一道数学竞赛题的推广

北京良乡中学　　张志欣

一九八四年初三数学竞赛有这样一道题：

“对任给97个互异的正整数，试证其中必有四个正整数，仅用减号、乘号和括号，将它们适当组合成为一个算式，其结果是1984的倍数”。

解这题要用到抽屉原理：

把三个苹果放到两个抽屉里，一定有一个抽屉里至少放两个苹果，这是一个明显的事实。类似地，任意取三个互异整数，至少有两个是奇偶性相同的数。于是，下面的命题自然是正确的：“任取三个整数，则这其中必有两个数的差能被 2 整除。”我们可以把奇数和偶数看成两个抽屉，三个数放在里面，其中一个抽屉中至少有两个数。只要是同一抽屉中的两个整数的差就能被 2 整除。

同样，任取四个互异整数，其中必有两整数差能被 3 整除，更一般的结论是$n+1$个互异整数中，必有两整数的差能被n整除。

上题的解法是：

证明：由 $1984=64\times 31$

将97个互异正整数分成两组：一组32个，一组65个，则32个数中必有两数的差是31的倍数，设此两数为 A和 B，则有$A-B=31n$，另一组 65 个数中必有两个数的差是 64的倍数，设它们为M，N，则$M-N=64m$，

需要全本请访问 www.ertongbook.com

$\therefore (A-B)(M-N)=31n\times 64m=1984mn$,

即为1984的倍数，此题证毕。

细思索一下，其实这个题的条件是过剩的，这大概是为了让初三的同学们更容易解出，题目中的条件“97个互异整数”可以减少到“65个互异正整数”，其它条件不变就能得出相应的结论。方法是，先从65个整数中挑出两个正整数A、B，使它们的差能被64整除，在剩下的63个数中当然能挑出两数M，N，使其差为31的倍数，

$\therefore (A-B)(M-N)$，是1984的倍数，此题证毕。

如果注意到$1984=62\times 32$，既使选63个互异正整数，也有相应的结论，方法如下：从63个数中先挑出两个数A与B，使其差能被62整除，再从剩余的61个数中挑出其差能被32整除的两数M与N.

$\therefore (A-B)(M-N)$是1984的倍数，证毕。

通过以上题目，熟悉了抽屉原理，远可以编出类似的题目。例如：

任取65个互异正整数，试证其中必存在四个整数，仅用减号，乘号，括号，将它们适当组成一个算式，其结果是1984的偶数倍。

证明：（1）从65个数中取出其差为64的倍数的两数A与B，即$A-B=64m$

（2）从剩余的63个数中再挑出其差能被62整除的两个数M与N，则$M-N=62n=31\times 2n$

$\therefore (A-B)(M-N)=64m\times 31\times 2n=1984\times 2mn$

命题证毕。

（本文获一等奖）

【评语】作者不仅用“抽屉原理”证明了这个

命题，并且还在原命题的基础上作了推广：任取65个互异正整数，试证其中如存在四个整数，仅用减号、乘号和括号，将它们适当组成一个算式，其结果是1984的偶倍数。这个推广的已知条件和要论证的结果都比原命题更高一筹。这样的学习方法是很可贵的。特别是证明的方法非常简练，逻辑也很清楚。

洪水平



集中供暖，势在必行

北京大学附属中学　　徐迈越　　周冰

在风景秀丽的北京西北郊，座落着一个距旧城区 7 公里的要镇—— 海淀镇。它是海淀区的政治、经济、文化中心，面积1.34万平方公里，常住人口 3 万多人。镇内拥有 48个政府机关， 7 所中小学，20多家大小工厂，还集中了 100 多个商业网点。

海淀镇周围有闻名中外的北京大学、人民大学等高等学府和人才聚集的中关村“科学城” ——中国科学院。这里的环境应该是清洁、美丽、安静和舒适的。然而现在却恰恰相反，别的污染尚且不提，仅是大气中的煤烟带来的污染就十分严重。尤其在冬季，星罗棋布的锅炉房每到早晨便展开新一天的竞赛，大小烟筒争相喷云吐雾。

