全国知名考研辅导机构指定教材

考研【高等数学】辅导教材

主编：黄庆怀

- 重点难点归纳
- 要点内容精讲
- 典型题型精解
- 经典习题演练

2012

北京航空航天大学出版社
BEI HANG UNIVERSITY PRESS

2012 考研高等数学辅导教材

主编:黄庆怀

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书是研究生入学统一考试科目“高等数学(微积分)”的复习指导书。数学一、数学二、数学三的考生均适用。本书紧扣考研数学大纲,贴近考试实际,内容丰富、实用。全书共9章,每章包括重点难点归纳、要点内容精讲、典型题型精解、本章习题及答案。本书概念叙述清晰,解题思路巧妙,方法归纳实用。适合所有考研学子,对于在校的大学生及自学者,也是一本较好的学习参考书。本书作者是考研数学辅导名师。

图书在版编目(CIP)数据

2012考研高等数学辅导教材/黄庆怀主编.—北京:北京航空航天大学出版社,2011.3

ISBN 978-7-5124-0338-3

Ⅰ.①2… Ⅱ.①黄… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第012377号

2012考研高等数学辅导教材

主 编 黄庆怀

策划编辑 谭 莉

责任编辑 谭 莉

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:23.75 字数:702千字

2011年3月第1版 2011年3月第1次印刷

ISBN 978-7-5124-0338-3 定价:39.00元

前　言

本书是针对考研的“高等数学(微积分)”部分的专门复习指导书，是以作者多年来的考研辅导讲义(高等数学部分)为素材编写而成的，对数学一、数学二、数学三的考生均适用。全书共包括9章内容及附录，具体为：函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学及应用，常微分方程，多元函数微分学及应用，重积分，线、面积分，无穷级数，矢量代数与空间解析几何，附录(考研预备知识)。每章分成4个部分：重点难点归纳、要点内容精讲、典型题型精解、本章习题及答案。

本书紧扣数学考研大纲，贴近考试实际，内容丰富、实用，概念叙述清晰，解题思路巧妙，方法归纳实用。特点如下：

★基本概念、理论和公式讲解详细全面。所有例题都强调基本概念和基本理论的应用，解题方法独特，强调技巧的综合应用。例题丰富，每章的例题都能概括每章内容的全部概念、计算方法和各种题型。

★例题详细讲解做题的思路，解题入手的原理方法、技巧，容易出错的地方、规律和心得体会。

★读者在理解本书内容和完成相应的习题后，在基本概念、理论的理解能力和题目的运算能力方面必有明显的提高。

本书适合所有考研学子，也可作为在校的大学生及自学者的“高等数学”的学习参考书。

由于编者水平有限，如有疏漏和错误之处，欢迎读者批评指正！

祝所有考研学子顺利考入自己的理想学校！

黄庆怀

2011年3月

目　　录

绪　论

一、考研数学简介

考试性质

全国硕士研究生入学数学考试是为招收工学、经济学、管理学硕士研究生而设置的具有选拔功能的水平考试。它的指导思想是既要有利于国家对高层次人才的选拔，也要有利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高.

考查目标

要求考生比较系统地理解数学的基本概念和基本理论，掌握数学的基本方法，具备抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力.

试卷分类及使用专业

根据工学、经济学、管理学各学科、专业对硕士研究生入学所应具备的数学知识和能力的不同要求，硕士研究生入学统考数学试卷分为3种.其中针对工学门类的为数学一、数学二，针对经济学和管理学门类的为数学三.招生专业须使用的试卷种类规定如下：

1. 须使用数学一的招生专业

① 工学门类中的力学、机械工程、光学工程、仪器科学与技术、冶金工程、动力工程及工程热物理、电气工程、电子科学与技术、信息与通信工程、控制科学与工程、计算机科学与技术、土木工程、水利工程、测绘科学与技术、交通运输工程、船舶与海洋工程、航空宇航科学与技术、兵器科学与技术、核科学与技术、生物医学工程等20个一级学科中所有的二级学科、专业.

