



文登教育集团课堂用书  
考研数学强化班指定讲义



# 2012 >>>

# 考研数学 核心题型 ::: [经济类·数学三]

—— 始于1996年，每年服务30万考生 ——

## 陈文灯 主编

- » 本书2011版涵盖**2011年考研数学三真题135分**
- » 本书提出一个观点，**数学也需要记忆**，背定理，记公式，掌握核心题型
- » 本书揭示一个事实，**考数学就是考基础，考题型**，考代表数学本质的核心题型

买正版图书赠**300**元文登网校真题点评视频课程

## 内 容 简 介

数学问题主要是由各种类型的题(题型)构成的。本书是一本省时、省力、高效的考研数学题型辅导书。它以 20 多年的考研数学试卷为素材,通过分析、归纳,遴选出 170 个核心题型。其内容包括“高等数学题型”、“线性代数题型”和“概率论与数理统计题型”三部分,涵盖《考研数学大纲》(经济类·数学三)的全部内容。书中给出了各类题型的解题方法和技巧,有些方法和技巧是编者独创的,例如,连续函数在闭区间上的有关命题的证明方法、文字不等式的证明方法和各种辅助函数的作法等。这些方法和技巧能大大提高学生的复习效率,化难为简,在考场上常常能直书正确答案,从容过关。

本书适合于参加考研的学生在复习时自学研读,也可以作为考研辅导机构的强化班指定讲义。本书 2011 版涵盖 2011 年考研数学三真题 135 分。

### 图书在版编目(CIP)数据

考研数学核心题型. 经济类·数学三 / 陈文灯主编.

— 北京 : 北京航空航天大学出版社, 2011. 5

ISBN 978 - 7 - 5124 - 0441 - 0

I. ①考… II. ①陈… III. ①高等数学—研究生—入学考试—解题 IV. ①O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 086658 号

版权所有,侵权必究。

### 考研数学核心题型

[经济类·数学三]

陈文灯 主编

责任编辑 罗晓莉

\*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱: [bhpress@263.net](mailto:bhpress@263.net) 邮购电话:(010)82316936

有限公司印装 各地书店经销

\*

开本:787×1092 1/16 印张:24.0 字数:614 千字

2011 年 5 月第 1 版 2011 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5124 - 0441 - 0 定价:38.00 元

# 前 言

考研的几门课中,数学是考生公认的最难复习、最难考的一门课。为此,不少学生不得不放弃钟爱的专业,报考不考数学的专业;多数人硬着头皮抱着试试看的态度参加复习考试。数学果真那么可怕,那么难吗?对于原来数学基础不好,又想考高分(135分以上)的考生来说,只要具备两个条件:①比较强的记忆力;②比较强的模仿能力,即可圆“高分梦”。

记忆的作用在于记住重要的概念、理论与定理公式,以及记住计算方法与技巧。没有记住的东西就无模仿可言,可见记忆之重要。一般人都知道学英语需要记忆,单词需要背诵,其实学数学也需要记忆,要在理解的基础上背重要的定理、公式和概念,背核心的题型。

模仿是指对解题方法和技巧的一种描摹或仿效。数学题千千万,如果都用东施效颦的方法,姑且不说做不到,也不会有什么效果。要模仿就应该抓住常考题型进行相似或变异题的训练。无论是以题型为纲进行的数学实践(考研辅导班),还是出版书籍的反馈信息,都证明:抓题型就是抓解题方法和技巧的根本和关键。就是基于这样的考虑,我们才编写了这样一套与《考研数学复习指南》(经济类)相配套的、复习起来省时、省力的考研数学核心题型教材。希望书中的方法和技巧能够在较短的时间里大大提高学生的复习效率,化难为简,从容过关。

本书的特点如下:

