

全国知名考研辅导机构指定教材

# 考研 [高等数学] 辅导教材

主编：黄庆怀

- 重点难点归纳
- 要点内容精讲
- 典型题型精解
- 经典习题演练

# 2012



北京航空航天大学出版社  
BEI HANG UNIVERSITY PRESS

# 2012 考研高等数学辅导教材

主编：黄庆怀

北京航空航天大学出版社

## 内 容 简 介

本书是研究生入学统一考试科目“高等数学(微积分)”的复习指导书。数学一、数学二、数学三的考生均适用。本书紧扣考研数学大纲,贴近考试实际,内容丰富、实用。全书共9章,每章包括重点难点归纳、要点内容精讲、典型题型精解、本章习题及答案。本书概念叙述清晰,解题思路巧妙,方法归纳实用。适合所有考研学子,对于在校的大学生及自学者,也是一本较好的学习参考书。本书作者是考研数学辅导名师。

### 图书在版编目(CIP)数据

2012 考研高等数学辅导教材/黄庆怀主编. —

北京:北京航空航天大学出版社,2011.3

ISBN 978-7-5124-0338-3

I. ①2… II. ①黄… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 012377 号

版权所有,侵权必究。

### 2012 考研高等数学辅导教材

主 编 黄庆怀

策划编辑 谭 莉

责任编辑 谭 莉

\*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

有限公司印装 各地书店经销

\*

开本:787×1092 1/16 印张:23.75 字数:702 千字

2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5124-0338-3 定价:39.00 元

# 前 言

本书是针对考研的“高等数学(微积分)”部分的专门复习指导书,是以作者多年来的考研辅导讲义(高等数学部分)为素材编写而成的,对数学一、数学二、数学三的考生均适用。全书共包括9章内容及附录,具体为:函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学及应用,常微分方程,多元函数微分学及应用,重积分,线、面积分,无穷级数,矢量代数与空间解析几何,附录(考研预备知识)。每章分成4个部分:重点难点归纳、要点内容精讲、典型题型精解、本章习题及答案。

本书紧扣数学考研大纲,贴近考试实际,内容丰富、实用,概念叙述清晰,解题思路巧妙,方法归纳实用。特点如下:

★基本概念、理论和公式讲解详细全面。所有例题都强调基本概念和基本理论的应用,解题方法独特,强调技巧的综合应用。例题丰富,每章的例题都能概括每章内容的全部概念、计算方法和各种题型。

★例题详细讲解做题的思路,解题入手的原理方法、技巧,容易出错的地方、规律和心得体会。

★读者在理解本书内容和完成相应的习题后,在基本概念、理论的理解能力和题目的运算能力方面必有明显的提高。

本书适合所有考研学子,也可作为在校的大学生及自学者的“高等数学”的学习参考书。

由于编者水平有限,如有疏漏和错误之处,欢迎读者批评指正!

祝所有考研学子顺利考入自己的理想学校!

黄庆怀

2011年3月

# 目 录

绪 论 .....	1
一、考研数学简介 .....	1
二、考研数学复习方法 .....	2
第 1 章 函数、极限、连续 .....	6
重点难点归纳 .....	6
要点内容精讲 .....	6
一、函 数 .....	6
二、极 限 .....	14
三、连续(间断) .....	16
典型题型精解 .....	17
本章习题及答案 .....	38
第 2 章 一元函数微分学 .....	45
重点难点归纳 .....	45
要点内容精讲 .....	45
一、导数概念 .....	45
二、导数计算 .....	46
三、中值定理与导数应用 .....	48
典型题型精解 .....	51
本章习题及答案 .....	72
第 3 章 一元函数积分学及应用 .....	88
重点难点归纳 .....	88
要点内容精讲 .....	88
一、不定积分 .....	88
二、定积分 .....	90
三、定积分应用 .....	95
四、微积分在经济问题中的应用 .....	95
典型题型精解 .....	97
本章习题及答案 .....	137
第 4 章 常微分方程 .....	148
重点难点归纳 .....	148
要点内容精讲 .....	148
典型题型精解 .....	158
本章习题及答案 .....	168
第 5 章 多元函数微分学及应用 .....	175
重点难点归纳 .....	175
要点内容精讲 .....	175
一、多元函数、极限、连续、偏导数、全微分 .....	175
二、多元函数微分法 .....	178