② 授工学学位的管理科学与工程一级学科.

2. 须使用数学二的招生专业

工学门类中的纺织科学与工程、轻工技术与工程、农业工程、林业工程、食品科学与工程等5个一级学科中所有的二级学科、专业.

3. 须选用数学一或数学二的招生专业(由招生单位自定)

工学门类中的材料科学与工程、化学工程与技术、地质资源与地质工程、矿业工程、石油与天然气工程、环境科学与工程等一级学科中对数学要求较高的二级学科、专业选用数学一，对数学要求较低的选用数学二.

4. 须使用数学三的招生专业

① 经济学门类的各一级学科.

② 管理学门类中的工商管理、农林经济管理一级学科.

③ 授管理学学位的管理科学与工程一级学科.

考试形式和试卷结构

1. 试卷满分及考试时间

各卷种试卷满分均为150分，考试时间为180分钟.

2. 答题方式

答题方式为闭卷、笔试.

3. 试卷内容结构

分值比例(%) 卷种 / 考试内容	数学一	数学二	数学三
高等数学(或微积分)	56	78	56
线性代数	22	22	22
概率论与数理统计	22	—	22

4. 试卷题型结构

各卷种试卷题型结构均为:

单项选择题　　　　8 小题,每小题 4 分,共 32 分;

填空题　　　　　　6 小题,每小题 4 分,共 24 分;

解答题(包括证明题)　9 小题,共 94 分.

二、考研数学复习方法

1. 考研数学分析

硕士研究生入学统一考试属"选拔性考试",对考生的数学基础和能力进行比较全面的考查:考生的基本知识和概念掌握得如何,内容的整体性与综合性掌握得如何,以及是否有较强的基本运算能力. 自 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学统一考试以来,每年的试题都紧扣考试大纲,始终遵循"考查的知识面较广,重基础,重能力,难度适中"的原则,广大考生十分认同这样的考试,并且意识到只有"全面,认真,讲究方法,狠下功夫"才能取得成功,否则就不会取得好的成绩.

考研数学试题大致有以下特点.

说明:$08^3_4 10$ 意为"2008 年数学三、数学四,10 分",下同.

1) 重基础,重概念,重方法,不会有偏题、怪题.

【例 1】 ①〈$08^3_4 10$〉求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}=$ $\underline{\quad -\dfrac{1}{6}\quad}$.

②〈$08^1_2\ 09$〉求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-\sin(\sin x))\sin x}{x^4}=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{6}\quad}$.

③〈$07^3_4 04$〉当 $x\to 0^+$ 时,同$\sqrt{x}$等价的无穷小量是 $\underline{\quad B\quad}$.

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$　(B)$\ln(1+\sqrt{x})$　(C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　(D)$1-\cos\sqrt{x}$

④〈$07^1_2 04$〉当 $x\to 0^+$ 时,同$\sqrt{x}$等价无穷小的无穷小量是 $\underline{\quad B\quad}$.

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$　(B)$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　(C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　(D)$1-\cos\sqrt{x}$

⑤〈$05^3_4 04$〉求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ $\underline{\quad 2\quad}$.

⑥〈$05^3_4 08$〉求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)=$ $\underline{\quad \dfrac{3}{2}\quad}$.

以上考题均属基本的“求极限，且均是利用等价代换求极限”，体现出考试的深度以及重基础、重基本的原则.

【例 2】 〈07$\substack{1\\2\\3\\4}$04〉连续函数 $y=f(x)$在$[-3,-2]$，$[2,3]$上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周；在区间$[-2,0]$，$[0,2]$的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周见图 0-1，且 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是<u>　C　</u>.

图 0-1

(A)$F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$　　(B)$F(3)=\frac{5}{4}F(2)$

(C)$F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$　　(D)$F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$

此题出得好，将概念、计算典型的结合，以客观题的形式出现，考查的知识点是定积分的几何意义——面积分的代数和。若考生概念不清肯定出错，不掌握“选择题”的答题技巧(排除法)也不行. 答案应选(C)，理由是：$F(2)$为正，$F(3)$为正，且 $F(3)<F(2)$，$F(-3)=\int_0^{-3}f(t)\mathrm{d}t=-\int_{-3}^0 f(t)\mathrm{d}t=+$，同理 $F(-2)=+$，故应选(C).

