



文登教育集团课堂用书  
考研数学强化班指定讲义



# 2012 >>>

# 考研数学 核心题型

数学一 · 数学二

—— 始于1996年，每年服务30万考生 ——

## 陈文灯 主编

- >> 本书2011版涵盖**2011年考研数学一真题117分，数学二真题123分**
- >> 本书提出一个观点，**数学也需要记忆**，背定理，记公式，掌握核心题型
- >> 本书揭示一个事实，**考数学就是考基础，考题型**，考代表数学本质的核心题型

买正版图书赠**300**元文登网校真题点评视频课程



北京航空航天大学出版社  
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

## 内 容 简 介

数学问题主要是由各种类型的题(题型)构成的。本书是一本省时、省力、高效的考研数学题型辅导书。它以 20 多年的考研数学试卷为素材,通过分析、归纳,遴选出 203 个核心题型。其内容包括“高等数学题型”、“线性代数题型”、“概率论与数理统计题型”三部分,涵盖《考研数学大纲》(数学一·数学二)的全部内容。书中给出了各类题型的解题方法和技巧,有些方法和技巧是编者独创的,例如,连续函数在闭区间上的有关命题的证明方法、文字不等式的证明方法和各种辅助函数的作法等。这些方法和技巧能大大提高学生的复习效率,化难为简,在考场上常常能直书正确答案,从容过关。

本书适合于参加考研的学生在复习时自学研读,也可以作为考研辅导机构的强化班指定讲义。本书 2011 版涵盖 2011 年考研数学一真题 117 分,数学二真题 123 分。

### 图书在版编目(CIP)数据

考研数学核心题型. 数学一·数学二 / 陈文灯主编

. -- 北京 : 北京航空航天大学出版社, 2011. 5

ISBN 978 - 7 - 5124 - 0442 - 7

I. ①考… II. ①陈… III. ①高等数学—研究生—入学考试—解题 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 086657 号

版权所有,侵权必究。

### 考研数学核心题型

[数学一·数学二]

陈文灯 主编

责任编辑 刘晓明 王 实 沈 涛

张冀青 宋淑娟

\*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱: [bhpress@263.net](mailto:bhpress@263.net) 邮购电话:(010)82316936

有限公司印装 各地书店经销

\*

开本:787×1092 1/16 印张:29.75 字数:762 千字

2011 年 5 月第 1 版 2011 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5124 - 0442 - 7 定价:42.80 元

# 前 言

考研的几门课中,数学是考生公认的最难复习、最难考的一门课。为此,不少学生不得不放弃钟爱的专业,报考不考数学的专业;多数人硬着头皮抱着试试看的态度参加复习考试。数学果真那么可怕,那么难吗?对于原来数学基础不好,又想考高分(135分以上)的考生来说,只要具备两个条件:①比较强的记忆力;②比较强的模仿能力,即可圆“高分梦”。

记忆的作用在于记住重要的概念、理论与定理公式,以及记住计算方法与技巧。没有记住的东西就无模仿可言,可见记忆之重要。一般人都知道学英语需要记忆,单词需要背诵,其实学数学也需要记忆,要在理解的基础上背重要的定理、公式和概念,背核心的题型。

模仿是指对解题方法和技巧的一种描摹或仿效。数学题千千万,如果都用东施效颦的方法,姑且不说做不到,也不会有什么效果。要模仿就应该抓住常考题型进行相似或变异题的训练。无论是以题型为纲进行的数学实践(考研辅导班),还是出版书籍的反馈信息,都证明:抓题型就是抓解题方法和技巧的根本和关键。就是基于这样的考虑,我们才编写了这样一套与《考研数学复习指南》(理工类·数学一)相配套的、复习起来省时、省力的考研数学核心题型教材。希望书中的方法和技巧能够在较短的时间里大大提高学生的复习效率,化难为简,从容过关。

本书的特点如下:

