

书 名 新课堂同步学习与探究·高中数学(理科 高三二轮复习用书)

作 者 青岛市普通教育教研室

出版发行 青岛出版社

社 址 青岛市徐州路 77 号(266071)

本社网址 <http://www.qdpub.com>

邮购电话 13335059110 (0532)80998710(传真) (0532)80998664

责任编辑 都 兰 电话 (0532)80998611 E-mail:imue92@126.com

封面设计 云 光

照 排 山东水务印务有限公司

印 刷

出版日期 2011 年 1 月第 24 版 2011 年 1 月第 36 次印刷

开 本 16 开(787mm×1092mm)

印 张 24.75

字 数 350 千

书 号 ISBN 978-7-5436-1361-4

定 价 24.30 元

编校质量、盗版监督免费服务电话 8009186216

青岛版图书售出后如发现印装质量问题,请寄回青岛出版社印刷物资处调换。

电话 (0532)80998826

《新课堂同步学习与探究》丛书
编委会

主 编 王旭昌
副 主 编 逢淑萍 于元宝
编 委 (排名不分先后)
周宏锐 庄志刚 田教修 刘 林
赵玉玲 张玉坤 李 一 陆 安
王志先 姜亚奥 刘同光 张 军
董宝明 王永刚 纪玉涛 王开栋
李 文

本 册 主 编 庄志刚
本册副主编 李金星 王秀奎
本 册 编 委 姜 波 刘红升 赵建华 赵培军
邱梅珍 郝玉红 李德昌

写给高三学生的话

亲爱的同学：

当你拿到这本书的时候，已经完成了高三一轮复习。我们想通过这套《新课堂同步学习与探究丛书》（高三二轮复习用书）来巩固一轮复习的成果，更想通过本书使你运用知识分析问题和解决问题的能力有一个质的飞跃。

新课改下的高考，注重考查考生的知识与能力、过程与方法、“情感、态度与价值观”。新课程改革以“关注学生作为‘整体的人’的发展、回归学生的生活世界、寻求个人理解的知识建构、创建富有个性化的学校文化”为基本理念，培养学生健全的个性和完整的人格。为此，我们的学习也应发生转变，不只是注重知识的理解，还要学会在学习中发现问题、提出问题、进而提高解决问题的能力。在本丛书的编写过程中，我们把对新课改的理解融入题目的编写中。

本丛书只包括高考中的政治、语文、英语、数学、物理、化学、历史、地理、生物。

一、复习的特点

在二轮复习中，我们要认真研究教育部考试中心的《考试大纲》和山东省《考试大纲的说明》。《考试大纲》和《考试大纲的说明》既是高考命题的依据，也是复习的依据。

高考复习包含学习内容、学习时间、复习策略和复习目标4个方面。第二轮复习应坚持以下几种做法：

1. 构建知识网络体系。

在一轮细致复习的基础上，达到定量的知识积累和丰富的感性认识积累。理清相关知识的内在联系，自主构建知识网络体系，使学科知识能够达到“提起一根线，带出一大片”的程度。

2. 揭示规律，掌握方法，培养能力。

对已有的知识能解读问题情境，引入方法分析，以思维为主线，站在理性的高度俯视基础知识，产生“一览众山小”的体验。在此基础上能掌握各种题型的命题规律及解题思路、步骤和方法；能进行规范表达，提高解题能力。

3. 专题复习及学科内综合训练相结合。

以学科内专题复习为主，与一轮复习形成纵横交错的复习网络。复习过程中，既要重视专题训练，又应适时定时穿插综合训练。注意知识的前勾后连及学科内的综合运用。二轮复习应该完成各个考点的突破，扎实地掌握各考点的知识，并在此基础上提高本考点的学科能力。训练的内容严格控制在中学《课程标准》的范围和《考试大纲》的范围。训练的能力和要求的控制控制在《考试大纲》中规定的能力层次。训练题目的难度适中。

二、本册书的特点

本书的编写原则是实用、高效、针对性强。根据高三二轮复习,教师设置了以下几个主要栏目:

[知识网络]包括各考点的基础知识和基本技能,目的是使学生形成知识网络;

[命题趋势及解题策略]分析这几年的命题趋势,主要就解题规律、解题方法进行分析指导;

[方法指导与能力训练]精选各考点的显示不同层次的训练题及综合测试题目,包括经典考题展示、典型例题分析、能力提高等小栏目;