2) 考题均含多个知识点(3～5 个)

这就要求考生对“内容的整体性与综合性”的掌握比较好，但是如果对每个知识点都熟悉，却不能熟练巧妙地将它们串在一起(这就是综合性、技巧性)也不能很好地应对考研试题.

【例 3】 〈98403〉，$f(x)=x^n$过点$(1,1)$的切线与 x 轴相交于点$(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$<u>　$\frac{1}{\mathrm{e}}$　</u>.

此题属基本题，简单，满分只有 3 分，却要用到 4 个知识点：① 会求切线方程；② 会求切线与 x 轴的交点$(\xi_n,0)$；③ 会求函数值 $f(\xi_n)$；④ 会求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)$.

3) 要求概念清楚，计算能力强

考题的运算量一般都很小，结果比较简单. 这就要求考生的概念清楚，计算能力较强，否则就达不到原题的简单运算的要求，算不出原题的简单结果，且感到做题时间很不够. 例如：1)中的例 2，如果直接求出 $F(3)$，$F(2)$，$F(-3)$的值再比较大小，那就太麻烦了，达不到“选择题”的答题要求，时间也不够.

4) 必有技巧性、灵活性试题

试题一定有引考生“上当”的地方，每份试卷中必有“有一定技巧性、灵活性”的试题. 试题必有考生平时“容易出错”的模拟题，如果考生在概念、综合计算方面掌握不够，就会“上当，失误”. 例如 $f(x)$可导，求 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x_0f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}$. 不少考生这样做：

原式$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x_0f'(x)-f(x_0)}{1}=x_0f'(x_0)-f(x_0)$.　错！(不能用洛必达法则).

正确做法：原式$\xlongequal[\text{定义}]{\text{用导数}}\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x_0[f(x)-f(x_0)]-f(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=x_0f'(x_0)-f(x_0)$

2. 考研数学复习方法

很多考生考前都感到“数学内容多，要求高，复习抓不住要领——集中表现为心中无数”. 怎样复习才能做到“胸有成竹”呢？

1）应该有一个计划

① **基础复习阶段**. 这段时间里应将与数学有关课程的内容初步复习一遍，并**通过适当的习题加深对“概念、定理的条件、用法”的理解，有意识地恢复、培养、提高基本的运算能力，以达到对全部内容基本弄懂，对有关定理的条件、用法比较熟悉，对有关公式、符号搞清含义、用法，并能对照考试大纲提出进一步复习的问题**，例如：还有哪些不明白的内容、问题、习题？做题过程中反映出什么问题？是不知道如何下手还是知识点不熟练且不会串在一起？或者是计算能力较差？

② **深入提高阶段**. 按考研大纲要求，对照考研试题，**强化自己的基本概念、基本理论、基本运算，特别是要在提高基本运算能力上狠下功夫. 这个阶段要做大量的题，从中解决好“概念、计算、综合应用”方面的问题**. 要对前一阶段中存在的不足之处有所突破，例如概念方面、运算能力方面和综合应用方面.

③ **最后冲刺阶段**. 这一阶段要求“**填缺陷，补漏洞，模拟冲刺**”.

2）高度重视基本概念和计算方法的理解和应用，加强综合运算的训练

【例 4】 设 $f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，试证 $x=0$ 是 $f(x)$的驻点且为极小值点.

这是一个概念题，也含简单的计算. 正确解法是：

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}=2\Rightarrow f'(0)=0\Rightarrow x=0$ 是驻点，再由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2\Rightarrow$ $f(x)>0,\forall x\in(-\delta,\delta)$（据保号性定理）$\Rightarrow f(x)-f(0)>0\Rightarrow x=0$ 是极小值点（极值定义）.

