北京市高中数学补充教材

应用性问题

SHUXUE

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心　编

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

北京市高中数学补充教材

应用性问题

SHUXUE

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心　编

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

北京市高中数学补充教材
YINGYONGXING WENTI
应用性问题
北京教育科学研究院基础教育教学研究中心　编

首都师范大学出版社出版发行
地　址　北京西三环北路 105 号
邮　编　100037
电　话　68418523（总编室）　68982468（发行部）
网　址　www. cnup. cnu. cn
E-mail　cnup@mail. cnu. edu. cn
北京飞达印刷有限责任公司印刷
全国新华书店发行
版　次　2006 年 6 月第 1 版
印　次　2006 年 6 月第 1 次印刷
开　本　890×1240mm　1/32
印　张　3. 75
字　数　80 千
定　价　4. 60 元

前　言

高中数学是普通高中的一门主要课程，应使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习所必需的基础知识、基本技能、基本思想和方法，培养实践能力和创新精神.

为全面提高我市高中数学学科的教学质量，全面推进素质教育，经北京市教委领导批准，北京教科院基教研中心中学数学教研室组织编写了这套高中数学补充教材，供高中数学教师和学生在教与学时参考使用.

这套补充教材力求体现课程改革的精神和要求，以《全日制普通高级中学数学教学大纲》为依据，针对高中数学的重点或难点章节及专题选编内容，既注重知识的系统性、深刻性，又加强了选择性，并适当充实了一些必要的内容，以体现高考改革的要求. 教师可根据学生的实际情况和教学需要，在必修课、选修课或课外活动中选择使用.

《北京市高中数学补充教材》主编曹福海，副主编郭立昌、刘美伦.《应用性问题》一册的编者有：王建民、储瑞年、薛川坪、刘美伦（兼统稿）.

在编写过程中，我们进行了多次研究讨论，吸收了许多教师宝贵的教学经验，力求既有利于教师教，又有利于学生学. 由于我们水平有限，定会有许多不足之处，衷心期望使用本册教材的教师与学生提出宝贵意见.

编　者

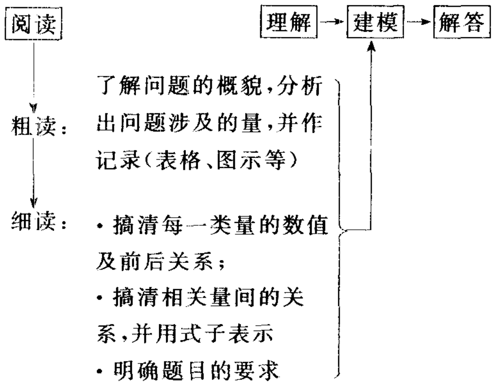
2003 年 3 月

目　　录

引　　言

数学应用问题的解题过程基本上包括：阅读、理解、建模（转化为纯数学问题）、解答等阶段。其中阅读、理解阶段中，科学的思想方法和工作方法是矛盾的主要方面；建模、解答阶段中，数学的基础知识、基本方法理解和掌握的程度是矛盾的主要方面．

对于综合性较强的应用问题，阅读可以分粗读和细读两个阶段，每个阶段的目的不同．下面的框图给出了阅读、理解阶段的技术路线．



例题　某地区现有耕地 10 000 公顷[①]，计划 10 年后粮食单产比现在增加 22%，人均粮食占有量比现在提高 10%．如果人口年增长率为 1%，那么耕地平均每年至多允许减少多少公顷（精确到 1

---

① 1 公顷＝10 000 平方米．

公顷)?

粗读后，了解到某地区的现有土地今后每年要减少一部分，而人口逐年增加．为了达到改善生活，奔向小康的目的，只有在今后(10 年内)提高粮食单产，最终落实到提高人均粮食占有量的目标上．本题涉及耕地、人口、粮食单产、人均粮食占有量等 4 个量，时间跨度为从现在到 10 年后，于是记录为下表：

	耕地	人口	粮食单产	人均粮食占有量
现在				
10 年后				

细读：

(1)耕地.

只读题目中“某地区现有耕地 10 000 公顷”及“耕地平均每年至多允许减少多少公顷”.

