这类问题的主要处理方法是用有限元与加载实验相结合的方法，但由于水坝带有无穷大弹性地基，工程上所用的方法无法处理无穷域问题，因此在处理前，工程上一般在无穷域上人工取一有限域，把在此有限域边界上的人工边界条件简单地取成原无限域上无穷远处的边界条件，但是，这一人工边界条件下的近似问题的解与原问题的解之间显然已存在误差，在本文中称之为原始误差，如何找出或近似找出原始误差与地基大小的关系一直是工程上十分关心的问题。但是由于原问题的解析解无法得到，因此还需找到一种能近似找出它的方法。

本文所要做的第一步工作就是利用有限元方法近似地得出这一关系的曲线。我们事先所定人工地基为半圆形，人工边界为半圆形弧，地基半径为 R。解决这一问题的基本思想就是先就各种不同的 R 计算各自的位移值，发现它们随 R 变化的规律，再用回归的方法求出其极限值，并将此极限值作为原问题的解，再将此解与在不同 R 下的有限元解比较以求得原始误差，最近画出原始误差与 R 的关系的大致曲线。在这第一步的工作中，共对两种水坝进行了计算，得出曲线的形状非常相近，并根据这个曲线给出了满足一定精度条件下的 R* 的大小，这里的 R* 定义为地基直径与坝底宽的比。

为了能更为彻底地解决这一问题，一个很好的办法就是在人工边界上给出精确的边界条件，对于一类较为广泛的无穷域问题，已经能在人工边界上给出精确边界条件[12]。本文的第二步工作就是为将此方法应用到水坝计算中打下基础，这只是我们整个研究工作的一部分。要达到目标还需以后更进一步的工作。在这第二步的工作中，我们针对一具有解析解的半平面问题进行了计算，取的有限域仍为半圆形，半径为 R，并得出了在不同 R 下的误差，从而说明在 R 不太大的时候工程上所做的简单近似是很粗糙的，从而为今后更进一步的精确逼近打下基础。

答辩日期：1989 年 6 月 10 日

关于次模优化问题的进一步讨论

计算数学专业研究生　涂晓鸣　　指导教师　林翠琴

继 Edmonds 1970 年提出次模函数以后，近几年人们又提出了几大离散函数和离散系统来推广次模函数。同时 Lovasz 和 Fujishge 等找到了次模函数与凸函数的关系，