① 严格按照《考研数学大纲》的要求,对国内外文献资料,尤其是对 20 多年来考研试题进行了归纳总结,精选出 203 个题型。

② 对每个题型进行详尽分析,指出其特点和易混、易错的地方。

③ 书中有许多题型的解题方法和技巧是我们苦心孤诣、冥思苦想出来的,决非市面上其他书籍所共有。

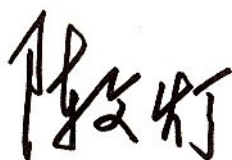
④ 有些题解后有评注,虽然寥寥数语,却可起到画龙点睛、开拓思

路的作用。

⑤ 本书编写属上课讲义的形式,可能更贴近考生。

本书适合于参加研究生入学考试的同学在复习时自学研读,也可作为考研辅导机构的强化班指定讲义。高等数学的普通学习者和爱好者亦可以阅读,并从中领略数学科学的简约之美和数字运算技巧的奇妙。

书中若有不当之处,敬请读者批评指正。

A handwritten signature in black ink, reading '陈嘉陵' (Chen Jialing) in a cursive style.

2011年3月

# 目 录

## 第 1 篇 高等数学题型

|  |    |
|--|----|
| 第 1 章 极限和连续  | 1  |
| 1.1 重要定理   | 1  |
| 1.2 重要公式   | 3  |
| 1.3 函数的极限  | 4  |
| 题型 1 无穷小的比较或确定无穷小的阶  | 4  |
| 题型 2 求未定式函数极限  | 5  |
| 题型 3 求分段函数在分界点的极限  | 12 |
| 题型 4 极限式中常数的确定   | 13 |
| 1.4 数列的极限  | 15 |
| 题型 5 求各种类型( $\infty/\infty$ 型、 $1^\infty$ 型、 $\infty-\infty$ 型)的数列极限   | 15 |
| 题型 6 给出数列 $\{x_n\}$ 通项表达式, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$   | 17 |
| 题型 7 数列 $n$ 项和 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ , 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限  | 19 |
| 题型 8 $n$ 个因子乘积, 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限  | 21 |
| 1.5 函数的连续性   | 22 |
| 题型 9 函数连续性的讨论  | 22 |
| 题型 10 确定函数的间断点及其类型   | 23 |
| 1.6 杂 例  | 25 |
| 题型 11 从含有 $f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 的方程中求解 $f(x)$   | 25 |
| 题型 12 当 $x \rightarrow 0$ 时, 求含有 $e^{\frac{1}{x}}$ , $\arctan \frac{1}{x}$ , $\operatorname{arccot} \frac{1}{x}$ , $ x $ 的极限 | 27 |
| 题型 13 含 $f(x+a) - f(x)$ 的非 $\frac{0}{0}$ 型极限式且 $f(x)$ 可导   | 28 |
| 第 2 章 导数与微分  | 29 |
| 2.1 导数和微分的概念   | 29 |
| 2.2 导数公式和运算法则  | 30 |
| 2.3 重要定理   | 31 |
| 2.4 与导数定义和性质有关的命题  | 31 |

|              |                                   |           |
|--------------|-----------------------------------|-----------|
| 题型 14        | 求含有抽象函数的 $\frac{0}{0}$ 型极限        | 31        |
| 题型 15        | 与抽象函数的导数相关的命题                     | 34        |
| 题型 16        | 判断函数的可导性                          | 36        |
| 2.5          | 各种函数的导数或微分                        | 37        |
| 题型 17        | 求一元复合函数的导数或微分                     | 37        |
| 题型 18        | 求一元隐函数的导数或微分                      | 37        |
| 题型 19        | 求幂指函数的导数或微分                       | 39        |
| 题型 20        | 求函数表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分 | 40        |
| 题型 21        | 求分段函数的导数或微分                       | 40        |
| 题型 22        | 求简单函数的高阶导数                        | 43        |
| <b>第 3 章</b> | <b>不定积分</b>                       | <b>47</b> |
| 3.1          | 不定积分                              | 47        |
| 3.2          | 三种基本积分方法                          | 48        |
| 3.3          | 不定积分中的概念                          | 56        |
| 题型 23        | 与原函数相关的命题                         | 56        |
| 3.4          | 各种函数的不定积分                         | 57        |
| 题型 24        | 求简单有理函数的不定积分                      | 57        |
| 题型 25        | 简单无理函数的不定积分                       | 59        |
| 题型 26        | 三角有理式的积分                          | 60        |
| 题型 27        | 分段函数的不定积分                         | 63        |
| 题型 28        | 含对数函数、反三角函数的不定积分                  | 65        |
| 题型 29        | 复合函数的不定积分                         | 66        |
| 题型 30        | 计算隐函数的不定积分                        | 67        |
| <b>第 4 章</b> | <b>定积分</b>                        | <b>69</b> |
| 4.1          | 定积分的基本性质                          | 69        |
| 4.2          | 重要定理                              | 69        |
| 4.3          | 重要公式                              | 70        |
| 4.4          | 计算定积分的方法                          | 71        |
| 4.5          | 反常积分                              | 72        |
| 4.6          | 与定积分的定义和性质相关的命题                   | 74        |
| 题型 31        | 定积分的估值                            | 74        |
| 题型 32        | 变限积分的求导问题                         | 75        |
| 4.7          | 各种类型定积分的计算                        | 76        |
| 题型 33        | 求分段函数的定积分                         | 76        |