设每年至多减少 x 公顷，则 10 年减少 $10x$ 公顷，10 年后有耕地 10^4-10x(公顷)，记录在表格的第 2 列．

(2)人口．

只读题目中“人口年增长率为 1%”这一句话，然后思考：若现在人口为 A，则 10 年后人口为多少?

由首项为 $A(1+1\%)$，公比为 $q=1+1\%$ 的等比数列通项公式知，10 年后人口数为 $A\cdot(1+1\%)^{10}$，记录在表格的第 3 列．

(3)粮食单产．

只读题目中“计划 10 年后粮食单产比现在增加 22%”这一句话，然后思考：如果现在粮食单产为 M(吨/公顷)，那么 10 年后粮食单产是多少？易知为 $M(1+22\%)$，记录在表格的第 4 列．

(4)人均粮食占有量．

应当知道：人均粮食占有量$=\dfrac{\text{粮食总产量}}{\text{人　口}}$

$$=\frac{\text{粮食单产}\times\text{土地数}}{\text{人　口}}$$

于是，现在人均粮食占有量为$\frac{10^4\cdot M}{A}$，

10 年后，人均粮食占有量为$\frac{(10^4-10x)\cdot M\cdot(1+22\%)}{A(1+1\%)^{10}}$.

把这些填写在表格的第 5 列.

(5)题目要求是什么?

只读题目中 10 年后“人均粮食占有量比现在提高 10%”这一句话，就会有

$$\frac{(10^4-10x)\cdot M\cdot(1+22\%)}{A\cdot(1+1\%)^{10}}\geqslant\frac{10^4\cdot M\cdot(1+10\%)}{A}.$$

于是本题实际上是解上述关于 x 的不等式.

经过上述工作，有

	耕地	人口	粮食单产	人均粮食占有量
现在	10^4(公顷)	A	M(吨/公顷)	$\frac{10^4\cdot M}{A}$
10 年后	10^4-10x (公顷)	$A(1+1\%)^{10}$	$M(1+22\%)$ (吨/公顷)	$\frac{(10^4-10x)\cdot M\cdot(1+22\%)}{A(1+1\%)^{10}}$

解: x 是平均每年土地最多减少的数值(公顷)，

依题意有

$$\frac{(10^4-10x)\cdot M\cdot(1+22\%)}{A(1+1\%)^{10}}\geqslant\frac{10^4\cdot M\cdot(1+10\%)}{A}(A>0,\ M>0)$$

解之，得

$$x\leqslant\frac{10^3\cdot[1.22-1.1\times(1+0.01)^{10}]}{1.22},$$

其中，$(1+0.01)^{10}\approx1+10\times0.01+\frac{1}{2}\times10\times9\times0.01^2=1.1045$

$$1.1\times1.1045\approx1.215$$

$$10^3\cdot(1.22-1.215)=10^3\times0.005=5$$

$$\frac{5}{1.22}\approx4.098,$$

故 $x\leqslant4$(公顷).

答：土地每年减少的数目不得超过 4 公顷.

第一章　构建函数、不等式模型求解的应用问题

一个数学应用问题中，如果涉及的变量是连续型变量，一般要归结为函数模型去解决．在问题解决过程中，涉及函数的知识和方法(定义域、图像、单调性等)．如果实际问题涉及的是等量关系，通常归结为方程问题．若处理的是量与量之间的不等关系则归结为不等式问题．

例 1　某报刊销售点从报社买进某报的价格是每份 0.35 元，卖出价格是每份 0.50 元，卖不掉的报纸可以每份 0.08 元的价格退回报社．每月以 30 天计，其中有 20 天每天可卖该报 400 份，其余的 10 天，每天只能卖出 250 份．如果报社要求每天购进报纸的数量相同，则应每天从报社买进多少份，才能使每月所获的利润最大？并求最大利润的具体值．

解： 设每天从报社购进报纸 x 份，月总利润为 y 元．

由于每天至少能卖出 250 份，因此 $x<250$ 时，总利润比 $x=250$ 时小；但 $x>400$ 时，卖不掉的报纸比 $x=400$ 时要多，也会影响总利润，因此，$x\in[250, 400]$.

$$\begin{aligned}y&=0.15\cdot x\cdot 20+0.15\cdot 250\cdot 10-0.27\cdot(x-250)\cdot 10\\&=3x+375-2.7x+675.\end{aligned}$$

故　$y=0.3x+1\ 050$，$x\in[250, 400]$.