且对次模函数得出了一些与凸函数相似的结果。

Qi 1988 年提出的奇次模函数有 TDI 性质且可以表示两次模函数的极小，从而推出2-拟阵交定理，因此奇次模函数推广了次模函数。但我们得出：秩为奇次模函数的独立系统具有不可分次模性质，因此它不能表示非二分匹配系统和无爪图的 Vetex-Packing 系统。Fujishige 双次模函数是定义在 3^s 某个分布格上的双元集合函数，附加一定条件后它有 TDI 性质。我们得出：定义在 2^s 分布格上的两个次模函数和超模函数能够用 Fujishige 双次模函数表示，并由此推出离散分离定理。有向次模函数 Qi 1988 年提出的又一类离散函数，它有 TDI 性质。记 s 是有限集，$D(s)$ 是 s 的全部有向子集族，若 f：$D(s)\to R$ 是有向次模函数，$P_f=\{x\in R^s$：$x(T)\leqslant f(T)$，$T\in D(s)\}$，$\hat{f}(X)=\max\{x(X)$：$x\in P_f\}$，$X\in D(s)$，我们得出：$P_f\neq\phi$ 的充要条件是 $f(\phi)\geqslant 0$，若 $f(\phi)=0$ 则 $f(X)=\hat{f}(X)$。同时我们还证明了有向次模函数能够表示 g-polymatroid 系统，并得出：若 $P_{(f,g)}$ 是 g-polymatroid，则 $f(X)=\max\{x(X)$：$x\in P_{(f,g)}\}$，$X\subseteq s$。Lovász1983 年得出 $f:2^s\to R$ 是次模函数的充要条件是它的 Lovász 扩展 $\hat{f}$：$R^s\to R$ 是凸函数，由此推出离散分离定理。Fujishig 1984 年对次模函数进一步提出了次微分、次梯度和共轭函数的概念，且得出了对次模函数在有条件和无条件下求极值的充要条件，这些结论都与凸分析中的结论相似。若 f，$g:2^s\to R$ 分别是次模函数和超模函数，称 $f^*(x)=\max\{x(X)-f(X)$，$X\subseteq S\}$ $g^*(x)=\min\{x(X)-g(X)$，$X\subseteq S\}$ 分别为 f，g 的共轭函数，我们得出：若 $f(\phi)=g(\phi)=0$，则：$\min\{f(X)-g(X)$：$X\subseteq s\}=\max\{g^*(x)-f^*(x)$：$x\in R^s\}$，这与凸分析中的 Fenchol-type min-max定理是相似的。Qi 对有向次模函数也讨论了它的一些凸性，并得出 f：$D(s)\to R$ 是有向次模函数的充要条件是它的 Lovász扩展 $\hat{f}$：$R^s\to R$ 是凸函数。对于离散集合函数我们定义了它的凸包 Cof，并得出：f 是有向次模函数则：$f=\mathrm{Cof}$。瓶颈问题是次模优化问题的一个特例，我们对独立系统的瓶颈问题提出一个理论算法。其基本思想是保持独立系统的秩不变，逐步去掉权大的元素，直至不能再去掉为止。若求独立系统秩的算法是多项式时间的，则该瓶颈问题的算法也是多项式时间的，利用该算法和林翠琴、刘振宏1987年的结果，我们还得出求独立系统的最小极差问题的算法也是多项式时间的。

答辩日期：1989 年 6 月 10 日

线性规划的内点算法

计算数学专业研究生　黄竞红　　指导教师　施妙根

本文细致地阐述了 Karmarkar 算法产生以来线性规划内点算法的发展，并介绍了一些自己在这方面的工作。

84 年，N.Karmarkar 提出了线性规划（LP）问题的一种多项式时间算法（K.A.算法）、之后，LP 问题的内点算法得到了很大的发展。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

K.A 算法的基本原理是用仿射变换将为多胞形的可行域变换为单纯形空间，在变换空间中求得最优点，再反变换回原空间，如此即获得了一系列以多项式时间收敛到最优解的点列。D.M.Gay 提出了 K.A 法的一种变换形式，该法不需已知原问题的最优目标函数值，且它可以做出如原始——对偶内点算法来应用，这个方法也具有线性收敛性。

原始型内点算法与对偶型内点算法的产生原理和基本特性有很大的相似性和对称性。它们的基本原理是：从可行域的一严格内点出发，通过仿射变换生成可行内点序列，且使相应的目标函数值序列严格单调向最优目标函数值方向趋近。施妙根老师证明了在一定条件下原始型内点算法的收敛性。为了实际应用的需要，N.Karmarkar 等将原始内点算法运用到自由变量和有界变量混合的LP 问题上，得到一改进原始型内点算法；又将对偶型内点算法运用到有有界变量的 LP 问题上，得到一改进对偶内点算法，称为对偶仿射内点算法，施妙根老师将对偶仿射内点应用到有有界变量，等式约束及不等式约束的混合问题上，得到一计算能力很强的内点算法。

M.Iri 和 H.Imai 以乘积分式函数为势函数，用牛顿法求搜索方向，得到一局部二次收敛的内点算法，后经张树中证明，该法在可行域有界的条件下具有全局收敛性。H.Yamashita 引进一超余变量，利用上述势函数，得到一线性收敛的内点算法。施妙根老师将二维搜索用于该法，证明了带二维搜索的 Yamashita 算法具有局部二次收敛性。