[高考常见失分原因剖析及应对策略]分析高考中各类问题的失分原因,找出正确的解决方向 and 对策,避免出错;

[高考预测]针对各专题的知识点在近几年高考中考查的情况,通过对 2011 年高考形势的分析,预测 2011 年高考可能涉及的主要知识点与解题方法,以具体问题的形式展示出来,供大家参考。

本书还为大家提供了三种常见题型的解题策略和六套模拟试题,供大家选择使用。

三、学习使用建议

你在使用本套丛书时,可根据自己的学习实际,科学合理地制订学习计划,在教师的指导下,有效地进行学习并及时完成任务,最好能与学校教学复习进度保持同步,以使知识的掌握和能力培养得到巩固和提高。要打好基础,善于积累,加强阅读,注重感悟。要勤动手,多联想,重应用,对自己的学习经常进行反思和总结,以提高学习效率和学习效果。

为了配合新课程改革的稳步推行,为了让我们能更好地进行高三二轮复习,我们聘请了我市部分优秀骨干教师和教研员,在认真研究教育部考试中心的《考试大纲》和山东省《考试大纲的说明》的基础上,结合我市积累的二轮复习的丰富经验,编写了本丛书。

本丛书在编写过程中,得到有关领导、广大教师和同学们的支持和帮助。在此,我们表示衷心感谢,并恳请专家、教师和同学们批评指正。

恳请你在使用本书后,提出你的意见和建议,贡献你的智慧,让我们共同交流和分享,并不断完善复习丛书。一旦你的意见和建议被采纳,我们将给予一定奖励。

青岛市普通教育教研室
2011 年 1 月



考题一 集合与常用逻辑用语	(1)
专题二 不等式	(10)
专题三 函数与导数	(21)
专题四 数列	(45)
专题五 三角函数	(62)
专题六 平面向量与解析几何	(82)
专题七 空间向量与立体几何	(118)
专题八 计数原理与概率统计	(147)
专题九 算法初步	(170)
专题十 研究性学习	(191)
阅读材料一 选择题、填空题的解法	(209)
阅读材料二 综合题解答策略	(222)
高考模拟试题(一)	(229)
高考模拟试题(二)	(233)
高考模拟试题(三)	(238)
高考模拟试题(四)	(242)
高考模拟试题(五)	(247)
高考模拟试题(六)	(252)
参考答案	(257)

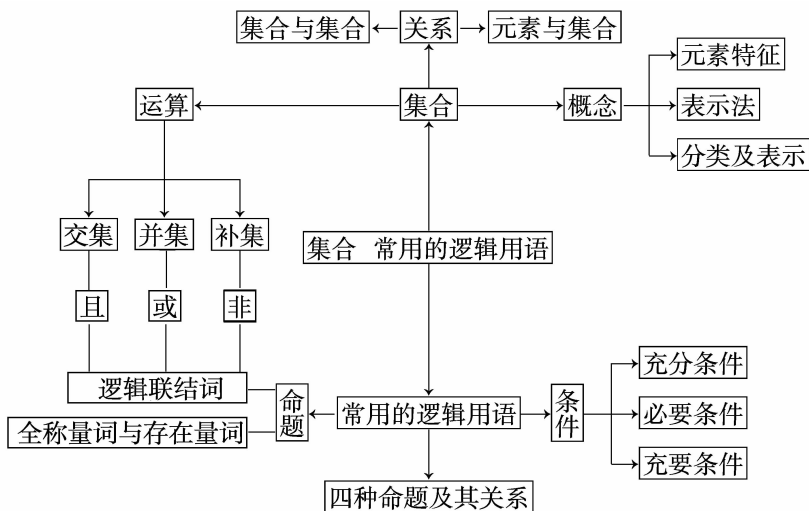


专题一

集合与常用逻辑用语



知识网络



命题趋势及解题策略

“集合与简易逻辑”是高中数学的基础，高考试题多为选择题和填空题，难度为低档或中档。

学习本章知识要掌握集合的语言、符号以及“或”、“且”、“非”逻辑联结词的含义；要准确掌握集合、元素、子集、交集、并集、补集、命题、充要条件等概念；要强化数形结合意识，自觉利用韦恩图、数轴、函数图象帮助解题，提高数学解题中的形象思维能力。函数定义域、值域、方程与不等式的解集、解析几何中曲线间的相交等问题多是集合与其他知识点的糅合，所以要注意数学思想方法的复习，解题时要广泛应用数形结合、逻辑划分、函数方程思想、等价能力思想等，并辅之以配方法、图象法、判别式法等，达到灵活解题的目的。