① 严格按照《考研数学大纲》的要求,对国内外文献资料,尤其是对20多年来考研试题进行了归纳总结,精选出203个题型。

② 对每个题型进行详尽分析,指出其特点和易混、易错的地方。

③ 书中有许多题型的解题方法和技巧是我们苦心孤诣、冥思苦想出来的,决非市面上其他书籍所共有。

④ 有些题解后有评注,虽然寥寥数语,却可起到画龙点睛、开拓思路的作用。

⑤ 本书编写属上课讲义的形式,可能更贴近考生。

本书适合于参加研究生入学考试的同学在复习时自学研读,也可作为考研辅导机构的强化班指定讲义。高等数学的普通学习者和爱好者亦可以阅读,并从中领略数学科学的简约之美和数字运算技巧的奇妙。

书中若有不当之处,敬请读者批评指正。

A handwritten signature in black ink, consisting of the characters '陈灯' (Chen Deng) in a cursive style.

2011年3月

# 目 录

## 第 1 篇 高等数学题型

第 1 章 极限和连续	1
1.1 重要定理	1
1.2 重要公式	3
1.3 函数的极限	4
题型 1 无穷小的比较或确定无穷小的阶	4
题型 2 求未定式函数极限	5
题型 3 求分段函数在分界点的极限	12
题型 4 极限式中常数的确定	13
1.4 数列的极限	15
题型 5 求各种类型( $\infty/\infty$ 型、 $1^\infty$ 型、 $\infty-\infty$ 型)的数列极限	15
题型 6 给出数列 $\{x_n\}$ 通项表达式, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	17
题型 7 数列 $n$ 项和 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ , 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限	18
题型 8 $n$ 个因子乘积, 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限	20
1.5 函数的连续性	22
题型 9 函数连续性的讨论	22
题型 10 确定函数的间断点及其类型	23
1.6 杂 例	25
题型 11 从含有 $f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 的方程中求解 $f(x)$	25
题型 12 当 $x \rightarrow 0$ 时, 求含有 $e^{\frac{1}{x}}$ , $\arctan \frac{1}{x}$ , $\operatorname{arccot} \frac{1}{x}$ , $ x $ 的极限	27
题型 13 含 $f(x+a) - f(x)$ 的非 $\frac{0}{0}$ 型极限式且 $f(x)$ 可导	28
第 2 章 导数与微分	29
2.1 导数和微分的概念	29
2.2 导数公式和运算法则	30
2.3 重要定理	31
2.4 与导数定义和性质有关的命题	31
题型 14 求含有抽象函数的 $\frac{0}{0}$ 型极限	31

题型 15	与抽象函数的导数相关的命题	34
题型 16	判断函数的可导性	36
2.5	各种函数的导数或微分	37
题型 17	求一元复合函数的导数或微分	37
题型 18	求参数方程所确定的函数的导数	37
题型 19	求一元隐函数的导数或微分	38
题型 20	求幂指函数的导数或微分	39
题型 21	求函数表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数 或微分	40
题型 22	求分段函数的导数或微分	41
题型 23	求简单函数的高阶导数	44
<b>第 3 章</b>	<b>不定积分</b>	<b>48</b>
3.1	不定积分	48
3.2	三种基本积分方法	49
3.3	不定积分中的概念	57
题型 24	与原函数相关的命题	57
3.4	各种函数的不定积分	58
题型 25	求简单有理函数的不定积分	58
题型 26	简单无理函数的不定积分	60
题型 27	三角有理式的积分	61
题型 28	分段函数的不定积分	64
题型 29	含对数函数、反三角函数的不定积分	66
题型 30	复合函数的不定积分	67
题型 31	计算隐函数的不定积分	68
<b>第 4 章</b>	<b>定积分</b>	<b>70</b>
4.1	定积分的基本性质	70
4.2	重要定理	70
4.3	重要公式	71
4.4	计算定积分的方法	72
4.5	反常积分	73
4.6	与定积分的定义和性质相关的命题	75
题型 32	定积分的估值	75
题型 33	变限积分的求导问题	76
4.7	各种类型定积分的计算	77
题型 34	求分段函数的定积分	77
题型 35	求含有绝对值符号的定积分	78
题型 36	求被积函数中含有变上限积分的定积分	79