R.C.Monteiro 和 I.Adler 的原始对偶法（P-D 法）综合考虑原始对偶问题，利用 K-T 条件，得到迭代点，该法具有线性收敛性。蒋健民利用残余向量法对 P-D 法进行了改进，在中小型规模 LP 问题上试算效果较好。

经施妙根老师的实际计算，发现在原始型内点算法、对偶型内点算法、Gay 法，Yamashita 法中，前两种方法计算效果较好，用对偶仿射内点法解一些大型稀疏 LP 问题时，也得到了令人满意的结果，此说明 LP 内点算法的解大型稀疏 LP 问题的可行性。

我在施妙根老师的指导下，证明了在原始问题非退化及对偶问题强非退化的假设下，对偶型内点算法的产生的序列收敛到最优解这个结论。另外，我用对数势函数求原始问题的初始内点，然后用改进 P-D 法求最优解，经用该法测试一些小规模 LP 问题，证明该法可行；又将线性规划的 P-D 法的基本原理应用到二次凸规划 QP 问题上，建立了QP 的线性收敛的内点算法。

答辩日期：1989 年 6 月 12 日

正常映射与解析同构

基础数学专业研究生　钟一兵　　指导教师　李克群

本文系统地研究了多复变函数中极为重要的正常全纯映射。

1. 设 $S_k=(f_1^k,\cdots,f_n^k)$：$\Omega\to\Omega'$，$(\Omega,\Omega'\subset C^n)$ 是正常全纯映射列，本文找出了

S_k的极限 f 仍是正常全纯映射的充要条件：对 $\forall \{Z_n\}_{n=1,\cdots,\infty}\subset\Omega, Z_n\to\partial\Omega$，$S_k(Z_n)$ 一致地趋于 $\partial\Omega'$，对 k 而言。

2．研究了在正常全纯映射下解析集的变化情。证明了 Th9：设 f：$\Omega\to\Omega'(\Omega, \Omega'\subset C^n)$ 是正常全纯映射，$A\subset\Omega$ 是解析集，则 $f(A)\subset\Omega'$ 仍是解析集，为证明Th9，而证明有关解析集的十分重要的性质 Th7：设 A 是紧致的解析集。则 A 一定是有限集。另外证明了正常全纯映射把低维域映射为高维域中的解析集。Th10：f：$\Omega\to\Omega'$是正常全纯映射，$\Omega\subset C^n$，$\Omega'\subset C^m$，且 $n<m$，则 $f(\Omega)$ 是 Ω' 中的解析集。

3．研究了正常全纯映射与解析同构映射的关系，首先 Poin Cave 已证明对 $P=\{(z_1,z_2)\in c^2|\ |z_j|<1,\ j=1,\ 2;\quad B=\{(z_1,z_2)\in c^2|,\ |z_1|^2+|z_2|^2<1\}$，不存在解析同构映射 f，使得：$f(P)=B$，本文证明了也不存在正常全纯映射 f，使得 $f(P)=B$ (Th11)。

最后找出了一个正常全纯映射是解析同构映射的条件。Th12：设 $\Omega\subset C^n$，$\Omega'\subset C^*$ 是连通域

f：$\Omega\to\Omega'$ 是正常全纯映射。

$$N=\{x\in\Omega|\mathrm{clef}(df)_{x=0}\}$$

如果 Ω'/N 是单连通的，则

f：$\Omega\to\Omega'$

是解析同构映射。

另外：在上面研究中还简洁的，独创的证明了一些已知结论。证明较其它文献中的证明要简单。

答辩日期：1988 年 11 月

含有对流项的一维渗流方程解的渐近性质

应用数学专业研究生　刘海亮　　指导教师　萧树铁

本文研究了带对流项的一维渗流方程

(*)　　$u_t=(\varphi(u))_{xx}-(g(u))_x$

的 Cauchy 问题和半无界区域上的 Cauchy-Dirichlet 问题的弱解当 $t\to\infty$ 时的渐近性质。其物理背景是不可压缩流体在均匀刚性多孔介质中的非饱和流动，在毛细压和重力作用下，垂直方向流体的运动就由上面方程描述。φ 和 g 通常由流体和多孔介质的物性所决定。实验表明 φ 和 g 满足：