|              |   |            |
|--------------|---|------------|
| 题型 34        | 求含有绝对值符号的定积分  | 77         |
| 题型 35        | 求被积函数中含有变上限积分的定积分   | 78         |
| 题型 36        | 求对称区间 $[-l, l]$ 上的定积分   | 79         |
| 题型 37        | 求周期函数的定积分   | 81         |
| 题型 38        | 求被积函数的分母为两项,分子恰为其中一项的定积分  | 82         |
| 题型 39        | 求由三角有理式与初等函数通过四则运算、复合运算或变量代换所得式的定积分   | 82         |
| 题型 40        | 定积分等式的证明  | 83         |
| 题型 41        | 定积分不等式的证明   | 87         |
| 4.8          | 反常积分  | 91         |
| 题型 42        | 反常积分的计算及收敛  | 91         |
| <b>第 5 章</b> | <b>微分中值定理</b>   | <b>93</b>  |
| 5.1          | 闭区间上连续函数的性质   | 93         |
| 5.2          | 微分中值定理  | 93         |
| 5.3          | 闭区间上连续函数的命题   | 94         |
| 题型 43        | 闭区间上连续函数命题的证明   | 94         |
| 5.4          | 中值定理的应用   | 98         |
| 题型 44        | 证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理  | 98         |
| 题型 45        | 证明某个函数恒等于一个常数的命题  | 99         |
| 题型 46        | 命题 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明   | 100        |
| 题型 47        | 欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ , 使得 $f^{(n)}(\xi)=k(k \neq 0)$ 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式成立 | 101        |
| 题型 48        | 欲证结论:在 $(a, b)$ 内至少存在 $\xi, \eta(\xi \neq \eta)$ 满足某个代数式  | 104        |
| <b>第 6 章</b> | <b>一元微积分的应用</b>   | <b>106</b> |
| 6.1          | 重要定理和结论   | 106        |
| 6.2          | 导数的应用   | 106        |
| 题型 49        | 一元函数单调增减性的判别  | 106        |
| 题型 50        | 一元函数极值的判定或求解  | 109        |
| 题型 51        | 求一元函数的最值及简单应用   | 110        |
| 题型 52        | 曲线的拐点或凹凸区间的判定或求解  | 111        |
| 题型 53        | 函数曲线的渐近线方程的计算与导数的判定   | 112        |
| 6.3          | 方程的根  | 114        |
| 题型 54        | 方程根的存在性问题   | 114        |
| 题型 55        | 方程根的个数的研究   | 115        |
| 题型 56        | 方程根的唯一性问题   | 116        |
| 6.4          | 定积分的应用  | 118        |

|       |          |     |
|-------|----------|-----|
| 题型 57 | 利用微元法解题  | 118 |
| 题型 58 | 求平面图形的面积 | 119 |
| 题型 59 | 求旋转体体积   | 121 |