题型 37	求对称区间 $[-l, l]$ 上的定积分	80
题型 38	求周期函数的定积分	82
题型 39	求被积函数的分母为两项,分子恰为其中一项的定积分	83
题型 40	求由三角有理式与初等函数通过四则运算、复合运算或变量代换所得式的定积分	83
题型 41	定积分等式的证明	84
题型 42	定积分不等式的证明	88
4.8	反常积分	92
题型 43	反常积分的计算及收敛	92
<b>第 5 章</b>	<b>微分中值定理</b>	<b>94</b>
5.1	闭区间上连续函数的性质	94
5.2	微分中值定理	94
5.3	闭区间上连续函数的命题	95
题型 44	闭区间上连续函数命题的证明	95
5.4	中值定理的应用	99
题型 45	证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理	99
题型 46	证明某个函数恒等于一个常数的命题	100
题型 47	命题 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明	101
题型 48	欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ , 使得 $f^{(n)}(\xi)=k(k \neq 0)$ 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式成立	102
题型 49	欲证结论:在 $(a, b)$ 内至少存在 $\xi, \eta(\xi \neq \eta)$ 满足某个代数式	105
<b>第 6 章</b>	<b>一元微积分的应用</b>	<b>107</b>
6.1	重要定理和结论	107
6.2	导数的应用	107
题型 50	一元函数单调增减性的判别	107
题型 51	一元函数极值的判定或求解	110
题型 52	求一元函数的最值及简单应用	111
题型 53	曲线的拐点或凹凸区间的判定或求解	112
题型 54	函数曲线的渐近线方程的计算与导数的判定	113
题型 55	与曲线曲率相关的命题	115
6.3	方程的根	116
题型 56	方程根的存在性问题	116
题型 57	方程根的个数的研究	117
题型 58	方程根的唯一性问题	118
6.4	定积分的应用	120
题型 59	利用微元法解题	120
题型 60	求平面图形的面积	122

题型 61	求旋转体的侧面积	124
题型 62	求已知截面面积的立体体积或旋转体体积	126
题型 63	求平面曲线的弧长	128
题型 64	一元积分在物理上的应用	129

## 第 7 章 常微分方程 132

7.1	二阶线性微分方程解的性质	132
7.2	二阶线性微分方程解的结构定理	132
7.3	一阶微分方程的求解	133
题型 65	一阶可分离变量方程的求解	133
题型 66	一阶齐次微分方程或可化为齐次微分方程的求解	134
题型 67	一阶线性微分方程的求解	137
题型 68*	伯努利方程的求解	139
题型 69*	全微分方程的求解	140
7.4	二阶或二阶以上微分方程的求解	143
题型 70	可降阶的高阶微分方程的求解	143
题型 71	有关二阶常系数齐次线性或非齐次线性微分方程解的结构的命题	144
题型 72	求二阶常系数齐次线性或非齐次线性微分方程的通解	145
题型 73	求欧拉方程的通解	151
题型 74	微分方程在几何中的应用	152
题型 75	微分方程在物理中的应用	153

## 第 8 章\* 向量代数与空间解析几何 156

8.1	概念和性质	156
8.2	两个向量之间的关系	156
8.3	平面方程的几种形式	157
8.4	空间直线方程的几种形式	157
8.5	常见二次曲面的标准形式	158
题型 76	向量的运算	158
题型 77	求平面方程	160
题型 78	求空间直线方程	161
题型 79	平面与平面、平面与直线、直线与直线的关系	162
题型 80	求柱面方程	165
题型 81	求投影线方程	167
题型 82	求旋转曲面方程	168