三、方向导数与梯度(仅要求数学一)	179
四、多元函数微分的应用	180
典型题型精解	182
本章习题及答案	213
<b>第6章 重积分</b>	<b>218</b>
重点难点归纳	218
要点内容精讲	218
一、二、三重积分的概念	218
二、二重积分计算	219
三、三重积分计算	222
典型题型精解	224
本章习题及答案	249
<b>第7章 线、面积分</b>	<b>253</b>
重点难点归纳	253
要点内容精讲	253
一、曲线积分	253
二、曲面积分	257
三、场论初步	259
四、多元函数积分的应用	259
典型题型精解	261
本章习题及答案	283
<b>第8章 无穷级数</b>	<b>289</b>
重点难点归纳	289
要点内容精讲	289
一、常数项级数	290
二、函数项级数与幂级数	292
三、傅里叶级数	294
典型题型精解	296
本章习题及答案	336
<b>第9章 矢量代数与空间解析几何</b>	<b>346</b>
重点难点归纳	346
要点内容精讲	346
一、向量	346
二、平面与直线	348
三、曲面与空间曲线	349
典型题型精解	351
本章习题及答案	360
<b>附录 考研预备知识</b>	<b>363</b>
初等代数	363
初等几何公式	365
平面三角	365
平面解析几何	367

# 绪 论

## 一、考研数学简介

### 考试性质

全国硕士研究生入学数学考试是为招收工学、经济学、管理学硕士研究生而设置的具有选拔功能的水平考试。它的指导思想是既要有利于国家对高层次人才的选拔,也要有利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高。

### 考查目标

要求考生比较系统地理解数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法,具备抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力。

### 试卷分类及使用专业

根据工学、经济学、管理学各学科、专业对硕士研究生入学所应具备的数学知识和能力的不同要求,硕士研究生入学统考数学试卷分为3种,其中针对工学门类的为数学一、数学二,针对经济学和管理学门类的为数学三。招生专业须使用的试卷种类规定如下:

#### 1. 须使用数学一的招生专业

① 工学门类中的力学、机械工程、光学工程、仪器科学与技术、冶金工程、动力工程及工程热物理、电气工程、电子科学与技术、信息与通信工程、控制科学与工程、计算机科学与技术、土木工程、水利工程、测绘科学与技术、交通运输工程、船舶与海洋工程、航空宇航科学与技术、兵器科学与技术、核科学与技术、生物医学工程等20个一级学科中所有的二级学科、专业。

② 授工学学位的管理科学与工程一级学科。

#### 2. 须使用数学二的招生专业

工学门类中的纺织科学与工程、轻工技术与工程、农业工程、林业工程、食品科学与工程等5个一级学科中所有的二级学科、专业。

#### 3. 须选用数学一或数学二的招生专业(由招生单位自定)

工学门类中的材料科学与工程、化学工程与技术、地质资源与地质工程、矿业工程、石油与天然气工程、环境科学与工程等一级学科中对数学要求较高的二级学科、专业选用数学一,对数学要求较低的选用数学二。

#### 4. 须使用数学三的招生专业

① 经济学门类的各一级学科。

② 管理学门类中的工商管理、农林经济管理一级学科。

③ 授管理学学位的管理科学与工程一级学科。

### 考试形式和试卷结构

#### 1. 试卷满分及考试时间

各卷种试卷满分均为150分,考试时间为180分钟。

## 2. 答题方式

答题方式为闭卷、笔试.

## 3. 试卷内容结构

分值比例 / (%) 考试内容	卷种		
	数学一	数学二	数学三
高等数学(或微积分)	56	78	56
线性代数	22	22	22
概率论与数理统计	22	—	22

## 4. 试卷题型结构

各卷种试卷题型结构均为:

单项选择题 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分;

填空题 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分;

解答题(包括证明题) 9 小题, 共 94 分.

# 二、考研数学复习方法

## 1. 考研数学分析

硕士研究生入学统一考试属“选拔性考试”, 对考生的数学基础和能力进行比较全面的考查: 考生的基本知识和概念掌握得如何, 内容的整体性与综合性掌握得如何, 以及是否有较强的基本运算能力. 自 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学统一考试以来, 每年的试题都紧扣考试大纲, 始终遵循“考查的知识面较广, 重基础, 重能力, 难度适中”的原则, 广大考生十分认同这样的考试, 并且意识到只有“全面, 认真, 讲究方法, 狠下功夫”才能取得成功, 否则就不会取得好的成绩.

考研数学试题大致有以下特点.

说明: 08<sub>4</sub><sup>3</sup>10 意为“2008 年数学三、数学四, 10 分”, 下同.

1) 重基础, 重概念, 重方法, 不会有偏题、怪题.

【例 1】 ① <08<sub>4</sub><sup>3</sup>10> 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \underline{-\frac{1}{6}}$ .

② <08<sub>2</sub><sup>1</sup>09> 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \sin(\sin x)) \sin x}{x^4} = \underline{\frac{1}{6}}$ .