## 第 7 章 常微分方程 123

|       |                              |     |
|-------|------------------------------|-----|
| 7.1   | 二阶线性微分方程解的性质                 | 123 |
| 7.2   | 二阶线性微分方程解的结构定理               | 123 |
| 7.3   | 一阶微分方程的求解                    | 124 |
| 题型 60 | 一阶可分离变量方程的求解                 | 124 |
| 题型 61 | 一阶齐次微分方程的求解                  | 125 |
| 题型 62 | 一阶线性微分方程的求解                  | 127 |
| 7.4   | 二阶或二阶以上微分方程的求解               | 129 |
| 题型 63 | 有关二阶常系数齐次线性或非齐次线性微分方程解的结构的命题 | 129 |
| 题型 64 | 求二阶常系数齐次线性或非齐次线性微分方程的通解      | 130 |
| 题型 65 | 微分方程的应用                      | 135 |
| 题型 66 | 求一阶线性差分方程的通解或特解              | 136 |

## 第 8 章 多元函数微分学 138

|       |                              |     |
|-------|------------------------------|-----|
| 8.1   | 连续、可微和可导的关系                  | 138 |
| 8.2   | 多元函数的极值                      | 138 |
| 8.3   | 多元函数微分                       | 139 |
| 题型 67 | 有关二元函数定义域、极限、连续的计算题          | 139 |
| 题型 68 | 简单显函数 $z=f(x,y)$ 偏导数的计算      | 140 |
| 题型 69 | 考查二元函数 $z=f(x,y)$ 的连续、偏导及可微性 | 141 |
| 题型 70 | 多元复合函数偏导数的计算                 | 142 |
| 题型 71 | 隐函数偏导数的计算                    | 147 |
| 题型 72 | 多元函数全微分的计算                   | 150 |
| 8.4   | 多元函数的极值和最值                   | 151 |
| 题型 73 | 求多元函数的极值                     | 151 |
| 题型 74 | 求多元函数的最值                     | 154 |

## 第 9 章 二重积分 156

|       |                  |     |
|-------|------------------|-----|
| 9.1   | 二重积分的性质和定理       | 156 |
| 9.2   | 二重积分的计算          | 157 |
| 9.3   | 二重积分             | 159 |
| 题型 75 | 更换二重积分的积分次序      | 159 |
| 题型 76 | 选择积分次序           | 160 |
| 题型 77 | 积分区域关于坐标轴对称的二重积分 | 162 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 题型 78 | 分段函数的二重积分                                    | 164 |
| 题型 79 | 被积函数 $f(x, y)$ 中含有绝对值符号的二重积分                 | 166 |
| 题型 80 | 被积函数 $f(x, y)$ 中含有最值符号 $\max$ 或 $\min$ 的二重积分 | 167 |
| 题型 81 | 二重积分等式的证明                                    | 168 |
| 题型 82 | 二重积分不等式的证明                                   | 169 |

## 第 10 章 无穷级数 171

|      |                  |     |
|------|------------------|-----|
| 10.1 | 基本性质             | 171 |
| 10.2 | 级数的判敛法           | 171 |
| 10.3 | 幂级数              | 173 |
| 10.4 | 七个常见的函数展开式(必须熟记) | 174 |
| 10.5 | 与级数概念和性质相关的命题    | 175 |

题型 83 判别数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的敛散性,并附有“若收敛时,求其和”的命题 175

题型 84 利用级数敛散性的定义及性质,判断级数的敛散性 176

|      |          |     |
|------|----------|-----|
| 10.6 | 级数敛散性的判别 | 177 |
|------|----------|-----|

题型 85 正项级数敛散性的判别 177

题型 86 交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  ( $u_n > 0$ ) 敛散性的判别 180

题型 87 任意项级数敛散性的判别 182

题型 88 有关数项级数敛散性的证明 185

题型 89 给出函数  $f(x)$  的某种条件,形如  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  的级数的敛散性的证明 187