不正确的解法是：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}\overset{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=\!=\!=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}=2\Rightarrow f'(0)=0\Rightarrow x=0$ 是驻点.

如果真正能从以上正误解法的比较中得出正确结论，并再想想：① **解题思路；② 保号性定理的用法；③ 极值定义；④ 洛必达法则能否用；⑤ 洛必达法则是充分条件到底是什么意思；⑥ 出错原因在哪里，那么肯定收获很大. 做会一道题，收获一大片.**

3）高度重视运算能力的提高

要提高运算能力绝不仅仅要多做些题，或者说主要不是多做些题，关键是要加强“归纳总结”的自觉性. **归纳总结“做题的解题思路，用到哪些知识点、方法、技巧，易出错的地方、题型”. 这样做题就会有实质性的收获，运算能力就会有明显提高.**

【例 5】 设 $f(x)$连续，试证

$$\iint\limits_{|y|\leqslant|x|\leqslant 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{x}\right)xf(x)\,\mathrm{d}x$$

初看此题很难下手，没有思路，但冷静分析后可得如下方案：

要证明左边的“二重积分”为右边的“一重积分”$\Rightarrow$

左边的“二重积分”一定可以积出一重$\Rightarrow$

要将左边“二重积分”积出一重，必须用极坐标（如果用直角坐标，无论先对 x 或先对 y 积分都是积不出的，由于 $f(\sqrt{x^2+y^2})$无论关于 x 或 y 都是一般抽象函数）$\Rightarrow$

用极坐标后，显然应该先对 θ 积分（由于 $f(p)$是一般抽象函数，先对 p 积分是积不出来的）$\Rightarrow$先对 θ 积分必须将区域 D：$|y|\leqslant|x|\leqslant 1$ 划分为 $D=2D_1+4D_2$（如图 0-2）$\Rightarrow$

计算左边，恰巧是右边，证明完毕.

只有经过这样的分析→计算→计算出结果→再回味过程，才会有真正的本质上的收获，且越做越有信心，不知不觉中综合计算能力就提高了.

【例 6】 设 $f(x)$连续，试证明：$\iint\limits_{D} f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t$. 其中 D：$|x|\leqslant\dfrac{A}{2}$，$|y|\leqslant\dfrac{A}{2}$.

图 0-2

你觉得以下思路自然吗？

令 $x-y=t$，$\mathrm{d}y=\mathrm{d}t$，y：$-\dfrac{A}{2}\to\dfrac{A}{2}$，$t$：$x+\dfrac{A}{2}\to x-\dfrac{A}{2}\Rightarrow$左边$=\iint\limits_{D_1} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Rightarrow$先对 x 积分（因为$f(t)$是一般抽象函数）积出一重恰巧是右边，证明完毕.

4）高度重视客观题（选择题、填空题）题型的训练

客观题的分值为 56 分，占总分数的 40％左右. 统计结果表明，得分率很低，其原因是：① 对基本概念和基本理论的理解不深；② 计算题的准确率不高；③ 客观题（选择题、填空题）的独特解题方法和解题技巧掌握得不好.

因此，考生绝对有必要有意识地通过一些典型例题，自觉训练，认真体会，归纳总结客观题的解题方法和技巧，这是提高综合计算能力的一个重要方面.

5）建议考生整理一份“复习笔记”

以“极限”内容为例：

1. 概　念

1）定义　例 1，例 2…….

2）性质——“保号性”　例 1，例 2…….

2. 计　算（步骤：① 判断类型；② 选择方法.）

1）方法：① 洛必达法则　例……；②等价代换　例……；……⑩利用“收敛级数的通项趋于零”的原理　例…….

2）技巧　例…….

3）容易出错的地方　例…….

4）题型　例…….

以上笔记的核心是“归纳”. 如果数学内容均能有如上“笔记”，肯定效果极佳. 可取经验是：听完强化班后，再用一个月的时间，整理出一份“满意的笔记”.

6）要有决心和信心，敢于向自己提要求，切忌“盲目做题，浮躁心急”

以上为复习建议，仅作参考. 复习方法要根据自己的实际情况，以“我”为主.