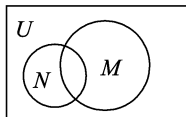


方法指导与能力训练

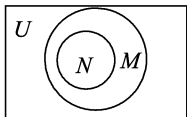


基础题目

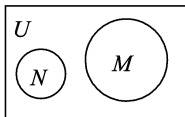
1. (2009 年·广东) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 则正确表示集合 $M = \{-1, 0, 1\}$ 和 $N = \{x | x^2 + x = 0\}$ 关系的韦恩(Venn)图是().



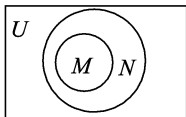
A.



B.



C.



D.

2. (2009 年·北京) 设集合 $A = \{x | -\frac{1}{2} < x < 2\}$, $B = \{x | x^2 \leq 1\}$, 则 $A \cup B = ($).

A. $\{x | -1 \leq x < 2\}$

B. $\{x | -\frac{1}{2} < x \leq 1\}$

C. $\{x | x < 2\}$

D. $\{x | 1 \leq x < 2\}$

3. (2009 年·山东) 集合 $A = \{0, 2, a\}$, $B = \{1, a^2\}$, 若 $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$, 则 a 的值为().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

4. 已知命题 p : 不等式 $|x| + |x-1| > m$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 命题 q : 函数 $f(x) = -(5-2m)^x$ 是减函数, 若 p 或 q 为真命题, p 且 q 为假命题, 则实数 m 的取值范围是_____.

5. 已知 $p: \left|1 - \frac{x-1}{3}\right| \leq 2$, $q: x^2 + 2x + 1 - m^2 \leq 0$ ($m > 0$), 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 求实数 m 的取值范围.



考题展示

已知 p : 方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 有两个不等的负实根; q : 方程 $4x^2 + 4(m-2)x + 1 = 0$ 无实根. 若“ p 或 q ”为真, “ p 且 q ”为假, 求 m 的取值范围.

【思路分析】 首先确定命题 p 和 q 中的 m 的取值范围, 然后根据命题的真假, 求解关于 m 的不等式组.

【解】 $p: \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0, \\ m > 0, \end{cases}$ 解得 $m > 2$.

$q: \Delta = 16(m-2)^2 - 16 = 16(m^2 - 4m + 3) < 0,$

解得 $1 < m < 3$.

$\therefore$ “ p 或 q ”为真,“ p 且 q ”为假,

$\therefore p$ 为真, q 为假,或 p 为假, q 为真.

即 $\begin{cases} m > 2, \\ m \leq 1 \text{ 或 } m \geq 3, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m \leq 2, \\ 1 < m < 3, \end{cases}$

解得 $m \geq 3$, 或 $1 < m \leq 2$.

【点评】 此题是方程与命题的综合题,涉及一元二次不等式(组)及复合命题的真假判定.



典型例题分析

例 1 集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - ax + (a-1) = 0\}$, $C = \{x | x^2 - mx + 2 = 0\}$, 已知 $A \cup B = A$, $A \cap C = C$, 求 a, m 的值.

【思路分析】 由 $A \cup B = A$, $A \cap C = C$ 分别确定集合 B, C 中方程根的情况.

【解】 $\because A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$. B 中必有元素 1 (注意该二次方程系数和为 0).

又 $\because A \cup B = A, \therefore B \subseteq A$, 这时 B 有两种可能:

$B = \{1\}$ 或 $B = \{1, 2\}$.

若 $B = \{1\}$, 则 B 中的方程有两个相等的根, $\Delta = a^2 - 4(a-1) = 0, \therefore a = 2$.

若 $B = \{1, 2\}$, 则由韦达定理, 有 $a - 1 = 2, \therefore a = 3$.

又 $\because A \cap C = C, \therefore C \subseteq A$, 因此集合 C 有三种可能:

① $C = A$, 此时 $m = 3$;

② $C = \{1\}, C = \{2\}$,

将 $x = 1, x = 2$ 代入 $x^2 - mx + 2 = 0$, 得 $m = 3$,

又此时方程有两个相等的实根, $\Delta = 0$,

得 $m = \pm 2\sqrt{2}$, 故矛盾;

③ $C = \emptyset, \Delta = m^2 - 8 < 0, -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

综上所述, a 的值为 2 或 3.