由于该函数为增函数，所以 $x=400$ 时，y 最大，且最大值为 1 170 元．

答：每天购进 400 份报纸，月利润最大，最大值为 1 170 元．

例 2　某公司为帮助尚有 26.8 万元无息贷款没有偿还的残疾

人商店，借出 20 万元将该店改建为经营状况良好的某种消费品专卖店，并约定用该店经营利润逐步偿还债务（不计息）．已知该种消费品的进价为每件 40 元，该店每月销售量 q（百件）与销售价 p（元/件）的关系用图 1-1 中的一条折线表示．职工每人每月工资 600 元，该店应交付的其他费用每月 13 200 元．

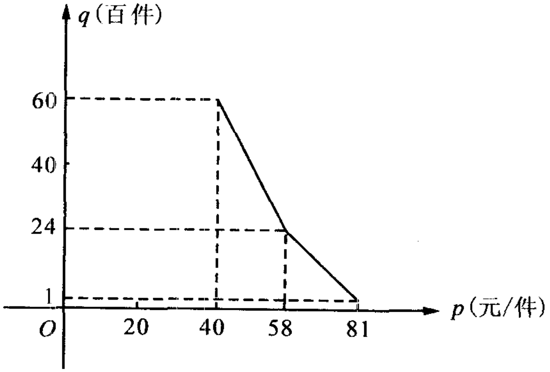


图 1-1

(1)如果当售价 $p=52$（元/件）时，该店正好收支平衡，求该店职工人数；

(2)若该店只安排 40 名职工，则该店最早可在几年后还清债务？此时每件消费品价格定为多少元？

解：债务：$26.8+20=46.8$（万元）．

每月支出：购货　$40\times100\times q$（元），

工资　$600\cdot x$（元）（设 x 为职工人数），

其他　13 200（元）．

每月收入：$p\cdot q\cdot 100$（元）．

每月利润：$y=(p-40)\cdot q\cdot 100-600x-13\ 200$（元）．

(1)设 $q=ap+b$，则

$$40\leqslant p\leqslant 58\text{ 时：}\begin{cases}40a+b=60\\58a+b=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2,\\b=140;\end{cases}$$

$$58\leqslant p\leqslant 81\text{ 时：}\begin{cases}58a+b=24\\81a+b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1,\\b=82;\end{cases}$$

$\therefore \quad q=\begin{cases}-2p+140, & 40\leqslant p\leqslant 58,\\ -p+82, & 58\leqslant p\leqslant 81.\end{cases}$

于是 $y=(52-40)\times 100\times(-2\times 52+140)-600x-13\ 200.$

令 $y=0$，解之，得 $x=50.$

答：售价 52(元/件)时，收支平衡，此时店内职工人数为 50 人.

(2)当 $x=40$ 时，

$$y=\begin{cases}(-2p+140)(p-40)\cdot 100-24\ 000-13\ 200, & 40\leqslant p\leqslant 58,\\ (-p+82)\cdot(p-40)\times 100-24\ 000-13\ 200, & 58\leqslant p\leqslant 81.\end{cases}$$

当 $40\leqslant p\leqslant 58$ 时，$y=-200(p-70)(p-40)-37\ 200$，

故 $p=\dfrac{70+40}{2}=55$ 时，y 最大，且 $y_{max}=7\ 800$ 元；

当 $58\leqslant p\leqslant 81$ 时，$y=-100(p-82)(p-40)-37\ 200$，

故 $p=\dfrac{82+40}{2}=61$ 时，y 最大，且 $y_{max}=6\ 900$ 元.

比较知，$p=55$ 时，月利润最大为 7 800 元，每年利润为 $12\times 7\ 800=93\ 600$(元)$=9.36$(万元).

$$\frac{46.8}{9.36}=5.$$

故 5 年后可以还清债务，此时定价为 55 元/件.