1°　$\varphi\in C([0,\infty))\cap C^{2+\alpha}((0,\infty))$，$\varphi(0)=\varphi'(0)=0$

$\varphi'(s)>0\quad(s>0)\qquad\varphi''(s)>0$

2°　$g\in C([0,\infty))\cap C^{2+\alpha}((0,\infty))$，$g(0)=0$

$g'(s)>0\quad(s>0)\qquad g''(s)$ 保号 $(s>0)$

在以上假定和初值的适当条件下，我们证明方程 (*) 的Cauchy 问题和 Cauchy-Dirichlet 问题解的渐近性严重依赖 g 的形状（凸或凹）以及初值 $u_0(x)$ 在 $-\infty$ 和

$+\infty$值大小关系。在 $g''>0$，，$u_0(-\infty)=u^-\neq 0$，$u_0(+\infty)=u^+=0$ 下，Cauchy 问题有唯一满足 $u(x,0)=u_0(x)$ 的行波解。在 $g''<0$，$u^-=0$，$u^+>0$ 时，Cauchy 问题有唯一满足 $u(x,0)=u_0(x)$ 的行波解。而且上述条件是行波存在的充要条件。在行波不存在的情况下，研究了与（*）对应的双曲型方程

(**) $$u_t+(g(u))_x=0$$

的稀疏波的存在性，并且给出了上述方程的 Cauchy 问题和 Cauchy-Dirichlet 问题形如 $f\left(\frac{x}{t+1}\right)$的稀疏波的具体形式。

在上述工作以后，我们重点研究了在无行波情况下，（*）的 Cauchy 问题和 Cauchy-Dirichlet 问题收敛于稀疏波的情况，并给出了收敛速度估计。在这里我们对初值 $u_0(x)$ 又附加了进一步的条件：1° 存在常数 $k_1>1$，$k_2>1$ 使得

(i) $|u_0(x)-u^-|=0(|x|^{-k_1})$ 当 $x\to-\infty$ 时

(ii) $|u_0(x)-u^+|=0(|x|^{-k_2})$ 当 $x\to+\infty$ 时

对半无界问题，设

2°：存在常数 $k_0>1$ 使得：

$$|u_0(x)-u^+|=0(|x|^{-k_0}) \text{ 当 } x\to+\infty \text{ 时}$$

在这些条件下，有形如下边的收敛速度估计：

根据 $g'(\varphi^{-1}(s))$ 的形状不同（凸或凹）分别有：

$$||\varphi(u(\cdot,t))-\varphi(u^*(\cdot,t))||_{L^\infty}\leqslant C(1+\log(t+1))^{1/2}(t+1)^{-\frac{1}{2}}(t\geqslant 0)$$

或 $$||g'(u(\cdot,t))-g'(u^*(\cdot,t))||_{L^\infty}\leqslant C(1+\log(t+1))^{1/2}(t+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$u(x,t)$ 是方程（*的Cauchy 问题或 Cauchy-Dirichlet 问题的弱解。

$$u^*(x,t)=W^*\left(\frac{x}{t+1}\right)$$

是相应双曲型方程（**）的稀疏波。上述估计是最优的。

答辩日期：1988 年 11 月 26 日

一般非线性退化抛物型方程解的存在唯一性及性质

应用数学专业研究生　宋斌恒　　指导教师　肖树铁

本文所要研究的方程是

(1.1) $$u_t(A(u))_{xx}+(B(u))_x=C(u),$$

这一方程所描述的一类物理模型是多孔介质中的一维渗流，右边三项分别反映扩散，对流和验收，由于它们都是非线性的，所以它们之间的相互作用就非常复杂，需做深入研究。

本文研究了方程（1.1）的 Cauchy 问题，第一边界问题和 Cauchy-Dirichlet 问题解的存在性，唯一性及其解的性质。本文的基本假设如下：

H_A: $A(s)\in C([0,\infty))\cap C^{2+\alpha}((0,\infty))$, $A(0)=0$;
$\forall s>0$, $A(s)$, $A'(s)>0$。