题型 90 利用级数证明数列  $\{a_n\}$  极限的存在或求解某些特殊极限 188

|      |     |     |
|------|-----|-----|
| 10.7 | 幂级数 | 189 |
|------|-----|-----|

题型 91 求幂级数的收敛域或收敛半径 189

题型 92 求函数在指定点的幂级数展开式 191

题型 93 无穷级数求和 194

## 第 11 章 函数方程与不等式证明 199

|      |      |     |
|------|------|-----|
| 11.1 | 函数方程 | 199 |
|------|------|-----|

题型 94 利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求函数方程 199

题型 95 利用极限求函数方程 199

题型 96 已知函数在一点的导数及函数方程,求函数方程 200

题型 97 已知函数方程中含有变上限积分,求函数方程 200

题型 98 已知函数连续,且函数式中含函数的定积分、极限或二重积分,求函数方程 203

题型 99 已知函数方程中含有偏导数条件,求函数方程 204

|               |  |            |
|---------------|--|------------|
| 11.2          | 不等式证明  | 204        |
| 题型 100        | 存在一个点 $\xi \in (a, b)$ , 使得不等式成立或不等式通过变形, 一端可写成 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 或 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 的命题的证明 | 204        |
| 题型 101        | 在某一区间 $(a, b)$ 不等式命题成立的证明  | 205        |
| 题型 102        | 文字不等式的证明   | 207        |
| 题型 103        | 函数 $f(x)$ 二阶和二阶以上可导的不等式命题的证明   | 208        |
| 题型 104        | 杂 例  | 209        |
| <b>第 12 章</b> | <b>微积分在经济中的应用</b>  | <b>211</b> |
| 12.1          | 基本概念和公式  | 211        |
| 12.2          | 复利问题   | 212        |
| 题型 105        | 与概念相关的问题   | 212        |
| 题型 106        | 一元函数微分学在经济中的应用(利润、价格等问题)   | 213        |
| 题型 107        | 复利问题   | 216        |
| 题型 108        | 一元积分学在经济中的应用   | 216        |
| 题型 109        | 二元函数微分学在经济中的应用(最值问题)   | 217        |
| 题型 110        | 微分方程在经济中的应用  | 218        |

## 第 2 篇 线性代数题型

|               |                      |            |
|---------------|----------------------|------------|
| <b>第 13 章</b> | <b>行列式</b>           | <b>219</b> |
| 13.1          | 重要定理和性质              | 219        |
| 13.2          | 重要结论                 | 219        |
| 题型 111        | 与行列式的定义和性质相关的命题      | 220        |
| 题型 112        | 数值型行列式的计算            | 221        |
| 题型 113        | 行列式的余子式或代数余子式线性组合的计算 | 226        |
| 题型 114        | 计算抽象行列式              | 228        |
| <b>第 14 章</b> | <b>矩 阵</b>           | <b>231</b> |
| 14.1          | 矩阵的运算性质              | 231        |
| 14.2          | 重要结论                 | 231        |
| 14.3          | 逆矩阵                  | 232        |
| 题型 115        | 有关逆矩阵的计算问题           | 232        |
| 题型 116        | 矩阵可逆的证明              | 235        |
| 14.4          | 矩阵的运算                | 236        |
| 题型 117        | 有关矩阵运算的命题            | 236        |