我校—一北京大学附属中学处于海淀镇边。寒假期间，我们走访了十几个有关单位，对我们的邻居 ——海淀镇的大气污染状况做了初步调查。

调查结果表明，海淀镇全年大气污染物的 46.7％来源于冬季取暖。目前(1983～1984 年冬），镇内共有各类锅炉147台，其中耗煤量在200吨以上的生产炉 11台，饮水茶炉73台，而各种型号的取暖锅炉达 63台，此外，镇内居民还拥有8600多个小煤炉。平时有3600个左右用于做饭等日常生活．到了冬季，8600多个煤炉全部点燃，其污染景况可想而知。海淀镇各种炉型及耗煤量见表 1 。

表 1　　海淀镇各种炉型的耗煤情况

炉　　型	台　数	年耗煤(吨)	所占百分数(%)
生产用炉(200吨以上)	11	10075	32.29
机关食堂火灶	—	484.2	1.55
(平时)做饭用煤炉	3600	3638.25	11.66
冬季取暖用煤炉	8600	6547.28天	20.98
采暖锅炉	63	8036天	25.75
饮水茶炉	73	2488天	7.97

注　1.冬天取暖每年按120天计。
　　2.饮水茶炉每年按360天计。

经统计，海淀镇年用煤量3.12万吨，其中50%左右的耗煤量集中在冬季取暖的120天内，从而造成排污量的年均不平衡状况，这是冬季空气污染十分严重的主要原因，普遍存在于北方各城市。海淀镇全年排污量见表2。

表 2　　海淀镇全年排污量

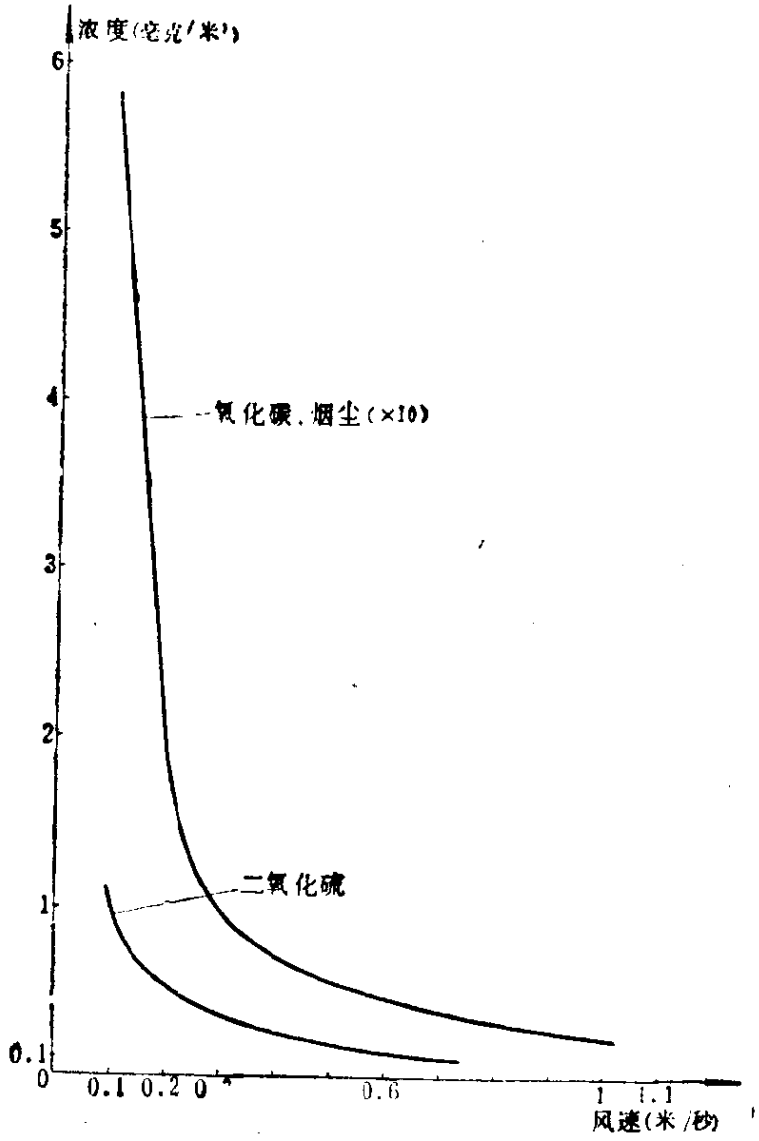
SO_2 (吨/年)	CO (吨/年)	烟　尘 (吨/年)	氮氧化物 (吨/年)	碳氢化物 (吨/年)
260.83	708.24	702	112.94	14.04