$m = 3$ 或 $m \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

【点评】 解答本题的关键:一是确定解题方向,即明确集合 B, C 中元素情况;二是将条件 $A \cup B = A$ 转化为 $B \subseteq A$, 条件 $A \cap C = C$ 转化为 $C \subseteq A$;三是对 B, C 中方程根的情况作分类讨论.

变式训练: 设 $A = \{(x, y) | x = n, y = na + b, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{(x, y) | x = m, y = 3m^2 + 15, m \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 144\}$, 问是否存在实数 a 和 b 使得① $A \cap B \neq \emptyset$; ② $(a, b) \in C$ 同时成立.

例2 已知关于 x 的方程 $(1-a)x^2 + (a+2)x - 4 = 0, a \in \mathbf{R}$, 求方程有两个正根的充要条件.

【思路分析】 关于 x 的方程 $(1-a)x^2 + (a+2)x - 4 = 0$ 有两个正根的充要条件是

$$\begin{cases} 1-a \neq 0, \\ \Delta \geq 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0. \end{cases} \text{ 转化为关于 } a \text{ 的不等式组, 然后求解.}$$

【解】 关于 x 的方程 $(1-a)x^2 + (a+2)x - 4 = 0$ 有两个正根的充要条件是

$$\begin{cases} 1-a \neq 0, \\ \Delta = (a+2)^2 + 16(1-a) \geq 0, \\ -\frac{a+2}{1-a} > 0, \\ \frac{-4}{1-a} > 0. \end{cases}$$

解不等式组, 得 $1 < a \leq 2$ 或 $a \geq 10$.

所以, 关于 x 的方程 $(1-a)x^2 + (a+2)x - 4 = 0$ 有两个正根的充要条件是 $a \in (1, 2] \cup [10, +\infty)$.

【点评】 此题易有两种错误: ① 少了“ $1-a \neq 0$ ”的条件; ② 判别式少了“等于零”的情况.

变式训练: 求使 3 个关于 x 的方程 $ax^2 + 2bx + c = 0, bx^2 + 2cx + a = 0, cx^2 + 2ax + b = 0$ 中至少有一个方程有相异实根的充要条件. (a, b, c 为非零实数.)

例3 已知集合 $M = \{x \mid |x-a| < 1\}, N = \{x \mid x^2 - (a+3)x + 3a > 0\}, a \in \mathbf{R}$, 若 $M \cup N = \mathbf{R}$, 求 a 的值.

【思路分析】 首先解绝对值不等式、一元二次不等式简化集合, 再由 $M \cup N = \mathbf{R}$, 建立字母 a 的关系来求解.

【解】 解 $|x-a| < 1$, 得 $a-1 < x < a+1$,

$$\therefore M = \{x \mid a-1 < x < a+1\}.$$

由 $x^2 - (a+3)x + 3a > 0$, 得 $(x-3)(x-a) > 0 \cdots \cdots (*)$,

当 $a=3$ 时, 有 $(x-3)^2 > 0$, $\therefore x \neq 3$,

即 $N = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 3\}$,

$M = \{x \mid 2 < x < 4\}$, 则 $M \cup N = \mathbf{R}$, $\therefore a=3$ 适合.

当 $a > 3$ 时, 由不等式 $(*)$, 得 $x < 3$ 或 $x > a$.

$$\text{又 } M \cup N = \mathbf{R}, \therefore \begin{cases} a-1 < 3, \\ a+1 > a, \end{cases} \therefore 3 < a < 4.$$

当 $a < 3$ 时, 由不等式 $(*)$, 得 $x < a$ 或 $x > 3$,

又 $M \cup N = \mathbf{R}$, $\therefore \begin{cases} a-1 < a, \\ a+1 > 3, \end{cases} \therefore 2 < a < 3.$

综上, a 的取值范围是 $a \in (2, 4)$.

【点评】 (1) 解含绝对值的不等式:

思想: 去掉绝对值符号.

方法: ① 依据绝对值的意义: $|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0), \\ -x & (x < 0). \end{cases}$

② 利用不等式的性质转化为基本型 $|x| < c$ 或 $|x| > c (c > 0)$ 来解.

③ “零点分段法”: 设数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 分别使含有 $|x - x_1|, |x - x_2|, \dots, |x - x_n|$ 的代数式中相应的一个绝对值为零, 称 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为相应绝对值的零点, 零点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 将数轴分为 $n+1$ 段, 利用绝对值的意义化去绝对值符号, 从而得到代数式在各段上的简化式, 进而化为不含绝对值的不等式组来解.