## 第 9 章 多元函数微分学 170

9.1	连续、可微和可导的关系	170
9.2	多元函数的极值	170

9.3	多元函数微分	171
	题型 83 有关二元函数定义域、极限、连续的计算题	171
	题型 84 简单显函数 $z=f(x,y)$ 偏导数的计算	172
	题型 85 考查二元函数 $z=f(x,y)$ 的连续、偏导及可微性	173
	题型 86 多元复合函数偏导数的计算	174
	题型 87 隐函数偏导数的计算	179
	题型 88 多元函数全微分的计算	183
9.4*	多元函数在几何上的应用	184
	题型 89 求空间曲线在某点处的切线和法平面方程	184
	题型 90 求空间曲面在其上某点处的切平面和法线方程	185
9.5	多元函数的极值和最值	187
	题型 91 求多元函数的极值	187
	题型 92 求多元函数的最值	189
<b>第 10 章</b>	<b>重积分</b>	<b>193</b>
10.1	二重积分的性质和定理	193
10.2	二重积分的计算	194
10.3	二重积分	196
	题型 93 更换二重积分的积分次序	196
	题型 94 选择积分次序	197
	题型 95 积分区域关于坐标轴对称的二重积分	199
	题型 96 分段函数的二重积分	201
	题型 97 被积函数 $f(x,y)$ 中含有绝对值符号的二重积分	203
	题型 98 被积函数 $f(x,y)$ 中含有最值符号 $\max$ 或 $\min$ 的二重积分	204
	题型 99 二重积分等式的证明	205
	题型 100 二重积分不等式的证明	206
10.4*	三重积分	208
	题型 101 三重积分的计算	208
	题型 102 利用对称性化简三重积分	213
	题型 103 利用轮换对称性化简三重积分	214
10.5*	重积分的应用	215
	题型 104 求体积	215
	题型 105 求曲面的面积	216
	题型 106 求薄片或形体的质量、质心的坐标、转动惯量、引力	217
<b>第 11 章*</b>	<b>无穷级数</b>	<b>219</b>
11.1	基本性质	219
11.2	级数的判敛法	219
11.3	幂级数	221

11.4	七个常见的函数展开式(必须熟记)	222
11.5	与级数概念和性质相关的命题	223
	题型 107 判别数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性,并附有“若收敛时,求其和”的命题	223
	题型 108 利用级数敛散性的定义及性质,判断级数的敛散性	224
11.6	级数敛散性的判别	225
	题型 109 正项级数敛散性的判别	225
	题型 110 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ( $u_n > 0$ ) 敛散性的判别	228
	题型 111 任意项级数敛散性的判别	230
	题型 112 有关数项级数敛散性的证明	233
	题型 113 给出函数 $f(x)$ 的某种条件,形如 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 的级数的敛散性的证明	235
	题型 114 利用级数证明数列 $\{a_n\}$ 极限的存在或求解某些特殊极限	236
11.7	幂级数	237
	题型 115 求函数项级数的收敛域	237
	题型 116 求幂级数的收敛域或收敛半径	240
	题型 117 求函数在指定点的幂级数展开式	242
	题型 118 无穷级数求和	245
11.8	傅里叶级数	250
	题型 119 将函数展开成傅里叶级数	250
<b>第 12 章 * 曲线积分与曲面积分</b>		<b>254</b>
12.1	曲线积分	254
12.2	曲面积分	255
12.3	曲线积分题型	257
	题型 120 对弧长曲线积分的计算	257
	题型 121 平面坐标中对坐标的曲线积分的计算	259
	题型 122 空间域中对坐标的曲线积分的计算	264
12.4	曲面积分题型	265
	题型 123 对面积的曲面积分的计算	265
	题型 124 对坐标的曲面积分的计算	268
	题型 125 应用题	273
	题型 126 场论初步	275
<b>第 13 章 函数方程与不等式证明</b>		<b>278</b>
13.1	函数方程	278

题型 127	利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求函数方程	278
题型 128	利用极限求函数方程	278
题型 129	已知函数在一点的导数及函数方程,求函数方程	279
题型 130	已知函数方程中含有变上限积分,求函数方程	279
题型 131	已知函数连续,且函数式中含函数的定积分、极限或二重积分,求函数方程	282
题型 132*	已知函数方程中含有偏导数条件或曲线积分与路径无关,求函数方程	283
13.2	不等式证明	284
题型 133	存在一个点 $\xi \in (a, b)$ ,使得不等式成立或不等式通过变形,一端可写成 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 或 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 的命题的证明	284
题型 134	在某一区间 $(a, b)$ 不等式命题成立的证明	285
题型 135	文字不等式的证明	286
题型 136	函数 $f(x)$ 二阶和二阶以上可导的不等式命题的证明	287
题型 137	杂例	288