第 1 章　函数、极限、连续

重点难点归纳

1. 函数概念、性质

1)讨论分段函数在“接头点”处的极限、连续性、导数;积分是关键,也是考试的重点.

2)会求分段函数的复合函数.

3)熟悉函数“单调性、奇偶性、周期性、有界性”的判别.

2. 极限概念

1)了解和应用“保号性定理”.

2)求极限的方法(特别注意运用方法的条件、技巧、易出错的地方).

3. 会讨论函数的连续性和间断性

1)分段函数“接头点”的连续性的讨论.

2)明确函数间断性的讨论是指:①求出全部间断点;②指出间断点的类型.

4. 熟悉连续函数在闭区间上的性质

1)会运用“零点定理”.

2)会讨论方程的根(存在性、唯一性、根的个数).

要点内容精讲

一、函　数

1. 定　义

设变量 x 在某实数集 $\mathbf{R}$ 中任意取一个数时,另一变量 y 按一确定的法则总有确定的实数与它对应,则称 y 是 x 的函数,x 称为自变量,$\mathbf{R}$ 称为函数的定义域,记作 $y=f(x),x\in\mathbf{R}$.

注意:定义中有两个要点:

·定义域 $\mathbf{R}$,它表示自变量 x 的取值范围.

·对应法则 $f(\quad)$,它表示给定 x 值,求 y 值的方法.

由此有:

1)两个给定函数是否相同的判别方法是:

当且仅当它们的定义域和对应法则完全相同时,两个函数相同;否则两个函数不相同.

2)函数 y 的定义域的确定:就是使 y 的取值和运算有意义的范围.

2. 复合函数

设 $u=\varphi(x),x\in\mathbf{R},u$ 的值域为 U,又 $y=f(u),u\in U$,则称 y 为 x 的复合函数,记为 $f(\varphi(x)),x\in\mathbf{R}$. 其中 x 称为自变量,y 称为因变量,$u=\varphi(x)$称为中间变量.

这里的要求是:

·会将一个复杂的函数(例如初等函数)拆成一些简单的函数(例如基本初等函数)的复合.

·会将一些简单的函数(例如分段函数)复合在一起.

3. 函数性态——单调性、奇偶性、周期性、有界性

(1)单调性

定义:设 $f(x)$在区间 I 有定义,$x_1<x_2\in I$.

若 $f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 I 上单调增；

$f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 I 上单调减.

判别方法：

方法 1：定义本身，即设 $x_1<x_2$，考查 $f(x_2)-f(x_1)$ 是否为正(或为负)，从而推得 $f(x)$ 是单调增(单调减).

方法 2：利用导数，即对可导函数 y 而言，若 $y'>0$，则 y 单调增；若 $y'<0$，则 y 单调减.

(2)奇偶性

定义：设 $f(x)$ 的定义域对称于原点.

若 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数；$f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数.

判别方法：

方法 1：定义本身就是判别 $f(x)$ 奇偶性的基本原理和方法，即只需计算 $f(-x)$ 是否等于 $\pm f(x)$，即可说明 $f(x)$ 是偶(奇)函数.

方法 2：间接法.

①奇函数的导数必是偶函数，如 $(\sin x)'=\cos x$.

②偶函数的导数必是奇函数，如 $(x^2)'=2x$. ③奇函数的一切原函数必是偶函数.

如 $f(x)=\sin x$ 为奇 $\Rightarrow F(x)=-\cos x+c$ 必为偶函数.

④偶函数仅有一个原函数为奇函数，而任意一个原函数就不是奇函数.

如 $f(x)=\cos x$ 为偶函数 $\Rightarrow F_1(x)=\sin x$ 是奇函数，但 $F_2(x)=\sin x+c$ 就不是奇函数.

⑤ $f(x)-f(-x)$ 为奇函数，$f(x)+f(-x)$ 为偶函数.