③ <07<sub>4</sub><sup>3</sup>04> 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 同  $\sqrt{x}$  等价的无穷小量是 B.

(A)  $1 - e^{\sqrt{x}}$  (B)  $\ln(1 + \sqrt{x})$  (C)  $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$  (D)  $1 - \cos \sqrt{x}$

④ <07<sub>2</sub><sup>1</sup>04> 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 同  $\sqrt{x}$  等价无穷小的无穷小量是 B.

(A)  $1 - e^{\sqrt{x}}$  (B)  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$  (C)  $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$  (D)  $1 - \cos \sqrt{x}$

⑤ <05<sub>4</sub><sup>3</sup>04> 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \underline{2}$ .

⑥ <05<sub>4</sub><sup>3</sup>08> 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) = \underline{\frac{3}{2}}$ .

以上考题均属基本的“求极限,且均是利用等价代换求极限”,体现出考试的深度以及重基础、重基本的原则.

**【例 2】** (07 $\frac{1}{4}$ 04) 连续函数  $y=f(x)$  在  $[-3, -2], [2, 3]$  上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周; 在区间  $[-2, 0], [0, 2]$  的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周见图 0-1, 且  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 则

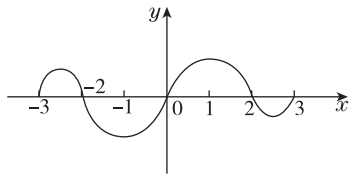


图 0-1

下列结论正确的是 C.

(A)  $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$

(B)  $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$

(C)  $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$

(D)  $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$

此题出得好,将概念、计算典型的结合,以客观题的形式出现,考查的知识点是定积分的几何意义——面积分的代数和.若考生概念不清肯定出错,不掌握“选择题”的答题技巧(排除法)也不行.答案应选(C),理由是: $F(2)$ 为正, $F(3)$ 为正,且 $F(3) < F(2)$ , $F(-3) = \int_0^{-3} f(t) dt =$

$-\int_{-3}^0 f(t) dt = +$ ,同理  $F(-2) = +$ ,故应选(C).

### 2) 考题均含多个知识点(3~5个)

这就要求考生对“内容的整体性与综合性”的掌握比较好,但是如果对每个知识点都熟悉,却不能熟练巧妙地将它们串在一起(这就是综合性、技巧性)也不能很好地应对考研试题.

**【例 3】** (98403),  $f(x) = x^n$  过点  $(1, 1)$  的切线与  $x$  轴相交于点  $(\xi_n, 0)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = \frac{1}{e}$ .

此题属基本题,简单,满分只有 3 分,却要用到 4 个知识点:① 会求切线方程;② 会求切线与  $x$  轴的交点  $(\xi_n, 0)$ ;③ 会求函数值  $f(\xi_n)$ ;④ 会求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n)$ .

### 3) 要求概念清楚,计算能力强

考题的运算量一般都很小,结果比较简单.这就要求考生的概念清楚,计算能力较强,否则就达不到原题的简单运算的要求,算不出原题的简单结果,且感到做题时间很不够.例如:1) 中的例 2,如果直接求出  $F(3), F(2), F(-3)$  的值再比较大小,那就太麻烦了,达不到“选择题”的答题要求,时间也不够.

### 4) 必有技巧性、灵活性试题

试题一定有引考生“上当”的地方,每份试卷中必有“有一定技巧性、灵活性”的试题.试题必有考生平时“容易出错”的模拟题,如果考生在概念、综合计算方面掌握不够,就会“上当,失误”.例如  $f(x)$  可导,求  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{x - x_0}$ . 不少考生这样做:

原式  $\frac{\text{洛必达}}{\text{法则}} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 f'(x) - f(x_0)}{1} = x_0 f'(x_0) - f(x_0)$ . 错!(不能用洛必达法则).

正确做法:原式  $\frac{\text{用导数}}{\text{定义}} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 [f(x) - f(x_0)] - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x_0 f'(x_0) - f(x_0)$

## 2. 考研数学复习方法

很多考生考前都感到“数学内容多,要求高,复习抓不住要领——集中表现为心中无数”.怎样复习才能做到“胸有成竹”呢?

### 1) 应该有一个计划

① 基础复习阶段. 这段时间里应将与数学有关课程的内容初步复习一遍, 并通过适当的习题加深对“概念、定理的条件、用法”的理解, 有意识地恢复、培养、提高基本的运算能力, 以达到对全部内容基本弄懂, 对有关定理的条件、用法比较熟悉, 对有关公式、符号搞清含义、用法, 并能对照考试大纲提出进一步复习的问题, 例如: 还有哪些不明白的内容、问题、习题? 做题过程中反映出什么问题? 是不知道如何下手还是知识点不熟练且不会串在一起? 或者是计算能力较差?