## 第 2 篇 线性代数题型

<b>第 14 章</b>	<b>行列式</b>	<b>291</b>
14.1	重要定理和性质	291
14.2	重要结论	291
题型 138	与行列式的定义和性质相关的命题	292
题型 139	数值型行列式的计算	293
题型 140	行列式的余子式或代数余子式线性组合的计算	298
题型 141	计算抽象行列式	300
<b>第 15 章</b>	<b>矩 阵</b>	<b>303</b>
15.1	矩阵的运算性质	303
15.2	重要结论	303
15.3	逆矩阵	304
题型 142	有关逆矩阵的计算问题	304
题型 143	矩阵可逆的证明	307
15.4	矩阵的运算	308
题型 144	有关矩阵运算的命题	308
题型 145	求矩阵的行列式	310
题型 146	与伴随矩阵相关的命题	312
15.5	初等矩阵	313

题型 147 有关初等变换和初等矩阵的命题 .....	313
-----------------------------	-----

<b>第 16 章 向 量 .....</b>	<b>316</b>
-------------------------	------------

16.1 重要结论 .....	316
-----------------	-----

16.2 向量题型 .....	317
-----------------	-----

题型 148 讨论向量组的线性相关性 .....	317
--------------------------	-----

题型 149 求向量组的极大线性无关组和秩 .....	321
-----------------------------	-----

题型 150 有关向量组或矩阵的秩的计算与证明 .....	322
-------------------------------	-----

题型 151 有关向量的线性表示的问题 .....	323
---------------------------	-----

16.3* 向量空间题型 .....	328
--------------------	-----

题型 152 求向量空间的基与维数 .....	328
-------------------------	-----

题型 153 求过渡矩阵与向量的坐标 .....	329
--------------------------	-----

题型 154 有关正交矩阵的命题 .....	330
------------------------	-----

<b>第 17 章 线性方程组 .....</b>	<b>331</b>
---------------------------	------------

17.1 重要性质和定理 .....	331
--------------------	-----

17.2 有关线性方程组的题型 .....	332
-----------------------	-----

题型 155 有关线性方程组的基本概念题 .....	332
----------------------------	-----

题型 156 有关基础解系的命题 .....	334
------------------------	-----

题型 157 线性方程组的求解 .....	335
-----------------------	-----

题型 158 矩阵方程的求解 .....	339
----------------------	-----

题型 159 讨论两个线性方程组解之间的关系 .....	341
------------------------------	-----

<b>第 18 章 特征值与特征向量 .....</b>	<b>344</b>
------------------------------	------------