例 3 某中学在自愿的条件下，为学生办理了“医疗保险”. 保险公司的赔付方案是：

被保人医疗费用	保险金给付比例
1 000 元及以下部分	55%
1 000 元以上至 4 000 元部分	60%
4 000 元以上至 7 000 元部分	70%
7 000 元以上至 10 000 元部分	80%
10 000 元以上至 30 000 元部分	90%
30 000 元以上部分	95%

在保险期间，被保险人按上述标准累计自付金额超过 6 000 元部分，保险公司按 100％的标准给付．

(1)某同学因病住院，为此父母共付医疗费 3 000 元，问：保险公司为该同学付了多少保险金？

(2)设被保人医疗总费用为 x(元)，自己负担部分为 y(元)，求函数 $y=f(x)$的解析式，这里 $0<x\leqslant 30\ 000$(单位：元)．

解：(1)从保险金给付比例看，前三个档次的平均数在 60％以上．由于自付 3 000 元，估计医疗费用超过 7 000 元，但不会超过 10 000 元．

设医疗费用为 x 元，$7\ 000<x<10\ 000$，

则　$1\ 000\times(1-55\%)+3\ 000\times(1-60\%)+3\ 000\times(1-70\%)+(x-7\ 000)\times(1-80\%)=3\ 000.$

解之，得　$x=9\ 250$，

$$9\ 250-3\ 000=6\ 250(\text{元}).$$

答：保险公司为该同学付了 6 250 元．

(2)当 $x\leqslant 1\ 000$ 时：$y=x\cdot(1-55\%)=0.45x$；

当 $1\ 000<x\leqslant 4\ 000$ 时，

$$y=1\ 000\times(1-55\%)+(x-1\ 000)\times(1-60\%),$$

即　$y=0.4x+50$；

当　$4\ 000<x\leqslant 7\ 000$ 时，$y=1\ 000\times(1-55\%)+3\ 000\times(1-60\%)+(x-4\ 000)\times(1-70\%)$，

即　$y=0.3x+450$；

当 $7\ 000<x\leqslant 10\ 000$ 时，

$y=1\ 000\times(1-55\%)+3\ 000\times(1-60\%)+3\ 000\times(1-70\%)+(x-7\ 000)\times(1-80\%)$，

即　$y=0.2x+1\ 150$；

当　$10\ 000<x\leqslant 30\ 000$ 时，

$y=1\ 000\times(1-55\%)+3\ 000\times(1-60\%)+3\ 000\times(1-70\%)+3\ 000\times(1-80\%)+(x-10\ 000)\times(1-90\%)$，

即　$y=0.1x+2\ 150.$

综合上述结果，得

$$y=\begin{cases}0.45x, & 0<x\leqslant 1\,000,\\ 0.4x+50, & 1\,000<x\leqslant 4\,000,\\ 0.3x+450, & 4\,000<x\leqslant 7\,000,\\ 0.2x+1\,150, & 7\,000<x\leqslant 10\,000,\\ 0.1x+2\,150, & 10\,000<x\leqslant 30\,000.\end{cases}$$

例 4 在经济学中，函数 $f(x)$ 的边际函数 $Mf(x)$ 定义为：$Mf(x)=f(x+1)-f(x)$. 某公司每月最多生产 100 台报警装置，生产 x 台的收入函数为 $R(x)=3\,000x-20x^2$（单位：元），其成本函数为 $C(x)=500x+4\,000$（单位：元），利润是收入与成本之差.

(1)求利润函数 $P(x)$ 及边际利润函数 $MP(x)$；

(2)利润函数 $P(x)$ 与边际利润函数 $MP(x)$ 是否具有相同的最大值？

(3)你认为本题中边际利润函数 $MP(x)$ 取最大值的实际意义是什么？函数 $MP(x)$ 的单调性及零点的实际意义是什么？

解：(1)
$$\begin{aligned}P(x)&=R(x)-C(x)\\&=3\,000x-20x^2-500x-4\,000\\&=-20x^2+2\,500x-4\,000.\end{aligned}$$

$\therefore\quad P(x)=-20(x-62.5)^2+74\,125(0\leqslant x\leqslant 100,$ 且 $x\in\mathbf{Z})$.

$$\begin{aligned}MP(x)&=P(x+1)-P(x)\\&=-20(x+1)^2+2\,500(x+1)+20x^2-2\,500x\\&=-40x+2\,480(0\leqslant x\leqslant 100,\ \text{且}\ x\in\mathbf{Z}).\end{aligned}$$

(2)由于 $x\in\mathbf{Z}$，所以 $x=62$ 或 63，$P(x)$ 取得相同的最大值，

由于 $MP(62)=0$，$MP(63)=-40$，

所以 $x=62$ 时，$P(x)$ 取最大值 74 120.