|               |                        |            |
|---------------|------------------------|------------|
| 题型 118        | 求矩阵的行列式 .....          | 238        |
| 题型 119        | 与伴随矩阵相关的命题 .....       | 240        |
| 14.5          | 初等矩阵 .....             | 241        |
| 题型 120        | 有关初等变换和初等矩阵的命题 .....   | 241        |
| <b>第 15 章</b> | <b>向 量</b> .....       | <b>244</b> |
| 15.1          | 重要结论 .....             | 244        |
| 15.2          | 内积和施密特正交化方法 .....      | 245        |
| 15.3          | 向量题型 .....             | 245        |
| 题型 121        | 讨论向量组的线性相关性 .....      | 245        |
| 题型 122        | 求向量组的极大线性无关组和秩 .....   | 249        |
| 题型 123        | 有关向量组或矩阵的秩的计算与证明 ..... | 250        |
| 题型 124        | 有关向量的线性表示的问题 .....     | 252        |
| 题型 125        | 将向量组正交化 .....          | 256        |
| <b>第 16 章</b> | <b>线性方程组</b> .....     | <b>257</b> |
| 16.1          | 重要性质和定理 .....          | 257        |
| 16.2          | 有关线性方程组的题型 .....       | 258        |
| 题型 126        | 有关线性方程组的基本概念题 .....    | 258        |
| 题型 127        | 有关基础解系的命题 .....        | 259        |
| 题型 128        | 线性方程组的求解 .....         | 260        |
| 题型 129        | 矩阵方程的求解 .....          | 264        |
| 题型 130        | 讨论两个线性方程组解之间的关系 .....  | 266        |
| <b>第 17 章</b> | <b>特征值与特征向量</b> .....  | <b>269</b> |
| 17.1          | 重要结论 .....             | 269        |
| 17.2          | 矩阵的特征值与特征向量 .....      | 270        |
| 题型 131        | 求数值型矩阵的特征值与特征向量 .....  | 270        |
| 题型 132        | 求抽象矩阵的特征值与特征向量 .....   | 272        |
| 题型 133        | 特征值与特征向量的逆问题 .....     | 273        |
| 17.3          | 相似矩阵及其对角化 .....        | 275        |
| 题型 134        | 相似矩阵的判定及其逆问题 .....     | 275        |
| 题型 135        | 矩阵可对角化的判定及其逆问题 .....   | 276        |
| 题型 136        | 有关实对称矩阵的命题 .....       | 277        |
| <b>第 18 章</b> | <b>二次型</b> .....       | <b>279</b> |
| 18.1          | 重要结论 .....             | 279        |
| 18.2          | 二次型题型 .....            | 279        |

|        |                |     |
|--------|----------------|-----|
| 题型 137 | 二次型所对应的矩阵及其性质  | 279 |
| 题型 138 | 用正交变换法化二次型为标准型 | 281 |
| 题型 139 | 有关正定的判定        | 285 |

## 第 3 篇 概率论与数理统计题型

|               |  |            |
|---------------|--|------------|
| <b>第 19 章</b> | <b>事件的概 F 率</b>                        | <b>288</b> |
| 19.1          | 重要性质                                   | 288        |
| 19.2          | 常用结论                                   | 289        |
| 19.3          | 古典概型和几何概型                              | 290        |
| 题型 140        | 古典概型的概率计算                              | 290        |
| 题型 141        | 几何概型的概率计算                              | 291        |
| 19.4          | 概率的概念、性质及计算                            | 292        |
| 题型 142        | 有关事件的独立性的命题                            | 292        |
| 题型 143        | 利用逆事件概率公式 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ 计算概率 | 294        |
| 题型 144        | 利用加法公式、乘法公式和条件概率公式计算概率                 | 294        |
| 题型 145        | 利用全概率公式与贝叶斯公式计算概率                      | 297        |
| 题型 146        | 利用事件的独立性和伯努利概型计算概率                     | 300        |
| <b>第 20 章</b> | <b>随机变量及其分布</b>                        | <b>302</b> |
| 20.1          | 重要定理和结论                                | 302        |
| 20.2          | 一维随机变量及其分布                             | 302        |
| 题型 147        | 与一维随机变量概念和性质相关的命题                      | 302        |
| 题型 148        | 求离散型随机变量的分布律或分布函数                      | 304        |
| 题型 149        | 求连续型随机变量的概率密度或分布函数                     | 306        |
| 题型 150        | 由已知分布求概率或由已知概率求分布                      | 307        |
| 题型 151        | 求一维随机变量函数的概率分布                         | 309        |
| 题型 152        | 综合题                                    | 313        |
| <b>第 21 章</b> | <b>多维随机变量及其分布</b>                      | <b>315</b> |
| 21.1          | 重要结论                                   | 315        |
| 21.2          | 二维随机变量及其分布                             | 315        |
| 题型 153        | 与二维随机变量概念、性质有关的命题                      | 315        |
| 题型 154        | 求二维随机变量的各种分布(分布律,边缘分布律,边缘分布密度)         | 317        |
| 题型 155        | 随机变量独立性的判别                             | 323        |
| 题型 156        | 由已知分布求概率                               | 324        |

|        |              |     |
|--------|--------------|-----|
| 题型 157 | 求二维随机变量函数的分布 | 326 |
| 题型 158 | 关于二维正态分布问题   | 331 |