18.1 重要结论 .....	344
-----------------	-----

18.2 矩阵的特征值与特征向量 .....	345
------------------------	-----

题型 160 求数值型矩阵的特征值与特征向量 .....	345
------------------------------	-----

题型 161 求抽象矩阵的特征值与特征向量 .....	347
-----------------------------	-----

题型 162 特征值与特征向量的逆问题 .....	348
---------------------------	-----

18.3 相似矩阵及其对角化 .....	350
----------------------	-----

题型 163 相似矩阵的判定及其逆问题 .....	350
---------------------------	-----

题型 164 矩阵可对角化的判定及其逆问题 .....	351
-----------------------------	-----

题型 165 有关实对称矩阵的命题 .....	352
-------------------------	-----

<b>第 19 章 二次型 .....</b>	<b>354</b>
-------------------------	------------

19.1 重要结论 .....	354
-----------------	-----

19.2 二次型题型 .....	354
------------------	-----

题型 166 二次型所对应的矩阵及其性质 .....	354
----------------------------	-----

题型 167 用正交变换法化二次型为标准型 .....	356
-----------------------------	-----

题型 168	有关正定的判定	360
题型 169*	与二次曲面相关的命题	362

## 第 3 篇\* 概率论与数理统计题型

<b>第 20 章</b>	<b>事件的概率</b>	<b>365</b>
20.1	重要性质	365
20.2	常用结论	366
20.3	古典概型和几何概型	367
	题型 170 古典概型的概率计算	367
	题型 171 几何概型的概率计算	368
20.4	概率的概念、性质及计算	369
	题型 172 有关事件的独立性的命题	369
	题型 173 利用逆事件概率公式 $P(A)=1-P(\bar{A})$ 计算概率	371
	题型 174 利用加法公式、乘法公式和条件概率公式计算概率	371
	题型 175 利用事件的独立性和伯努利概型计算概率	374
	题型 176 利用全概率公式与贝叶斯公式计算概率	375
<b>第 21 章</b>	<b>随机变量及其分布</b>	<b>379</b>
21.1	重要定理和结论	379
21.2	一维随机变量及其分布	379
	题型 177 与一维随机变量概念和性质相关的命题	379
	题型 178 求离散型随机变量的分布律或分布函数	381
	题型 179 求连续型随机变量的概率密度或分布函数	383
	题型 180 由已知分布求概率或由已知概率求分布	384
	题型 181 求一维随机变量函数的概率分布	386
	题型 182 综合题	390
<b>第 22 章</b>	<b>多维随机变量及其分布</b>	<b>392</b>
22.1	重要结论	392
22.2	二维随机变量及其分布	392
	题型 183 与二维随机变量概念、性质有关的命题	392
	题型 184 求二维随机变量的各种分布(分布律,边缘分布律,边缘分布密度)	394
	题型 185 随机变量独立性的判别	400
	题型 186 由已知分布求概率	401
	题型 187 求二维随机变量函数的分布	403
	题型 188 关于二维正态分布问题	408

<b>第 23 章 随机变量的数字特征</b>	<b>411</b>
23.1 重要性质和公式	411
23.2 重要结论	412
23.3 一维随机变量的数字特征	412
题型 189 求一维随机变量的数字特征	412
题型 190 求一维随机变量函数的数字特征或逆问题	414
23.4 二维或多维随机变量的数字特征	415
题型 191 求二维随机变量及其函数的数字特征	415
题型 192 有关数字特征与独立性及相关性的关系的命题	420
题型 193 利用 0-1 分布求多维随机变量的数字特征	422
<b>第 24 章 大数定律和中心极限定理</b>	<b>424</b>
24.1 大数定律	424
24.2 中心极限定理	425
题型 194 估算随机事件的概率	425
题型 195 与大数定律有关的命题	429
题型 196 试验次数 $n$ 的确定	429
<b>第 25 章 数理统计</b>	<b>432</b>
25.1 常用统计量	432
25.2 三个常见的抽样分布： $\chi^2$ 分布、 $t$ 分布和 $F$ 分布	432
25.3 正态总体条件下样本均值和样本方差的分布	434
25.4 数理统计中的重要结论	435
25.5 参数估计的重要结论	435
25.6 假设检验的重要结论	435
25.7 统计量的基本概念	437
题型 197 求统计量的分布及概率	437
题型 198 求统计量的数字特征	439
25.8 参数估计	442
题型 199 求参数的点估计(矩估计和最大似然估计)	442
题型 200 讨论参数估计的性质	445
题型 201 参数的区间估计	448
25.9 假设检验	452
题型 202 正态总体的均值和方差的假设检验	452
题型 203 有关两类错误的命题	454

# 第 1 篇 高等数学题型

## 第 1 章 极限和连续

### ● 重要定理、公式和结论

#### 1.1 重要定理

**定理 1**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = A$ .

**定理 2**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$ , 其中  $\alpha(x)$  为  $x \rightarrow 0$  时的无穷小量, 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ .

**定理 3 (极限的保号性)** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 而且  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 那么存在常数  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 恒有  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ).

**定理 4** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ), 则  $A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).

**定理 5 (单调有界定理)** 单调增加有上界 (或单调减少有下界) 数列一定有极限.

**定理 6\* (夹逼定理)** 设在  $x_0$  的邻域内恒有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A, \quad \text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

**定理 7 (无穷大和无穷小的关系)** 无穷大的倒数为无穷小; 非零的无穷小的倒数为无穷大.

**定理 8 (无穷小的运算性质)**

- (1) 有限个无穷小的代数和为无穷小;
- (2) 有限个无穷小的乘积为无穷小;
- (3) 无穷小乘以有界变量为无穷小.

**定理 9** 设有函数  $f(x), g(x)$ , 如果在自变量的同一变化过程中, 有  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ , 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$$

上式第二个式子中的两个极限若有一个不存在, 则代数和的极限必不存在; 若两个极限都不存在, 则代数和的极限不一定存在.