H_B: $B(s)\in C([0,\infty))\cap C^{2+\alpha}((0,\infty))$, $B(0)=0$。

H_C: $C(s)\in C([0,\infty))\cap C^{1+\alpha}((0,\infty))$, $C(0)=0$, $C(s)>0$。

H: $SA''(s)$, $SB''(s)$, $SA'(s)C'(s)\in L'(0,M)$。

H_D: $\exists D(s)\in C([0,\infty))\cap C^{2+\alpha}((0,\infty))$ 使得:
$(A\cdot D)'(s)$, $(C\cdot D)'(s)$, $D'(s)$ 单调上升，有界，
$D(0)=0$, $(B\cdot C)'(s)$ 有界单调。

对于特殊方程

(1.2) $$u_t=(u^m)_{xx}+b(u^n)_x-Cu^r$$

只要假设:

$$m,\ n,\ r>0;\ c\geqslant 0$$

就可知 H_A-H_D 和 H 都成立。

和已有结果比较，在弱解的存在性方面，我们的结果完全包含并推广了已有的关于特殊方程（1.2）的结果，对于方程（1.1）也就是只要求 H_A-H_C 和 H，关于唯一性的结果，我们只要求 H_A-H_D，去掉了已有结果中关于 $A'(0)=0$ 的限制。在讨论解的性质时，我们把一般关心的正性、传播速度有限性和局部性扩展为性质 P（传播速度无限）、F（有限传播速度），L（局部扰动性）在一定的附加条件下，本文给出了判定方程（1.1）所具有的性质的准则，例如对于特殊方程（1.2）当 m，n，$r>0$ 时，其解所具有的有关 P，F，L 的性质完全由 m，n，r 的关系和 b 的符号所确定，具体对应如下

方程 $u_t=(u^m)_{xx}+(u^n)_x-au^r$ 解的 P，F，L 性质一览表

(i)	$m\leqslant n$, $m\leqslant r$, $m\leqslant r$	P
(ii)	$m\leqslant n$, $m\leqslant r$, $m>1$,	F
(iii)	$m\leqslant n$, $m>r$	L
(iv)	$m>n$, $1>n$, $n\leqslant r$,	L^+P^-
(v)	$m>n$ $1>n$ $n>r$	L^+L^-
(vi)	$m>n$, $1\leqslant n$	$L^{-1}F^-$

对于方程

$$u_t=(u^m)_{xx}-(u^n)_x+u^r$$

只要把最后一列的±号的位置换一下就可以了。以上 P^+，F^+，L^+ 表示 $u(xt)$ 沿着 x 轴方向具有性质 P，F，L，而负号则表示沿着 x 轴反方向。

答辩日期：1988 年 11 月 26 日

二维土壤洗盐模型分析

应用数学专业研究生　余婉贞　　指导教师　萧树铁

农田排水是盐碱地改良和防治次生盐碱化的重要措施，在国内外这方面的理论研究还处于初步状态。数值模拟二维土壤洗盐过程，即用有限元方法求解非稳定状态的饱和一非饱和水流方程及溶质运移方程。在求解过程中，三角单元的划分是随饱和一非饱和自由界面的变化而改变的，同时将求解区域划分成饱和与非饱和两部分。用迭代法求非饱和一非饱和水流方程，时间步长是自动调节的。缩小区域的宽度，同时改变部分边界条件，这样可以大大减少计算时间。网格在非饱和部分及自由界面附近，沟边划分得细些，而在饱和部分则划分得粗些，减少贮存量与计算量。