## 第 22 章 随机变量的数字特征 ..... 334

|        |                       |     |
|--------|-----------------------|-----|
| 22.1   | 重要性质和公式               | 334 |
| 22.2   | 重要结论                  | 335 |
| 22.3   | 一维随机变量的数字特征           | 335 |
| 题型 159 | 求一维随机变量的数字特征          | 335 |
| 题型 160 | 求一维随机变量函数的数字特征或逆问题    | 337 |
| 22.4   | 二维或多维随机变量的数字特征        | 338 |
| 题型 161 | 求二维随机变量及其函数的数字特征      | 338 |
| 题型 162 | 有关数字特征与独立性及相关性的关系的命题  | 343 |
| 题型 163 | 利用 0-1 分布求多维随机变量的数字特征 | 345 |
| 题型 164 | 综合应用题型                | 346 |

## 第 23 章 大数定律和中心极限定理 ..... 348

|        |              |     |
|--------|--------------|-----|
| 23.1   | 大数定律         | 348 |
| 23.2   | 中心极限定理       | 349 |
| 题型 165 | 估算随机事件的概率    | 349 |
| 题型 166 | 与大数定律有关的命题   | 353 |
| 题型 167 | 试验次数 $n$ 的确定 | 353 |

## 第 24 章 数理统计 ..... 356

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 24.1   | 常用统计量                                  | 356 |
| 24.2   | 三个常见的抽样分布： $\chi^2$ 分布、 $t$ 分布和 $F$ 分布 | 356 |
| 24.3   | 正态总体条件下样本均值和样本方差的分布                    | 358 |
| 24.4   | 数理统计中的重要结论                             | 358 |
| 24.5   | 参数估计的重要结论                              | 359 |
| 24.6   | 统计量的基本概念                               | 359 |
| 题型 168 | 求统计量的分布及概率                             | 359 |
| 题型 169 | 求统计量的数字特征                              | 361 |
| 24.7   | 参数估计                                   | 364 |
| 题型 170 | 求参数的点估计(矩估计和最大似然估计)                    | 364 |

# 第 1 篇 高等数学题型

## 第 1 章 极限和连续

### ● 重要定理、公式和结论

#### 1.1 重要定理

**定理 1**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = A$ .

**定理 2**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$ , 其中  $\alpha(x)$  为  $x \rightarrow 0$  时的无穷小量, 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ .

**定理 3 (极限的保号性)** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 而且  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 那么存在常数  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 恒有  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ).

**定理 4** 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ), 则  $A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).

**定理 5 (单调有界定理)** 单调增加有上界 (或单调减少有下界) 数列一定有极限.

**定理 6\* (夹逼定理)** 设在  $x_0$  的邻域内恒有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A, \quad \text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

**定理 7 (无穷大和无穷小的关系)** 无穷大的倒数为无穷小; 非零的无穷小的倒数为无穷大.

**定理 8 (无穷小的运算性质)**

- (1) 有限个无穷小的代数和为无穷小;
- (2) 有限个无穷小的乘积为无穷小;
- (3) 无穷小乘以有界变量为无穷小.

**定理 9** 设有函数  $f(x), g(x)$ , 如果在自变量的同一变化过程中, 有  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ , 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$$

上式第二个式子中的两个极限若有一个不存在, 则代数和的极限必不存在; 若两个极限都不存在, 则代数和的极限不一定存在.

加法运算可推广到有限个中去.