加法运算可推广到有限个中去.

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0);$$

(4)  $\lim [cf(x)] = c \lim f(x) = cA$ , 其中  $c$  为常数.

**定理 10** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $|f(x)|$  在  $[a, b]$  上连续.

**定理 11** 初等函数在其定义域内的区间内连续(因为初等函数中可能有孤立点, 所以是在区间内连续).

**推论:** 设  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0)$ ; 若没有说明  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$ , 即极限符号和函数符号不能交换顺序.

**定理 12** 设数列  $\{x_n\}$  收敛于  $l$ , 那么它的任一子序列  $\{x_{n_k}\}$  也收敛, 且极限也是  $l(n_k \rightarrow \infty)$ ; 反之不真.

**定理 13(洛必达法则)**

**法则 I**  $\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$  设函数  $f(x), g(x)$  满足条件

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = 0;$$

(2)  $f(x), g(x)$  在  $x_0$  的某邻域内可导, 在  $x_0$  点可除外(在无穷远邻域内可导), 且  $g'(x) \neq 0$ ;

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在(或为 } \infty),$$

$$\text{则 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**法则 II**  $\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$  设函数  $f(x), g(x)$  满足条件

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \infty;$$

(2)  $f(x), g(x)$  在  $x_0$  的邻域内可导, 在  $x_0$  点可除外(在无穷远邻域内可导), 且  $g'(x) \neq 0$ ;

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在(或为 } \infty),$$

$$\text{则 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

使用法则时需注意的事项:

(1) 只有  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型的未定式才能使用法则;

(2) 每用完一次法则, 要将式子整理化简;

(3) 为简化运算, 经常将法则与等价无穷小结合使用;

(4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  不存在(或  $\infty$ ) 不能  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  不存在;

(5) 当  $x \rightarrow \infty$  时, 极限式中含有  $\sin x, \cos x$  (或  $x \rightarrow 0$  时, 极限式中含有  $\sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x}$ ), 则

不能用洛必达法则.

## 1.2 重要公式

$$\text{公式 1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

若极限式具有如下两个特点:

(1) 是  $\frac{0}{0}$  型极限, 这是首要特点, 是本质;

(2)  $\sin \square$  与分数线对面变量  $\square$  形式一致, 则  $\lim \frac{\sin \square}{\square} = 1$ .

$$\text{公式 2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

特点如下:

(1) 是  $1^\infty$  型极限;

(2) 括号中 1 后的变量(包括符号)与指数幂互为倒数.

**公式 3(抓大头准则)**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & n < m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

即求  $x \rightarrow \infty$  的极限时, 抓住起决定性作用的  $x$  的最高次幂的项, 把其余的项略掉.

**公式 4(函数连续的充要条件)**

函数在一点  $x_0$  连续的充要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

**公式 5**

(1) 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 函数趋于  $+\infty$  的速度由慢到快为  $\ln x, x^\alpha (\alpha > 0), a^x (a > 1), x^x$ .

(2) 当  $n \rightarrow \infty$  时, 通项趋于  $+\infty$  的速度由慢到快为  $\ln n, n^\alpha (\alpha > 0), a^n (a > 1), n!, n^n$ .

(3) 常用数列极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0), \text{ 特例为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0 (|p| < 1); \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 (k > 0); \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

(4) 常用函数极限:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

**注:** 若  $x \rightarrow \infty$  的极限式中含有  $a^x (a > 0, a \neq 1)$ , 特别是  $e^x$ , 或  $\arctan x$ , 或  $\operatorname{arccot} x$ , 或  $|x|$  (或  $x \rightarrow 0$  时, 极限式中含  $e^{\frac{1}{x}}$ , 或  $\arctan \frac{1}{x}$ , 或  $\operatorname{arccot} \frac{1}{x}$ , 或  $|x|$ ), 一定分别求出  $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$  (或  $x \rightarrow 0^+, x \rightarrow 0^-$ ) 时的极限, 若两者相等, 则  $x \rightarrow \infty$  (或  $x \rightarrow 0$ ) 时的极限存在, 否则不存在.