在通过大量的计算之后，给出不同时间的 Darcy 流速图，等浓度分布图，并得到以下结论：

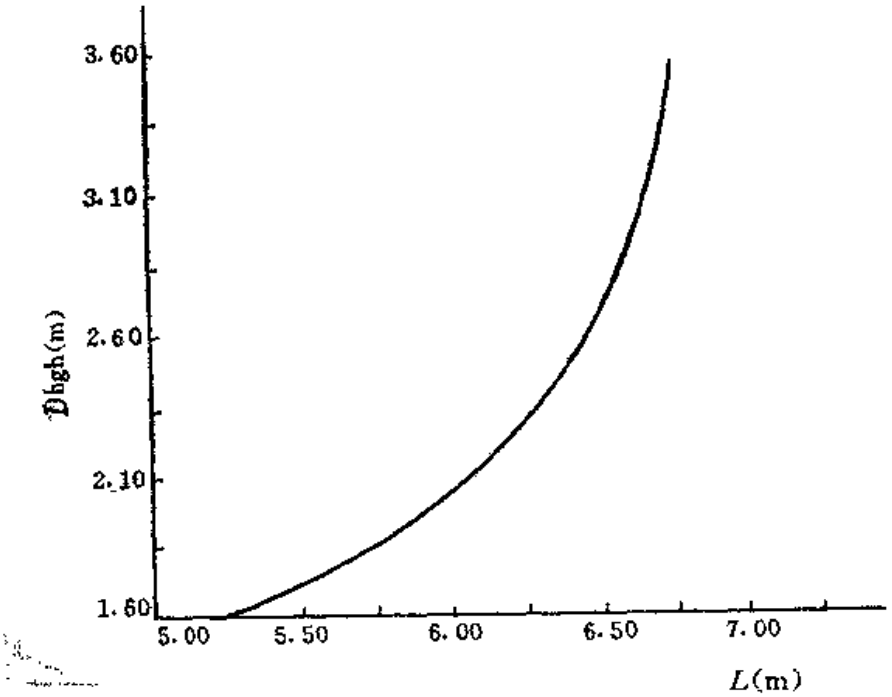
1．当沟间距与沟中水面相同时，沟越深者，饱和一非饱和自由界面上升得越慢，渗出面高度较少，自由界面的落差不定，Darcy 流速大，浓度值较小。

2．当沟深，沟中水面高度相同时，沟间距较大者，饱和一非饱和自由界面上升较慢，渗出面较小，自由界面的落差较大，Darcy 流速较小，浓度值较大。

3．当沟深，沟间距相同时，沟中水含量较多者，在初始至较短时间内，饱和一非饱和自由界面上升较快，渗出面较大，Darcy 流速较快，但时间长了之后，以上结论正好相反。

4．沟间距相同，保持沟中的水量相同，则沟深与沟浅两者的自由界面、渗出面，Darcy 流速等的差别很少。

5．当 Darcy 流速在计算深度的值相同，沟深与沟间距的关系如图表示。此时近似认为洗盐效果是等效的。



答辩日期：1988 年 11 月 28 日

解线性规划问题的牛顿一秩1修正法

应用数学专业研究生　黄晓敏　　指导教师　谭泽光

本文给出了一个解线性规划问题的内点算法，其最坏情况下需要 $O((m+n)n^2L)$ 次算术运算，其中 m 为约束数，n 为变量个数，L 输入字长，比 Karmarkar 算法的 $O((m+n)^{3.5}L)$ 和 James Renegar 的中心移动法的 $O((m+n)^{1.5}L\cdot n^2)$ 少一个 $O((m+n))$ 的因子。我们首先利用罚函数定义了与参数有关的多面体的中心，然后改变参数得到新的中心，给出了计算公式，并利用秩1修正法减少运算时间，并证明了算法的收敛性，分析了算法的复杂性，也作了一些计算机计算，比较。