而 $x=0$ 时，$MP(x)$ 取最大值 2 480，

故 $P(x)$ 与 $MP(x)$ 没有相同的最大值.

(3)$MP(x)$ 的最大值在 $x=0$ 处取得，这说明当生产的台数由 0 增加到 1 时，所获利润差最大；$MP(x)$ 是减函数，说明随着产量的增加，产量每增加 1 台，所获利润在逐渐减少.

当 $x=62$ 时，$MP(62)=0$，62 是 $MP(x)$ 的零点，说明当生产到 62 台时，利润的正向积累结束，若再多生产一台利润反而要减

少.

例 5 某地区地理位置偏僻，严重制约经济发展，某种土特产品只能在本地销售，该地区政府每投资 x 万元，所获利润为 $P=-\frac{1}{160}(x-40)^2+10$ 万元．为顺应开发大西北的宏伟决策，该地区政府在制定经济发展十年规划时，拟开发此种土特产品，而开发前后用于该项目投资的专项财政拨款每年都是 60 万元．若开发该产品，必须在前 5 年中，每年从 60 万元专款中拿出 30 万元投资修通一条公路，且 5 年可以修通．公路修通后该土特产品在异地销售，每投资 x 万元，可获利润 $Q=-\frac{159}{160}(60-x)^2+\frac{119}{2}(60-x)$ 万元. 问从十年的总利润来看，该项目有无开发价值?

解：(1)若按原来投资环境不变，

由 $P=-\frac{1}{160}(x-40)^2+10$ 知，当 $x=40$ 时，$P_{\max}=10$.

即每年只需从 60 万元专款中拿出 40 万元投资，可获最大利润 10 万元．这样十年总利润最大值为 $W=10\times10=100$(万元).

(2)若对该产品开发，

前 5 年每年可用于对该产品的投资只有 30 万元，而 $P=-\frac{1}{160}(x-40)^2+10$ 在 $(0,30]$ 上递增．

∴ 当 $x=30$ 时，P 的最大值为 $P_{\max}=\frac{75}{8}$. 前 5 年总利润：$W_{1,\max}=\frac{75}{8}\times5=\frac{375}{8}$(万元). 设后 5 年，每年 x 万元用于本地销售投资，$60-x$ 万元用于异地销售投资．则总利润

$$W_2=\left[-\frac{1}{160}(x-40)^2+10\right]\times5+\left[-\frac{159}{160}x^2+\frac{119}{2}x\right]\times5$$
$$=5[-(x-30)^2+900],$$

当 $x=30$ 时，$W_{2,\max}=4\ 500$.

∴ 十年总利润最大值为 $W_{1,\max}+W_{2,\max}=\frac{375}{8}+4\ 500$(万元).

而 $\frac{375}{8}+4\ 500>100$. 故该项目具有极大的开发价值．

例 6 在无水垢的新铝锅内装入定量的冷水，置于燃气灶上分别用不同大小的火焰将其加热至沸腾(因火焰大小不宜测量，利用燃气灶上的旋钮刻度代指，从点火线至最大线共有四格，分别取旋钮正指 5，4，3，2 刻度时测量，火焰大小与刻度大小成正比)，并记录下每次所需时间和耗气量(为减小误差，每次加热至沸腾后都用水将锅冷却至室温)，现得到旋钮所指刻度、起止时间和耗气量三者之间的关系数据如下表.