这些污染物的60%集中在冬季，因此，冬季取暖结构对环境保护有极大影响。

依照箱式模型原理粗略计算，我们绘出了海淀镇100米逆温层风速-浓度曲线（见图）。由图看出，海淀镇在冬季由于气温低、风速小，空气污染比较严重。例如国家规定空气中含二氧化硫的浓度一级为0.05毫克/米^3、二级为0.5毫克/米^3、三级为0.7毫克/米^3；含一氧化碳的浓度一级为10毫克/米^3、二级为10毫克/米^3、三级为20毫克/米^3。当风速为

需要全本请访问 www.ertongbook.com

0.2米/秒时，海淀镇污染浓度超过了国家规定的二级浓度标准；当风速为 0.1 米／秒时，则远远超过了国家规定的污染标准。



海淀镇100米逆温层风速-浓度曲线

根据海淀镇的性质，这里的空气污染浓度不应该超过二级，因此目前海淀镇的空气质量是不符合国家标准的，对我国教育、科研事业的发展十分有害。

那么，为什么冬季采暖会带来如此大的污染呢？除了燃

烧量大之外，一个重要原因，是供暖过于分散。这是我们经过调查和分析得出的结论。

首先，由于海淀镇地域小，人口高度集中，平房占绝对“统治”地位（8600多户居民基本居住在平房），室内无暖气，只好用煤炉取暖，一些单位所用平房也用煤炉取暖。这些煤炉无任何除尘措施，各种污染物（主要是有毒气体）便畅通无阻地排放出来。因为煤炉燃烧方式的落后，毒气的排放量是其它各种锅炉的几倍，从而冬季污染的二分之一左右由此产生。

第二，因为镇内的各机关、学校、工厂等单位基本上是“独门独院、各自为政”，确是“麻雀虽小，五脏俱全”，各自建锅炉房，各自烧茶炉。这些单位的占地面积都不大，所用单台锅炉耗煤量多，但供暖效率低，既污染了大气，又浪费了煤。因此，这种“单位集中、供暖分散”的供暖结构十分不合理。我们还深入调查了一些单位，发现单位内部的供暖也十分分散。例如八一中学，校内使用八台锅炉，分占四个锅炉房。其他单位也存在类似现象。

以上两点列举了镇内供暖分散的现象。这种结构造成了冬季镇内污染严重。什么方法能提高大气质量呢？

要达到这个目的，必须改变传统的分散供暖的方式，实行集中供暖。为此我们走访了清华大学一座大型锅炉房，该锅炉房拥有两台20吨的供暖锅炉（平时一台备用），每台占地8000平方米，可供暖24万平方米，一冬天耗煤4800吨。

如果海淀镇采用大锅炉集中供暖，将有如下的优越性：

一、省煤

海淀镇现有总建筑面积约22万平方米，所以只需一台20吨锅炉就够了。这台锅炉24小时连续工作，一冬仅耗煤4800

吨，是现在海淀镇冬季来暖耗煤量（ 14500吨）的三分之一，折合人民币 24万多元。这是一个相当可观的数字。

二、省地

一座20吨锅炉房占地8000平方米。一个小煤炉占地按 1 平方米计算（包括贮煤面积），全镇共有8600个小煤炉，至少可节省 600 平方米居住面积，这还不包括那些中、小型锅炉的占地面积。

三、节省人力、物力

一座20吨的锅炉房，职工人数不超过20人，而现在全镇仅司炉工就近 100 人。不仅如此，集中供暖还可大大节省居民购煤、运煤的时间和搬煤、生火的麻烦，又可避免各单位自己用卡车拉煤产生的种种矛盾。