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0);$$

(4)  $\lim [cf(x)] = c \lim f(x) = cA$ , 其中  $c$  为常数.

**定理 10** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $|f(x)|$  在  $[a, b]$  上连续.

**定理 11** 初等函数在其定义域内的区间内连续(因为初等函数中可能有孤立点, 所以是在区间内连续).

**推论:** 设  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0)$ ; 若没有说明  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$ , 即极限符号和函数符号不能交换顺序.

**定理 12** 设数列  $\{x_n\}$  收敛于  $l$ , 那么它的任一子序列  $\{x_{n_k}\}$  也收敛, 且极限也是  $l(n_k \rightarrow \infty)$ ; 反之不真.

**定理 13(洛必达法则)**

**法则 I**  $\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$  设函数  $f(x), g(x)$  满足条件

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = 0;$$

(2)  $f(x), g(x)$  在  $x_0$  的某邻域内可导, 在  $x_0$  点可除外(在无穷远邻域内可导), 且  $g'(x) \neq 0$ ;

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在(或为 } \infty),$$

$$\text{则 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**法则 II**  $\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$  设函数  $f(x), g(x)$  满足条件

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \infty;$$

(2)  $f(x), g(x)$  在  $x_0$  的邻域内可导, 在  $x_0$  点可除外(在无穷远邻域内可导), 且  $g'(x) \neq 0$ ;

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在(或为 } \infty),$$

$$\text{则 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

使用法则时需注意的事项:

(1) 只有  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型的未定式才能使用法则;

(2) 每用完一次法则, 要将式子整理化简;

(3) 为简化运算, 经常将法则与等价无穷小结合使用;

(4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  不存在(或  $\infty$ ) 不能  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  不存在;

(5) 当  $x \rightarrow \infty$  时, 极限式中含有  $\sin x, \cos x$  (或  $x \rightarrow 0$  时, 极限式中含有  $\sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x}$ ), 则

不能用洛必达法则.

## 1.2 重要公式

$$\text{公式 1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

若极限式具有如下两个特点:

(1) 是  $\frac{0}{0}$  型极限, 这是首要特点, 是本质;

(2)  $\sin \square$  与分数线对面变量  $\square$  形式一致, 则  $\lim \frac{\sin \square}{\square} = 1$ .

$$\text{公式 2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

特点如下:

(1) 是  $1^\infty$  型极限;

(2) 括号中 1 后的变量(包括符号)与指数幂互为倒数.

**公式 3(抓大头准则)**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & n < m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

即求  $x \rightarrow \infty$  的极限时, 抓住起决定性作用的  $x$  的最高次幂的项, 把其余的项略掉.

**公式 4(函数连续的充要条件)**

函数在一点  $x_0$  连续的充要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

**公式 5**

(1) 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 函数趋于  $+\infty$  的速度由慢到快为  $\ln x, x^\alpha (\alpha > 0), a^x (a > 1), x^x$ .

(2) 当  $n \rightarrow \infty$  时, 通项趋于  $+\infty$  的速度由慢到快为  $\ln n, n^\alpha (\alpha > 0), a^n (a > 1), n!, n^n$ .

(3) 常用数列极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0), \text{ 特例为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0 (|p| < 1); \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 (k > 0); \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

(4) 常用函数极限:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

**注:** 若  $x \rightarrow \infty$  的极限式中含有  $a^x (a > 0, a \neq 1)$ , 特别是  $e^x$ , 或  $\arctan x$ , 或  $\operatorname{arccot} x$ , 或  $|x|$  (或  $x \rightarrow 0$  时, 极限式中含  $e^{\frac{1}{x}}$ , 或  $\arctan \frac{1}{x}$ , 或  $\operatorname{arccot} \frac{1}{x}$ , 或  $|x|$ ), 一定分别求出  $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$  (或  $x \rightarrow 0^+, x \rightarrow 0^-$ ) 时的极限, 若两者相等, 则  $x \rightarrow \infty$  (或  $x \rightarrow 0$ ) 时的极限存在, 否则不存在.