燃气统计表

旋钮所指刻度	起止时间		燃气表读数(m^3)	
	始	终	始	终
5	0	8′07.60″	7.266	7.310
4	0	8′39.82″	7.310	7.347
3	0	9′54.35″	7.347	7.390
2	0	12′13.22″	7.390	7.451

(1)试将上述实验数据整理后填入下表：

旋钮所指刻度	耗气量(单位：L)	时间(单位：s)

(2)若耗气量 y 与旋钮刻度 x 间的模拟函数可以选用二次函数或函数 $y=a\cdot b^x+c$(其中 a，b，c 为常数). 请问用刻度值为 3～5 来求模拟函数时，用以上哪个函数作为模拟函数更准确？并说明理由.

(3)由选用的模拟函数计算出最节约燃气点，并用现有的知识作简要的理论分析.

解：(1)见下表内数据：

旋钮所指刻度	耗气量（单位：L）	时间（单位：s）
5	44	487.60
4	37	519.82
3	43	594.35
2	61	733.22

(2)设 $y_1=f(x)=px^2+qx+r$(其中 p，q，r 为常数)，将(3，43)，(4，37)，(5，44)三个点的坐标代入上述解析式，则有

$$\begin{cases}3^2\cdot p+3q+r=43,\\4^2\cdot p+4q+r=37,\\5^2\cdot p+5q+r=44.\end{cases}$$

解得　$p=\frac{13}{2}$，$q=-\frac{103}{2}$，$r=139$.

$\therefore$　$y_1=f(x)=\frac{13}{2}x^2-\frac{103}{2}x+139$.

将 $x=2$ 代入，得

$$f(2)=\frac{13}{2}\times4-\frac{103}{2}\times2+139=62. \quad ①$$

再设 $y_2=g(x)=a\cdot b^x+c$，将(3，43)，(4，37)，(5，44)三个点的坐标代入，得

$$\begin{cases}ab^3+c=43,\\ab^4+c=37,\\ab^5+c=44.\end{cases}$$

解得　$a=-\frac{7\,776}{4\,459}$，$b=-\frac{7}{6}$，$c=\frac{523}{13}$.

$\therefore$　$y_2=g(x)=-\frac{7\,776}{4\,459}\cdot\left(-\frac{7}{6}\right)^x+\frac{523}{13}$.

将 $x=2$ 代入得

$$g(2)=-\frac{7\,776}{4\,459}\times\left(-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{523}{13}=37\frac{78}{91}.$$

经比较①、②可知 $f(2)$ 的结果比 $g(2)$ 更接近于实验结果，故选用 $y=\frac{13}{2}x^2-\frac{103}{2}x+139$ 作为模拟函数更确切.

(3)利用二次函数知识，寻找 y 的最小值.

$$y=\frac{13}{2}x^2-\frac{103}{2}x+139=\frac{13}{2}\left(x-\frac{103}{26}\right)^2+36\frac{103}{104}.$$

由此可知，此抛物线顶点为 $\left(3\frac{25}{26}, 36\frac{103}{104}\right)$，即当旋钮指至 $3\frac{25}{26}$ 刻度时，最节省燃气，其耗气量仅为 $36\frac{103}{104}$，此点极其接近 $(4, 37)$ 点.

由实验可知，火焰越大，耗用的时间也就越少，但这并不与热率成正比. 当火焰太大时，喷出的大量燃气不能与空气充分接触，燃烧并不充分；而火焰过小时，炉下不能维持较高温度，外部冷空气将带走它的相当一部分热量，散热太快. 只有使用中等偏大的火焰时，燃烧才充分且热量不易散失，最节约燃气.

例 7 某蔬菜基地种植西红柿，由历年市场行情知，从 2 月 1 日起的 300 天内，西红柿市场售价与上市时间的关系用图 1-2(1) 的一条折线表示；西红柿的种植成本与上市时间的关系用图 1-2(2) 的抛物线表示.

(1)写出图 1-2(1) 表示的市场售价与时间的函数关系式 $P=f(t)$；

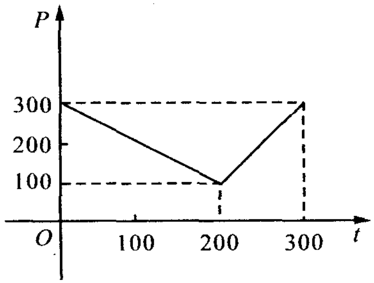


图 1-2(1)

(2)写出图 1-2(2) 表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=$