② 深入提高阶段. 按考研大纲要求, 对照考研试题, 强化自己的基本概念、基本理论、基本运算, 特别是要在提高基本运算能力上狠下功夫. 这个阶段要做大量的题, 从中解决好“概念、计算、综合应用”方面的问题. 要对前一阶段中存在的不足之处有所突破, 例如概念方面、运算能力方面和综合应用方面.

③ 最后冲刺阶段. 这一阶段要求“填缺陷, 补漏洞, 模拟冲刺”.

### 2) 高度重视基本概念和计算方法的理解和应用, 加强综合运算的训练

**【例 4】** 设  $f(0)=0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}=2$ , 试证  $x=0$  是  $f(x)$  的驻点且为极小值点.

这是一个概念题, 也含简单的计算. 正确解法是:

由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow x=0$  是驻点, 再由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in (-\delta, \delta)$  (据保号性定理)  $\Rightarrow f(x) - f(0) > 0 \Rightarrow x=0$  是极小值点 (极值定义).

不正确的解法是: 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = 2 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow x=0$  是驻点.

如果真正能从以上正误解法的比较中得出正确结论, 并再想想: ① 解题思路; ② 保号性定理的用法; ③ 极值定义; ④ 洛必达法则能否用; ⑤ 洛必达法则是充分条件到底是什么意思; ⑥ 出错原因在哪里, 那么肯定收获很大. 做会一道题, 收获一大片.

### 3) 高度重视运算能力的提高

要提高运算能力绝不仅仅要多做些题, 或者说主要不是多做些题, 关键是要加强“归纳总结”的自觉性. 归纳总结“做题的解题思路, 用到哪些知识点、方法、技巧, 易出错的地方、题型”. 这样做题就会有实质性的收获, 运算能力就会有明显提高.

**【例 5】** 设  $f(x)$  连续, 试证

$$\iint_{|y| \leq |x| \leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy = \pi \int_0^1 x f(x) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left( \pi - 4 \arccos \frac{1}{x} \right) x f(x) dx$$

初看此题很难下手, 没有思路, 但冷静分析后可得如下方案:

要证明左边的“二重积分”为右边的“一重积分” $\Rightarrow$

左边的“二重积分”一定可以积出一重 $\Rightarrow$

要将左边“二重积分”积出一重, 必须用极坐标 (如果用直角坐标, 无论先对  $x$  或先对  $y$  积分都是积不出的, 由于  $f(\sqrt{x^2+y^2})$  无论关于  $x$  或  $y$  都是一般抽象函数) $\Rightarrow$

用极坐标后, 显然应该先对  $\theta$  积分 (由于  $f(\rho)$  是一般抽象函数, 先对  $\rho$  积分是积不出来的) $\Rightarrow$  先对  $\theta$  积分必须将区域  $D: |y| \leq |x| \leq 1$  划分为  $D=2D_1+4D_2$  (如图 0-2) $\Rightarrow$

计算左边, 恰巧是右边, 证明完毕.

只有经过这样的分析→计算→计算出结果→再回味过程,才会有真正的本质上的收获,且越做越有信心,不知不觉中综合计算能力就提高了.

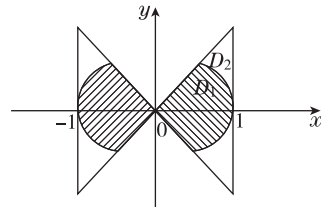


图 0-2

**【例 6】** 设  $f(x)$  连续, 试证明:  $\iint_D f(x-y) dx dy = \int_{-A}^A f(t) dt$

( $A - |t|$ )  $dt$ . 其中  $D: |x| \leq \frac{A}{2}, |y| \leq \frac{A}{2}$ .

你觉得以下思路自然吗?

令  $x-y=t, dy=dt, y: -\frac{A}{2} \rightarrow \frac{A}{2}, t: x+\frac{A}{2} \rightarrow x-\frac{A}{2} \Rightarrow$  左边  $= \iint_{D_1} f(t) dx dt \Rightarrow$  先对  $x$  积分

(因为  $f(t)$  是一般抽象函数) 积出一重恰巧是右边, 证明完毕.

#### 4) 高度重视客观题(选择题、填空题)题型的训练

客观题的分值为 56 分, 占总分数的 40% 左右. 统计结果表明, 得分率很低, 其原因是:

- ① 对基本概念和基本理论的理解不深;
- ② 计算题的准确率不高;
- ③ 客观题(选择题、填空题)的独特解题方法和解题技巧掌握得不好.