设要解线性规划问题：$\max\{CX;\ AX\geqslant b\}$。假设存在 $K^{(0)}\in R$，使得 $CX\geqslant K^{(0)}$，构造不等式系统 $(\bar{A},\ b^{(0)})$ 为 $\{AX\geqslant b,\ CX\geqslant K^{(0)},\cdots,\ CX\geqslant K^{(0)}\}$，其中 $CX\geqslant K^{(0)}$ 重复 l 次，l 为参数。假设 $(\bar{A},\ b^{(0)})$ 有界非空，定义 $f^{(0)}(X)=l\cdot\ln(CX-K^{(0)})+\sum_{i=1}^{m}\ln(a_iX-b_i)$ 其中 a_i 为 A 的第 i 行向量，令使 $f^{(0)}(X)$ 取得最大值点为 $(\bar{A},\ b^{(0)})$ 的中心，可证中心是存在唯一的，记为 $\xi^{(0)}$。则 $C\cdot\xi^{(0)}>K^{(0)}$，取 $K^{(1)}$ 使得 $C\cdot\xi^{(0)}>K^{(1)}>K^{(0)}$，构造新的不等式系统 $(\bar{A},\ b^{(1)})$，$b^{(1)}$ 与 $b^{(0)}$ 的差别仅为用 $K^{(1)}$ 取代 $K^{(0)}$，可知 $(\bar{A},\ b^{(1)})$ 也是有界非空的。

我们的想法是从一个已知的中心出发，沿着中心曲线找到最优点，从直观上我们发现这是一条相当短的路。而如何沿着曲线走呢？很自然我们想到用旧的中心作为初值点，利用牛顿法来求出新的中心，算法如下 $x^{(1)}=x^{(0)}+n_x^{(0)}$，$n_x^{(0)}$ 满足：$(A^TD_x^{-2}A+l(CX-k^{(0)-2}C^TC)n_x^{(0)}=A^TD_x^{-1}e+l(CX-k^{(0)})C^T$ 其中 D_x 是对角阵，对角阵上元素为 a_iX-b_i。但是解上面的方程约需 $O(n^3)$ 次算术运算，如何降低解方程的运算时间是问题的关键所在。经研究发现 D_x 在每次迭代中变化不大，因此考虑用秩1修正法求 $A^TD_x^{-2}A+l(CX-k)^{-2}C^TC$ 的近似逆，具体地说，先保存一组 $d_1,\cdots,d_{m+l}$ 所对应的逆，当 D_x，$CX-k$ 与 $d_1,\cdots d_{m+l}$ 的相对误差大于参数 $r_0=0.1$ 时，修正该项所对应的 d_i，用秩1修正法修改所保存的逆。这样每修改一项需 $O(n^2)$ 次算术运算，而平均地每次迭代修改 $O(\sqrt{m})$ 次，故每次迭代需 $O(\sqrt{m}n^2)$ 次算术运算。

算法的收敛性证明主要是利用了相对坐标的概念，即 $((a_1X-b_1^{(j)})/(a_1\cdot\xi^{(j)}-b_1^{(j)}),\cdots,(a_m\cdot X-b_m^{(j)})/(a_m\cdot\xi^{(j)}-b_m^{(j)}))$ 为点 X 关于 $(\bar{A},\ b^{(j)})$ 的中心 $\xi^{(j)}$ 的相对坐标。通过对相对坐标间的变换，旧中心在新中心下的相对坐标，牛顿秩1修正法迭代式的分析，我们证明了当 $\delta=0.07\frac{1}{\sqrt{l}}$，$l\geqslant1$，$r_0=0.1$ 时该算法收敛到最优点，并且有估计式 $k^{opt}-CX(\xi^{(j)})\leqslant(1-(1-\bar{\alpha})l/(m+l))(1-(1-\bar{\alpha})l\delta/(m+l))^j\cdot k^{opt}-k^{(0)}$ 其中 $\bar{\alpha}=0.0855/\sqrt{l}$。并且证明了当 $m=l\geqslant70$，$r_0=0.1$ 时该算法收敛到最优解，这时 δ 可取 $0.147/\sqrt{l}$。

答辩日期：1988 年 12 月 5 日

需要全本请访问 www.ertongbook.com