(3)周期性

定义：若 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

判别方法：

方法 1：定义本身就是判别函数周期性的基本原理和方法，即只需计算 $f(x+T)$ 是否等于 $f(x)$ 即可.

方法 2：间接法.

①由 $\sin x$，$\cos x$ 的周期为 $2\pi\Rightarrow\sin 2x$，$\cos 2x$，$|\sin x|$，$|\cos x|$ 的周期为 π，$|\sin 2x|$，$|\cos 2x|$ 的周期为 $\frac{\pi}{2}$. ② $f(x)$ 是可导的周期函数 $\Rightarrow f'(x)$ 仍为周期函数(且周期不变).

注意：$f(x)$ 的周期为 T，那么

1) $\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x$； 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}=\dfrac{\int_0^T f(u)\mathrm{d}u}{T}$；

3)若 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，那么 $F(x+T)=F(x)\Leftrightarrow\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$.

【例 1】 $\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$

$=n\int_0^{\pi}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|\mathrm{d}x$

$=n\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x\right)=2\sqrt{2}n$

【例 2】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t}{x}=\dfrac{\int_0^{\pi}|\sin t|\mathrm{d}t}{\pi}=\dfrac{2}{\pi}$

【例 3】 若 $f(x)$为连续的周期为 T 的奇函数，那么 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的周期为 T(因为 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x=0$).

(4)有界性

定义：若 $\exists M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M,\forall x\in I$，则称 $f(x)$在 I 上有界；若不存在 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M,\forall x\in I$，则称 $f(x)$在 I 上无界.

判别方法：

方法 1：定义本身就是判别函数有界的基本原理和方法，即对 $f(x)$去寻找 $|f(x)|\leqslant M$ 的一个 M，找到则有界，找不到则无界. 值得注意的是，此方法的原理虽简单，但要找到 M 却十分困难，因为从 $|f(x)|\leqslant M$ 本身涉及不等式的放大或缩小，技巧性极强. 一般情况下，对此并不特别要求，只需掌握基本的即可，例如：由 $\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1\Rightarrow\frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

方法 2：间接法.

①若 $f(x)$在$[a,b]$上连续$\Rightarrow f(x)$在$[a,b]$上有界.

②若 $f(x)$在$[a,b]$上可积$\Rightarrow f(x)$在$[a,b]$上有界.

③若 $f(x)$在开区间(a,b)上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$存在$\Rightarrow f(x)$在开区间$(a,b)$上有界.

④若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty\Rightarrow f(x)$在含 x_0 的区间上无界.

题型一：必须注意的是，考试是考“接头点”处的极限、连续、导数、积分.

【例 1】 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 那么 $f(x)$在 $x=0$ 处是__C__.

(A)极限不存在； (B)极限存在，但不连续；

(C)连续，但不可导； (D)可导.

分析：①$x=0$ 是分段函数 $f(x)$的“接头点”；②题目就是考查 $x=0$ 处的极限、连续、导数；③关键要明确 $f'(0)$的求法是必须用导数定义求，且决不能用求导公式求.

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0=f(0)\Rightarrow$

$f(x)$在 $x=0$ 处连续，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在$\Rightarrow$

$f(x)$在 $x=0$ 处不可导，故选 C.

【例 2】 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x-1} & x\neq 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$ 那么 $f(x)$在 $x=1$ 处是__A__.

(A)极限不存在； (B)极限存在，不连续； (C)连续，但不可导； (D)可导.

分析：①$x=1$ 是分段函数 $f(x)$的“接头点”；②在求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$时，如果 $f(x)$当 $x\to 1^+$ 和 $x\to 1^-$ 时的表达式不相同，那么就必须分别求出 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$，并考查两者是否相同，从而确定$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$是否存在.

解：由于 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x+1|\cdot|x-1|}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x+1|\cdot|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)\cdot(1-x)}{x-1}$$

$$=-\lim_{x\to 1}(x+1)=-2$$

故选 A.

【例 3】 如果 $f(x)=3x^3+x^2\cdot|x|$，那么 $f(x)$ 的最高阶导数的阶数是__2__.