因此, 考生绝对有必要有意识地通过一些典型例题, 自觉训练, 认真体会, 归纳总结客观题的解题方法和技巧, 这是提高综合计算能力的一个重要方面.

#### 5) 建议考生整理一份“复习笔记”

以“极限”内容为例:

##### 1. 概 念

1) 定义 例 1, 例 2…….

2) 性质——“保号性” 例 1, 例 2…….

##### 2. 计 算(步骤: ① 判断类型; ② 选择方法.)

1) 方法: ① 洛必达法则 例……; ② 等价代换 例……; …… ⑩ 利用“收敛级数的通项趋于零”的原理 例…….

2) 技巧 例…….

3) 容易出错的地方 例…….

4) 题型 例…….

以上笔记的核心是“归纳”. 如果数学内容均能有如上“笔记”, 肯定效果极佳. 可取经验是: 听完强化班后, 再用一个月的时间, 整理出一份“满意的笔记”.

#### 6) 要有决心和信心, 敢于向自己提要求, 切忌“盲目做题, 浮躁心急”

以上为复习建议, 仅作参考. 复习方法要根据自己的实际情况, 以“我”为主.

# 第 1 章 函数、极限、连续

## 重点难点归纳

### 1. 函数概念、性质

- 1) 讨论分段函数在“接头点”处的极限、连续性、导数；积分是关键，也是考试的重点。
- 2) 会求分段函数的复合函数。
- 3) 熟悉函数“单调性、奇偶性、周期性、有界性”的判别。

### 2. 极限概念

- 1) 了解和应用“保号性定理”。
- 2) 求极限的方法(特别注意运用方法的条件、技巧、易出错的地方)。

### 3. 会讨论函数的连续性和间断性

- 1) 分段函数“接头点”的连续性的讨论。
- 2) 明确函数间断性的讨论是指：①求出全部间断点；②指出间断点的类型。

### 4. 熟悉连续函数在闭区间上的性质

- 1) 会运用“零点定理”。
- 2) 会讨论方程的根(存在性、唯一性、根的个数)。

## 要点内容精讲

### 一、函 数

#### 1. 定 义

设变量  $x$  在某实数集  $\mathbf{R}$  中任意取一个数时，另一变量  $y$  按一确定的法则总有确定的实数与它对应，则称  $y$  是  $x$  的函数， $x$  称为自变量， $\mathbf{R}$  称为函数的定义域，记作  $y=f(x), x \in \mathbf{R}$ 。

注意：定义中有两个要点：

- 定义域  $\mathbf{R}$ ，它表示自变量  $x$  的取值范围。
- 对应法则  $f(\quad)$ ，它表示给定  $x$  值，求  $y$  值的方法。

由此有：

- 1) 两个给定函数是否相同的判别方法是：  
当且仅当它们的定义域和对应法则完全相同时，两个函数相同；否则两个函数不相同。
- 2) 函数  $y$  的定义域的确定：就是使  $y$  的取值和运算有意义的范围。

#### 2. 复合函数

设  $u=\varphi(x), x \in \mathbf{R}, u$  的值域为  $U$ ，又  $y=f(u), u \in U$ ，则称  $y$  为  $x$  的复合函数，记为  $f(\varphi(x)), x \in \mathbf{R}$ 。其中  $x$  称为自变量， $y$  称为因变量， $u=\varphi(x)$  称为中间变量。

这里的要求是：

- 会将一个复杂的函数(例如初等函数)拆成一些简单的函数(例如基本初等函数)的复合。
- 会将一些简单的函数(例如分段函数)复合在一起。

#### 3. 函数性态——单调性、奇偶性、周期性、有界性

##### (1) 单调性

定义：设  $f(x)$  在区间  $I$  有定义， $x_1 < x_2 \in I$ 。

若  $f(x_1) < f(x_2)$ , 称  $f(x)$  在  $I$  上单调增;

$f(x_1) > f(x_2)$ , 称  $f(x)$  在  $I$  上单调减.

**判别方法:**

**方法 1:** 定义本身, 即设  $x_1 < x_2$ , 考查  $f(x_2) - f(x_1)$  是否为正(或为负), 从而推得  $f(x)$  是单调增(单调减).

**方法 2:** 利用导数, 即对可导函数  $y$  而言, 若  $y' > 0$ , 则  $y$  单调增; 若  $y' < 0$ , 则  $y$  单调减.

### (2) 奇偶性

**定义:** 设  $f(x)$  的定义域对称于原点.

若  $f(-x) = f(x)$ , 称  $f(x)$  为偶函数;  $f(-x) = -f(x)$ , 称  $f(x)$  为奇函数.