四、安全、清洁、宜于管理

集中供暖可以大幅度减少煤气中毒之类的事故。此外，20吨锅炉技术先进，耗煤量小，清洁卫生，宜于管理。我们曾注意观察了清华大学20吨锅炉的烟囱，发现它只冒出几乎看不见的淡淡的清烟。它的各种污染物将大大小于目前供暖方式所带来的污染。

由此可见，集中供暖，势在必行。（本文获一等奖）

【评语】作者着眼于社会的需求，经过大量的调查，分析，提出了解决冬季犬气污染的办法，这是一篇理论联系实际的好文章。

董福忠

热带鱼的观察和饲养

北京第一六六中学　　王莹

去年秋天，妈妈的好友送给我家十几条美丽的小热带鱼，后来爸爸又到鱼市场买了一些其他品种的热带鱼。我们把鱼放养在一个大玻璃缸中，还放入一些水草。看着小鱼在丝丝缕缕的水草中游泳嬉戏，真是妙趣横生。

我们养的最多的是孔雀鱼。这是热带鱼中最容易饲养的一种。雄孔雀鱼体型苗条，呈流线形，体色多种多样，“他们”中有蓝色的，绿色的，红色的，黄色的，还有红绿相间的，红黄相间的，黄绿相间的；尾鳍有深蓝色的，浅蓝色的，绿色的，橙红的，大红的，还有红尾鳍镶银边的。真不知大自然是怎样给它们搭配的。长长的尾鳍摇摇曳曳，游泳的姿态非常优美潇洒。相反，雌鱼身体较胖，体色暗淡，只有尾鳍才有些鲜艳的色彩，不如雄鱼漂亮。

其次是黑裙和蓝裙——一些体色呈黑色、深蓝色的热带鱼，它们的尾鳍特别发达，长长宽宽的尾鳍边上长着一圈小白点，好象裙子边上镶了一圈闪闪发光的珍珠。它们象是一群腰肢纤细的少女身着玄色长裙在翩翩起舞；又象是五彩缤纷的花蝴蝶在草丛中飞舞。它们时而追逐嬉戏，时而玩耍觅食，显得活泼动人。

和它们相反，燕鱼长着扁扁的圆形身体，穿着黑白条纹相间的“大礼服”，却摆出一副矜持超脱的姿态，悠悠闲闲，自由自在地游来游去。根本不理睬其他鱼。无怪乎人们称它们为神仙鱼呢！

论色彩最好看的还得算“蛇皮”。这种鱼周身都闪着燐光，总象是披着一件钻石镶嵌的衣服，晶莹闪亮，别有一番风韵。另外还有浑身乌黑生性调皮的黑摩利，拖着长箭尾的红箭…… 简直是太美了，太多了，我简直无法把那美丽的色采，可爱的姿态都一一描叙下来了。每当有客来访，啧啧赞叹我们的小鱼时，我们便情不自禁地露出得意的微笑。

因为这都是爸爸、妈妈也包括我辛勤劳动的结果。这些小生灵虽然给我们增添了无限乐趣，但要把它们养活、养大、养好却是很不容易的。热带鱼的老家在中美洲、印度洋和东南亚一带，那些地区气候炎热，水温高。怎样使这些娇贵的小鱼在北京安下家呢？首先是调节好水温。我家只有最简单的饲养工具，根本没有什么电热器之类的设备。快到冬天的时候，妈妈有些发愁，怕鱼被冻死。可是我们宿舍的暖气来得特别早，室温升高了，鱼也不再畏畏缩缩了。妈妈每天都打满一盆水放在暖气上，提高水温准备换水。就这样鱼儿们舒舒服服地过了冬天。春天暖气停得晚，鱼也没受罪。可是在盛夏季节，气温突然升高，由于我们照顾不周，经过闷热的一夜，鱼缸里闷死了十几条“蛇皮”，后来我才认识到：热带鱼也不是天越热就越好养，天越热，越要通风，水越要勤换，要保持水中有足够的氧气才行，这样才能使鱼平安地度过盛夏。

除了适当的温度，还要有适宜的光照。强烈阳光的直射或是阴暗无光都会使热带鱼绚丽的色彩褪去大半。因此要想保持鱼美丽的色彩，就要根据光的强弱经常调整鱼缸的位置，这才能保证鱼的体色总是光艳照人。这是我们最成功的一条经验！