分析：①要将 $f(x)$ 写成分段函数；② $x=0$ 是 $f(x)$ 的接头点. 由于 $x>0$ 或 $x<0$，$f(x)$ 任意阶可导，因而只需考查 $x=0$ 处 $f(x)$ 是几阶可导，即可确定 $f(x)$ 几阶可导.

解：$f(x)=3x^3+x^2\cdot|x|=\begin{cases}4x^3 & x>0\\ 0 & x=0\\ 2x^3 & x<0\end{cases}$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}12x^2 & x>0\\ 0 & x=0\\ 6x^2 & x<0\end{cases}\quad f''(x)=\begin{cases}24x & x>0\\ 0 & x=0\\ 12x & x<0\end{cases}$$

而 $f_+'''(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{24x-0}{x}=24$

$f_-'''(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{12x-0}{x}=12$

$\Rightarrow f'''(0)$ 不存在 $\Rightarrow f(x)$ 的最高阶导数的阶数为 2.

【例 4】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin 2x+2e^{nx}\cdot\cos x}{x+e^{nx}}=$__2__.

分析：①原式是二重极限，首先求出内层极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin 2x+2e^{nx}\cdot\cos x}{x+e^{nx}}$；

②其结果必是 x 的分段函数（由于 x 是参数）；

③ $x=0$ 是“接头点”，又归结为“求分段函数‘接头点’处的极限”.

解：令 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin 2x+2e^{nx}\cdot\cos x}{x+e^{nx}}=\begin{cases}2\cos x & x>0\\ 2 & x=0\\ \dfrac{\sin 2x}{x} & x<0\end{cases}$

由于当 $x>0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 2x+2e^{nx}\cdot\cos x}{x+e^{nx}}\overset{\text{同除 } e^{nx}}{=\!=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sin 2x}{e^{nx}}+2\cos x}{\dfrac{x}{e^{nx}}+1}=2\cos x$$

因而 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2\cos x=2$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$

故原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin 2x+2e^{nx}\cdot\cos x}{x+e^{nx}}=2$

注意：例 3、例 4 中均考虑将 $f(x)$ 写成“分段函数”. 这就是由“考试均考分段函数在‘接头点’处的极限、连续、导数、积分”的启发而产生的自然思路和必然结果.

题型二：求分段函数的复合函数.

【例 1】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & |x|\leqslant 1\\ x & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$，求 $f(g(x))$.

分析:考查“分段函数的复合函数”.其思路方法是:由内→外的分层确定法.

解:$f(g(x))=\begin{cases}(g(x))^2 & |g(x)|\leqslant 1\\ g(x) & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}(2-x^2)^2 & |2-x^2|\leqslant 1 \text{ 且 } |x|\leqslant 1\\ 2-x^2 & |2-x^2|>1 \text{ 且 } |x|\leqslant 1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$

$=\begin{cases}1 & |x|=1\\ 2-x^2 & |x|<1\\ 2 & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$

【例 2】 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 2\\ 2 & |x|>2\end{cases}$,求 $f(g(x))$,$g(f(x))$.

分析:考查对“分段函数的复合”的熟练程度.

解:①$f(g(x))=\begin{cases}1 & |g(x)|\leqslant 1\\ 0 & |g(x)|>1\end{cases}$

而 $g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 2\\ 2 & |x|>2\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}|g(x)|\leqslant 1\Rightarrow|2-x^2|\leqslant 1,\text{即 }1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}\\ |g(x)|>1\Rightarrow|x|<1\text{ 或}\sqrt{3}<|x|\leqslant\alpha\end{matrix}$

故 $f(g(x))=\begin{cases}1 & -1\leqslant 2-x^2\leqslant 1,\\ 0 & 2-x^2>1,2-x^2<-1\end{cases}=\begin{cases}1 & 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}\\ 0 & |x|<1\text{ 或}\sqrt{3}<|x|\leqslant 2\\ 0 & |x|>2\end{cases}$

②$g(f(x))=\begin{cases}2-f^2(x) & |f(x)|\leqslant 2\\ 2 & |f(x)|>2\end{cases}$

而 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & 1<|x|\leqslant 2\\ 0 & |x|>2\end{cases}$

故 $g(f(x))=\begin{cases}2-1^2 & |x|\leqslant 1\\ 2-0^2 & 1<|x|\leqslant 2\\ 2-0^2 & |x|>2\end{cases}=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$

【例 3】 $f(x)=|x|$,$g(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ x-1 & x\geqslant 0\end{cases}$ 求 $I=\int_{-1}^{2}f(g(x))\mathrm{d}x$.