**判别方法:**

**方法 1:** 定义本身就是判别  $f(x)$  奇偶性的基本原理和方法, 即只需计算  $f(-x)$  是否等于  $\pm f(x)$ , 即可说明  $f(x)$  是偶(奇)函数.

**方法 2:** 间接法.

① 奇函数的导数必是偶函数, 如  $(\sin x)' = \cos x$ .

② 偶函数的导数必是奇函数, 如  $(x^2)' = 2x$ . ③ 奇函数的一切原函数必是偶函数.

如  $f(x) = \sin x$  为奇  $\Rightarrow F(x) = -\cos x + c$  必为偶函数.

④ 偶函数仅有一个原函数为奇函数, 而任意一个原函数就不是奇函数.

如  $f(x) = \cos x$  为偶函数  $\Rightarrow F_1(x) = \sin x$  是奇函数, 但  $F_2(x) = \sin x + c$  就不是奇函数.

⑤  $f(x) - f(-x)$  为奇函数,  $f(x) + f(-x)$  为偶函数.

### (3) 周期性

**定义:** 若  $f(x+T) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  是以  $T$  为周期的周期函数.

**判别方法:**

**方法 1:** 定义本身就是判别函数周期性的基本原理和方法, 即只需计算  $f(x+T)$  是否等于  $f(x)$  即可.

**方法 2:** 间接法.

① 由  $\sin x, \cos x$  的周期为  $2\pi \Rightarrow \sin 2x, \cos 2x, |\sin x|, |\cos x|$  的周期为  $\pi, |\sin 2x|, |\cos 2x|$  的周期为  $\frac{\pi}{2}$ . ②  $f(x)$  是可导的周期函数  $\Rightarrow f'(x)$  仍为周期函数(且周期不变).

**注意:**  $f(x)$  的周期为  $T$ , 那么

$$1) \int_a^{a+nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx = n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(u) du}{x} = \frac{\int_0^T f(u) du}{T};$$

$$3) \text{若 } F(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ 那么 } F(x+T) = F(x) \Leftrightarrow \int_0^T f(x) dx = 0.$$

**【例 1】**

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx &= n \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx \\ &= n \int_0^{\pi} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx = n \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| dx \\ &= n \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \right) = 2\sqrt{2}n \end{aligned}$$

**【例 2】**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} = \frac{\int_0^{\pi} |\sin t| dt}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

**【例 3】** 若  $f(x)$  为连续的周期为  $T$  的奇函数, 那么  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  的周期为  $T$  (因为  $\int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = 0$ ).

**(4) 有界性**

**定义:** 若  $\exists M > 0$ , 使  $|f(x)| \leq M, \forall x \in I$ , 则称  $f(x)$  在  $I$  上有界; 若不存在  $M > 0$ , 使  $|f(x)| \leq M, \forall x \in I$ , 则称  $f(x)$  在  $I$  上无界.

**判别方法:**

**方法 1:** 定义本身就是判别函数有界的基本原理和方法, 即对  $f(x)$  去寻找  $|f(x)| \leq M$  的一个  $M$ , 找到则有界, 找不到则无界. 值得注意的是, 此方法的原理虽简单, 但要找到  $M$  却十分困难, 因为从  $|f(x)| \leq M$  本身涉及不等式的放大或缩小, 技巧性极强. 一般情况下, 对此并不特别要求, 只需掌握基本的即可, 例如: 由  $\frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界.

**方法 2:** 间接法.

- ① 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续  $\Rightarrow f(x)$  在  $[a, b]$  上有界.
- ② 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积  $\Rightarrow f(x)$  在  $[a, b]$  上有界.
- ③ 若  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  存在,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在  $\Rightarrow f(x)$  在开区间  $(a, b)$  上有界.
- ④ 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Rightarrow f(x)$  在含  $x_0$  的区间上无界.

**题型一: 必须注意的是, 考试是考“接头点”处的极限、连续、导数、积分.**

**【例 1】** 设  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  那么  $f(x)$  在  $x=0$  处是 C.

- (A) 极限不存在; (B) 极限存在, 但不连续;
- (C) 连续, 但不可导; (D) 可导.

**分析:** ①  $x=0$  是分段函数  $f(x)$  的“接头点”; ② 题目就是考查  $x=0$  处的极限、连续、导数; ③ 关键要明确  $f'(0)$  的求法是必须用导数定义求, 且决不能用求导公式求.

**解:** 由于  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0) \Rightarrow$

$f(x)$  在  $x=0$  处连续,  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  不存在  $\Rightarrow$   
 $f(x)$  在  $x=0$  处不可导, 故选 C.