热带鱼以吃活鱼虫为最好。热带鱼刚来时，我们喂鸡蛋

黄，结果水很快就浑浊了。喂面包渣，鱼又不爱吃。喂干鱼虫也只能维持其生命，而不能促使其成长，后来，爸爸的“鱼友”告诉我们一定要喂活鱼虫。爸爸勇敢地承担起买鱼虫的任务。冬天一星期买一次，夏天两三天买一次。爸爸把这项任务当做早锻炼，从不懈怠，迎着朝霞蹬车而去，等回来时还不到七点，吃着早点，看着鱼撒欢地抢鱼虫吃，真是别有一番情趣啊！吃了活鱼虫，鱼的尾鳍越长越大，越长越长。刚生下不久的小鱼吃了活鱼虫就长得更快了，就象吹气塑料玩具一样，一天一个样。

热带鱼的繁殖也是非常有趣的，我们养的热带鱼都是卵胎生的。母鱼生下来的就是小鱼。起初，雄鱼在水中追逐着雌鱼，有时甚至两三条雄鱼一起追一条雌鱼。当雌鱼肚子后方生出两块黑斑时。就说明它已经怀孕了。后来，母鱼的肚子越来越大，有时胀得象个皮球。这时妈妈就把母鱼单独放在一个产缸里。不久小鱼就出世了。小鱼出世前，母鱼先是痛苦地，急速地游动，一会小鱼的头眼就从母鱼肚子后面黑点处露了出来。母鱼用力一甩尾巴，小鱼便象个蝌蚪似地钻了出来，在水中游起泳来。如果有的小鱼体质太弱，就先在缸底上趴一会，休息后再游上来。也有个别的受精卵还没有发育成小鱼就被生了出来，一个小圆蛋蛋沉在缸底再也不动弹了。一条大母鱼一次大约可生四五十条小鱼。母鱼生了小鱼一般不吃，只有在没有食物的情况下大鱼才吞食小鱼。如果在鱼虫充足的条件下，大鱼和小鱼就可以和平相处了。大鱼吃小鱼，小鱼吃鱼虫，这是一条食物链，也是一个自然规律。但是有一次我们发现了鱼虫把小鱼咬死的事件。一天，妈妈喂鱼，鱼虫放得太多了，也没在意，没想到半夜里有条母鱼下了小鱼，次日清晨便发现几十条小鱼都死了。后来

需要全本请访问 www.ertongbook.com

向行家一打听才知道：由于放的鱼虫过多水质很快变坏，小鱼在恶劣水质中生活，缺氧窒息而亡，并且开始腐烂，小鱼的尸体成了众多鱼虫的食物，鱼虫将一些死小鱼吃掉，另一些沉到缸底。这又给我们增长了一条知识：干什么都要讲究条件，讲究数量，否则会适得其反。

小鱼最初都是土黄色或灰黑色的，很难看。只要喂养得法，三个月就可以长成大鱼。但据我观察，黑裙妈妈的孩子不一定都是黑裙，红裙妈妈的孩子中会有蛇皮，有的比鱼妈妈好看，有的没有鱼妈妈好看，还有的长得怪模怪样，不像鱼缸中的鱼……

哎呀！这些都是遗传学上的课题了。我自己说来说去也说不清楚了。如果我以后进了大学生物系，一定要用学到的知识来研究这些问题。还要培养出更加美丽的供人观赏的鱼，让人们紧张工作之余来欣赏；也要培养出体大肉嫩的食用鱼，让人们的饭桌上经常出现美味的佳肴。还要从鱼身上提炼出药物，油脂，以及一切可以为人类所利用的物质，造福人类。（本文获二等奖）

【评语】作者在饲养热带鱼的过程中，能对鱼的生态和行为做较为细致的观察，如光照强弱对体色的影响，热带鱼的食性，繁殖中的趣事。

作者没有放过鱼缸中的生态现象，没有停留在一般性的饲养——喂喂鱼虫、换换水，而是把不大的养鱼缸当做实验观察场所。这种细心的观察对培养自己对外界事物的了解与分析能力的提高是大有帮助的。