分析:关键是求 $f(g(x))$.

解:$f(g(x))=\begin{cases}x^2 & x<0\\ |x-1| & x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}x^2 & x<0\\ 1-x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1 & x>1\end{cases}$

故 $I=\int_{-1}^{2}f(g(x))\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^2\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(1-x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(x-1)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

注意:分段复合函数 $f(g(x))$ 求解的思路是:由内→外的分层确定法,即先写出 $u=g(x)$ 在相应区间上的表达式,再确定 $f(u)$ 的表达式.

题型三:函数性态——单调性、奇偶性、周期性、有界性.

(1)单调性

应熟悉 x^2,x^3 的单调增(减)区间,明确 $\sin x$,$\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上分别是单调增、单调减.

【例 1】 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,$\forall x_1,x_2$ 均有$(x_1-x_2)\cdot(f(x_1)-f(x_2))>0$,那么__D__.

(A) $f'(x)>0$；　(B) $f'(x)<0$；　(C) $f(-x)$单调增；　(D) $-f(-x)$单调增.

分析:选择题的方法大致有两种:①直接法;②排除法.

解:由直接法有,当 $x_1>x_2$ 时,$f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow -x_1<-x_2$,且 $f(-x_1)<f(-x_2)\Rightarrow -f(-x_1)>-f(-x_2)$,即 $x_1>x_2$ 时,$-f(-x_1)>-f(-x_2)$,故选 D.

【例 2】 求 $I=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

分析:①定积分中开方必须加绝对值 $\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}=|\sin x-\cos x|$;②将区间分小,去绝对值符号.

解:$I=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}$$

注意:①计算 $\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x$ 时,为去绝对值符号,将 $\int_0^{\pi}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$. 这里用到了 $\sin x,\cos x$ 的单调性.

②定积分计算中,开方一定要加“绝对值”.

【例 3】 $f(x)$连续,单调增,求证:$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-xf(x)\leqslant 0$.

分析:①利用 $f(x)$的单调性证明其不等式;②由于式中含积分 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$,可用“积分中值定理”或 $xf(x)$改写为 $xf(x)=\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t$.

证明:①原式左边$=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-xf(x)=f(c)x-xf(x)$

$$=x(f(c)-f(x))\leqslant 0\qquad(\text{因为 }0<c<x)$$

②原式左边$=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-xf(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t$

$$=\int_0^x[f(t)-f(x)]\,\mathrm{d}t\leqslant 0\qquad(\text{因为 }f(x)\text{单调增})$$

注意:比较以上两种解法,值得回味的是:方法①的关键是用积分中值定理 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=xf(c)$. 方法②的关键是 $xf(x)=\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t$,这种变形是求解中的常用技巧.

【例 4】 $f(0)=0$,$\forall x\in[0,+\infty)$有 $f'(x)$单调增,$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. 证明:$g(x)$单调增,$\forall x\in(0,+\infty)$.

分析:关键技巧是利用 $f(0)=0$ 的条件,对 $f(x)$用拉格朗日中值定理$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(c)\Rightarrow f(x)=xf'(c)$.

证明:由 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$,为了考虑分子$=xf'(x)-f(x)$的正负性,对 $f(x)$在$[0,x]$上用拉格朗日中值定理得:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(c)\qquad(0<c<x)$$

故 $f(x)=xf'(c)<xf'(x)\Rightarrow$分子$=xf'(x)-f(x)>0\Rightarrow g(x)$单调增.