**【例 2】** 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$  那么  $f(x)$  在  $x=1$  处是 A.

- (A) 极限不存在; (B) 极限存在, 不连续; (C) 连续, 但不可导; (D) 可导.

**分析:** ①  $x=1$  是分段函数  $f(x)$  的“接头点”; ② 在求  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  时, 如果  $f(x)$  当  $x \rightarrow 1^+$  和  $x \rightarrow 1^-$  时的表达式不相同, 那么就必须分别求出  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ , 并考查两者是否相同, 从而确定  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  是否存在.

$$\begin{aligned} \text{解: 由于 } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x+1| \cdot |x-1|}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x+1| \cdot |x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1) \cdot (1-x)}{x-1} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = -2 \end{aligned}$$

故选 A.

**【例 3】** 如果  $f(x) = 3x^3 + x^2 \cdot |x|$ , 那么  $f(x)$  的最高阶导数的阶数是 2.

分析: ①要将  $f(x)$  写成分段函数; ② $x=0$  是  $f(x)$  的接头点. 由于  $x>0$  或  $x<0$ ,  $f(x)$  任意阶可导, 因而只需考查  $x=0$  处  $f(x)$  是几阶可导, 即可确定  $f(x)$  几阶可导.

$$\text{解: } f(x) = 3x^3 + x^2 \cdot |x| = \begin{cases} 4x^3 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 2x^3 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 12x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 6x^2 & x < 0 \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} 24x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 12x & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{而 } f_+'''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(x) - f''(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{24x - 0}{x} = 24$$

$$f_-'''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f''(x) - f''(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{12x - 0}{x} = 12$$

$\Rightarrow f'''(0)$  不存在  $\Rightarrow f(x)$  的最高阶导数的阶数为 2.

**【例 4】** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x + 2e^{nx} \cdot \cos x}{x + e^{nx}} = \underline{2}$ .

分析: ①原式是二重极限, 首先求出内层极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x + 2e^{nx} \cdot \cos x}{x + e^{nx}}$ ;

②其结果必是  $x$  的分段函数(由于  $x$  是参数);

③ $x=0$  是“接头点”, 又归结为“求分段函数‘接头点’处的极限”.

$$\text{解: 令 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x + 2e^{nx} \cdot \cos x}{x + e^{nx}} = \begin{cases} 2 \cos x & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ \frac{\sin 2x}{x} & x < 0 \end{cases}$$

由于当  $x > 0$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x + 2e^{nx} \cdot \cos x}{x + e^{nx}} \stackrel{\text{同除 } e^{nx}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin 2x}{e^{nx}} + 2 \cos x}{\frac{x}{e^{nx}} + 1} = 2 \cos x$$

$$\text{因而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \cos x = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

$$\text{故原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x + 2e^{nx} \cdot \cos x}{x + e^{nx}} = 2$$

注意: 例 3、例 4 中均考虑将  $f(x)$  写成“分段函数”. 这就是由“考试均考分段函数在‘接头点’处的极限、连续、导数、积分”的启发而产生的自然思路和必然结果.

## 题型二: 求分段函数的复合函数.

**【例 1】** 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \leq 1 \\ x & |x| > 1 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} 2-x^2 & |x| \leq 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$ , 求  $f(g(x))$ .

分析:考查“分段函数的复合函数”.其思路方法是:由内→外的分层确定法.

$$\text{解: } f(g(x)) = \begin{cases} (g(x))^2 & |g(x)| \leq 1 \\ g(x) & |g(x)| > 1 \end{cases} = \begin{cases} (2-x^2)^2 & |2-x^2| \leq 1 \text{ 且 } |x| \leq 1 \\ 2-x^2 & |2-x^2| > 1 \text{ 且 } |x| \leq 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & |x| = 1 \\ 2-x^2 & |x| < 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 2-x^2 & |x| \leq 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$$

**【例 2】** 设  $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} 2-x^2 & |x| \leq 2 \\ 2 & |x| > 2 \end{cases}$ , 求  $f(g(x)), g(f(x))$ .

分析:考查对“分段函数的复合”的熟练程度.