观察还需进一步提高，以便结论更准确。

徐宗佑

2^{1984}天后是星期几？

北京第九十四中学　　丁娟

《中学生数学》杂志第一期封底“俱乐部”栏目里有这样一道题“1984年1月1日是星期日，那么2^{1984}天后的那一天是星期几？”这道题很有意思，但做起来又不知从何下手，我思考了一会儿，没有想出解答的方法，由于学习紧张，就把它搁置起来了。

这次期中考试的政治开卷部分，要求我们写一篇学哲学，用哲学的文章，我决定从矛盾普遍性和特殊性关系原理的应用方面着笔。就在我翻阅杂志，寻找可以引用的例子时，又看到了这道题，我忽然产生了一个念头，何不运用这个原理试解这道题呢？

矛盾的普遍性和特殊性关系原理是：矛盾的普遍性和特殊性是相互联结的，一方面，普遍性寓于特殊性之中，并通过特殊性表现出来，没有特殊性就没有普遍性；另一方面，特殊性也离不开普遍性。矛盾的普遍性和特殊性不是一成不变的，在不同场合是可以发生变化的。这一原理要求我们在认识事物的时候，必须把两方面辨证地统一起来，既要从特殊性中概括出普遍性，又要在普遍性指导下去研究特殊性，就是遵循由特殊到普遍，再由普遍到特殊的认识秩序。

具体到这道题，我认为每一个具体数字的计算是特殊性，而从所有这些计算中总结出来的规律性是普遍性。面对这一问题，第一步就是要完成由特殊到普遍的转化，我按照

2^1，2^2，2^3，2^4，2^5……的顺序穷举下去，分别计算了一些2的不同次幂的值（即经历的天数），然后推出各自后一天是星期几，列于下表。

2^n	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	…	…
天　数	2	4	8	16	32	64	128	256	512	…	…
星　期	2	4	1	2	4	1	2	4	1	…	…

表中已清楚地显示了规律性，可以看出，2的指数每增加3个数值，星期就循环了一个2、4、1！不完全归纳给我指明了普遍规律，而这个规律的正确性需待用数学归纳法加以证明。总的说，问题包括三个部分：$2^{3n-2}-2$，$2^{3n-1}-4$，$2^{3n}-1$，（$n\geqslant 1$)都能被7整除。以$2^{3n}-1$能被7整除为例，证明如下：

当$n=1$时，$2^{3n}-1=2^3-1=7$能被7整除。

假设当$n=K$时，$2^{3n}-1$能被7整除，那么当$n=K+1$时，$2^{3(K+1)}-1=2^{3K+3}-1=2^3\cdot 2^{3K}=8(2^{3K}-1)+7$。因为$2^{3K}-1$能被7整除，则$8(2^{3K}-1)+7$能被7整除。这就说明当$n=K+1$时，$2^{3n}-1$也能被7整除。所以这个规律对于任意一个自然数$n$都是正确的（同理，可证明另外两个命题）。

有了普遍性，而且是正确的普遍性，就可以用来指导特殊，这是解决这一问题的第二步。对于2^{1984}这个具体数字，因为$1984\div 3=661\cdots\cdots 1$，既然它被3除商是661余1，那么可以推断：经661次循环后的第一个数就是2^{1984}后的那一天，而2^{1984}后的那一天与表中2^1，2^2，…，2^7所对应的一样，应

当是星期 2。一道开始认为无从下手的题，应用了哲学原理，在矛盾的普遍性和特殊性关系原理的指导下，就这样解出来了。

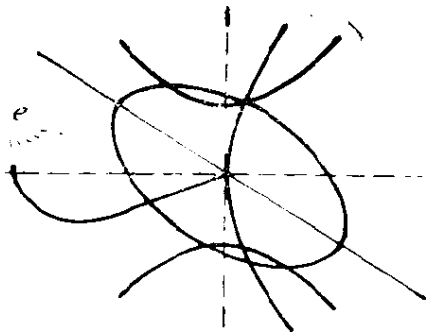
第二期杂志发下来了，我看到我的答案被证实了，我很高兴，从而更加激起了我学哲学的兴趣。今后我一定要更加认真地学习马克思主义哲学，联系实际，树立科学的世界观和方法论，坚持运用它来指导我的学习和生活。（本文获二等奖）