解: ①  $f(g(x)) = \begin{cases} 1 & |g(x)| \leq 1 \\ 0 & |g(x)| > 1 \end{cases}$

而  $g(x) = \begin{cases} 2-x^2 & |x| \leq 2 \\ 2 & |x| > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \Rightarrow |g(x)| \leq 1 \Rightarrow |2-x^2| \leq 1, \text{ 即 } 1 \leq |x| \leq \sqrt{3} \\ |x| > 2 \Rightarrow |g(x)| > 1 \Rightarrow |x| < 1 \text{ 或 } \sqrt{3} < |x| \leq \alpha \end{cases}$

故  $f(g(x)) = \begin{cases} 1 & -1 \leq 2-x^2 \leq 1, \\ 0 & 2-x^2 > 1, 2-x^2 < -1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & 1 \leq |x| \leq \sqrt{3} \\ 0 & |x| < 1 \text{ 或 } \sqrt{3} < |x| \leq 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases}$

②  $g(f(x)) = \begin{cases} 2-f^2(x) & |f(x)| \leq 2 \\ 2 & |f(x)| > 2 \end{cases}$

而  $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases}$

故  $g(f(x)) = \begin{cases} 2-1^2 & |x| \leq 1 \\ 2-0^2 & 1 < |x| \leq 2 \\ 2-0^2 & |x| > 2 \end{cases} = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$

**【例 3】**  $f(x) = |x|, g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$  求  $I = \int_{-1}^2 f(g(x))dx$ .

分析:关键是求  $f(g(x))$ .

解:  $f(g(x)) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ |x-1| & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$

故  $I = \int_{-1}^2 f(g(x))dx = \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = \frac{4}{3}$ .

注意:分段复合函数  $f(g(x))$  求解的思路是:由内→外的分层确定法,即先写出  $u = g(x)$  在相应区间上的表达式,再确定  $f(u)$  的表达式.

### 题型三:函数性态——单调性、奇偶性、周期性、有界性.

#### (1)单调性

应熟悉  $x^2, x^3$  的单调增(减)区间,明确  $\sin x, \cos x$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上分别是单调增、单调减.

**【例 1】** 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有定义,  $\forall x_1, x_2$  均有  $(x_1 - x_2) \cdot (f(x_1) - f(x_2)) > 0$ , 那么 D.

(A)  $f'(x) > 0$ ; (B)  $f'(x) < 0$ ; (C)  $f(-x)$  单调增; (D)  $-f(-x)$  单调增.

分析: 选择题的方法大致有两种: ①直接法; ②排除法.

解: 由直接法有, 当  $x_1 > x_2$  时,  $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow -x_1 < -x_2$ , 且  $f(-x_1) < f(-x_2) \Rightarrow -f(-x_1) > -f(-x_2)$ , 即  $x_1 > x_2$  时,  $-f(-x_1) > -f(-x_2)$ , 故选 D.

**【例 2】** 求  $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$ .

分析: ①定积分中开方必须加绝对值  $\sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = |\sin x - \cos x|$ ; ②将区间分小, 去绝对值符号.

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx = \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin x - \cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\sin x - \cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

注意: ①计算  $\int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| dx$  时, 为去绝对值符号, 将  $\int_0^{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$ . 这里用到了  $\sin x, \cos x$  的单调性.

②定积分计算中, 开方一定要加“绝对值”.

**【例 3】**  $f(x)$  连续, 单调增, 求证:  $\int_0^x f(t) dt - xf(x) \leq 0$ .

分析: ①利用  $f(x)$  的单调性证明其不等式; ②由于式中含积分  $\int_0^x f(t) dt$ , 可用“积分中值定理”或  $xf(x)$  改写为  $xf(x) = \int_0^x f(x) dt$ .

$$\begin{aligned} \text{证明: } ① \text{原式左边} &= \int_0^x f(t) dt - xf(x) = f(c)x - xf(x) \\ &= x(f(c) - f(x)) \leq 0 \quad (\text{因为 } 0 < c < x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② \text{原式左边} &= \int_0^x f(t) dt - xf(x) = \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f(x) dt \\ &= \int_0^x [f(t) - f(x)] dt \leq 0 \quad (\text{因为 } f(x) \text{ 单调增}) \end{aligned}$$

注意: 比较以上两种解法, 值得回味的是: 方法①的关键是用积分中值定理  $\int_0^x f(t) dt = xf(c)$ . 方法②的关键是  $xf(x) = \int_0^x f(x) dt$ , 这种变形是求解中的常用技巧.

**【例 4】**  $f(0) = 0$ ,  $\forall x \in [0, +\infty)$  有  $f'(x)$  单调增,  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ . 证明:  $g(x)$  单调增,  $\forall x \in (0, +\infty)$ .

分析: 关键技巧是利用  $f(0) = 0$  的条件, 对  $f(x)$  用拉格朗日中值定理  $\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c) \Rightarrow f(x) = xf'(c)$ .

证明: 由  $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ , 为了考虑分子  $= xf'(x) - f(x)$  的正负性, 对  $f(x)$  在  $[0, x]$  上用拉格朗日中值定理得:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c) \quad (0 < c < x)$$

故  $f(x) = xf'(c) < xf'(x) \Rightarrow$  分子  $= xf'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow g(x)$  单调增.