【评语】命题：1984年1月1 日星期日、那么 2^{1984} 天后的那一天是星期几？”

这个命题看起来很容易，其实不然，计算 2^{1984} 就是一件烦死人的事。作者应用“矛盾的普遍性和特殊性关系”的原理，把每个具体数字的计算看作特殊性，而把一些具体数字计算中总结出来的规律看作普遍性，并用穷举法对一些 2 的不同次幂作了计算，从特殊性到普遍性的转化中，找到了“2 的指数每增加 3个数值，星期就循环一个 2、4、1”的普遍规律。这个普遍规律是否正确呢？作者又用数学归纳法进行了证明。（这是由特殊到普遍）。有了这个普遍规律就不难算出 2^{1984} 天后的那一天是星期几了。（这是由普遍到特殊）。

此文论述简练，逻辑清楚。

洪水平



用哲学观点探讨二次曲线

北京煤炭工业学校　张彬

解析几何是初等数学的重要组成部分，而二次曲线又是解析几何的主心骨。为了更好地学习，我用哲学的观点，抓住椭圆、抛物线和双曲线之间的桥梁——离心率 e，对它们的性质和图象进行了探讨。

我们学过，事物的发展总是从量变开始，而量的增加或减少，在一定的限度内并不引起质的变化，即事物还保持自己质的相对稳定性。量变超出了一定限度，就引起质变，旧质归于消灭，出现了新的质，这就是由量变到质变的转化。在新质的基础上，又开始新的量变过程，这是由质变到量变的转化。事物的发展，就是由量变到质变，又由质变到新量变的循环往复，并不断地由低级向高级发展的过程。我们就用这个指导思想，用 e 的数量变化，研究椭圆、抛物线和双曲线的性质和图象。

e 的实质是一个动点到一定点和一条定直线的距离之比。它是一个常数。这个动点的轨迹就叫二次曲线。也叫圆锥曲线。随着 e 的不同，曲线的形状也不同，曲线可分为椭圆、抛物线和双曲线三种。下面我们就讨论它们之间的关系。

一、椭圆、抛物线和双曲线是统一的

（1）从方程的形式看，在直角坐标系中，它们的方程都是二元二次方程，即

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

所以把它们统称为二次曲线。

（ 2 ）从点的集合的观点来看，它们都是到定点与定直线的距离之比为常数 e 的点的集合，只是曲率 e 的不同才分为三种形式。

（ 3 ）三种曲线又可看作不同的平面截圆锥所得到的截线，故又称它们为圆锥曲线。

（ 4 ）从天体运行的轨迹看，它们都是一些天体运动的轨迹。

二、椭圆、抛物线和双曲线是有区别的

我们可由 e 的变化，看出二次曲线由量变到质变的过程。为了方便，我们从直角坐标系下椭圆的标准方程入手，椭圆标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$a^2=b^2+c^2$$

$$e=\frac{c}{a}$$

其中 a 为长半轴， b 为短半轴， c 为半焦距。从而得到

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=1-e^2$$

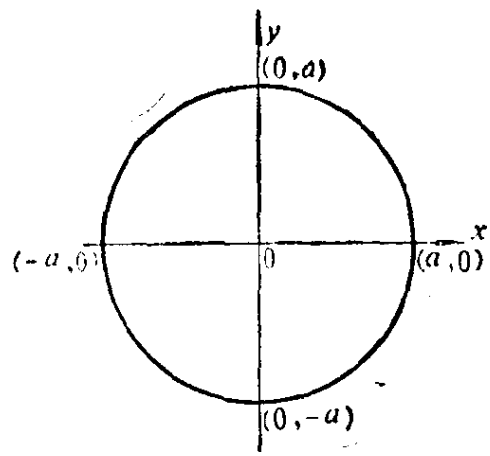


图 1

现在就讨论这个 e 的变化。

（ 1 ）当 $e=0$ 时，则 $c=0$ ，$\left(\frac{b}{a}\right)^2=1$ 即 $b=a$ 方程为

$$x^2+y^2=a^2$$

其图象为圆，如图 1 所示。它可理解为椭圆的两个焦点重合起来的特殊情形。

需要全本请访问 www.ertongbook.com