④ 平方法: 此种方法适用于两边均为正数的不等式.

(2) 解一元二次不等式:

① 一元二次不等式总可化为 $ax^2 + bx + c > 0 (\geq 0) (a > 0)$ 或 $ax^2 + bx + c < 0 (\leq 0) (a > 0)$ 的形式.

② 运用函数的观点, 一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集, 就是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在 x 轴上方部分的点的横坐标 x 的集合, 而讨论方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 根的情况很关键.

变式训练: (2008 年 · 天津) 设集合 $S = \{x \mid |x-2| > 3\}$, $T = \{x \mid a < x < a+8\}$, $S \cup T = \mathbf{R}$, 则 a 的取值范围是().

A. $-3 < a < -1$

B. $-3 \leq a \leq -1$

C. $a \leq -3$ 或 $a \geq -1$

D. $a < -3$ 或 $a > -1$



能力提高

一、选择题

1. (2009 年 · 广东) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x \mid -2 \leq x-1 \leq 2\}$ 和 $N = \{x \mid x = 2k-1, k = 1, 2, \dots\}$ 的关系的韦恩(Venn)图如图所示, 则阴影部分所示的集合的元素共有().

A. 3 个

B. 2 个

C. 1 个

D. 无穷多个

2. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x \mid |x-1| \leq 2\}$, 则 $\complement_U M = ()$.

A. $\{x \mid -1 < x < 3\}$

B. $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$

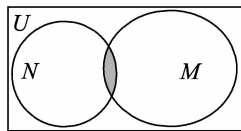
C. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$

D. $\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$

3. (2009 年 · 辽宁) 下列 4 个命题:

$p_1: \exists x \in (0, +\infty), \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $p_2: \exists x \in (0, 1), \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x$;

$p_3: \forall x \in (0, +\infty), \left(\frac{1}{2}\right)^x > \log_{\frac{1}{2}} x$; $p_4: \forall x \in \left(0, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}\right)^x < \log_{\frac{1}{3}} x$.



第 1 题图

其中的真命题是().

A. p_1, p_3 B. p_1, p_4 C. p_2, p_3 D. p_2, p_4

4. (2009年·四川) 设集合 $S = \{x \mid |x| < 5\}$, $T = \{x \mid (x+7)(x-3) < 0\}$, 则 $S \cap T = ($).

A. $\{x \mid -7 < x < -5\}$ B. $\{x \mid 3 < x < 5\}$ C. $\{x \mid -5 < x < 3\}$ D. $\{x \mid -7 < x < 5\}$

5. (2009年·重庆) 命题“若一个数是负数, 则它的平方是正数”的逆命题是().

A. “若一个数是负数, 则它的平方不是正数”

B. “若一个数的平方是正数, 则它是负数”

C. “若一个数不是负数, 则它的平方不是正数”

D. “若一个数的平方不是正数, 则它不是负数”

6. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则“ $a_1 < a_2 < a_3$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 是递增数列”的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

二、填空题

7. (2008年·全国Ⅱ) 平面内的一个四边形为平行四边形的充要条件有多个, 如两组对边分别平行, 类似地写出空间中的一个四棱柱为平行六面体的两个充要条件:

充要条件①: _____; 充要条件②: _____. (写出你认为正确的两个充要条件.)

8. 下列命题:

① 若“ $xy = 1$, 则 x, y 互为倒数”的逆命题;

② “四边相等的四边形是正方形”的否命题;

③ “梯形不是平行四边形”的逆否命题;

④ “若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$ ”的逆命题;

其中真命题是_____.

三、解答题

9. 设集合 $A = \{x \mid |x - a| < 2\}$, $B = \left\{x \mid \frac{2x-1}{x+2} < 1\right\}$, 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

10. 设 P : 关于 x 的不等式 $a^x > 1$ 的解集是 $\{x | x < 0\}$, Q : 函数 $y = \lg(ax^2 - x + a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 如果 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 a 的取值范围.

11. 已知函数 $f(x) = 4x^2 - 2(p-2)x - 2p^2 - p + 1$ 在区间 $[-1, 1]$ 上至少存在一个实数 c , 使 $f(c) > 0$, 求实数 p 的取值范围.

12. 已知函数 $f(x) = x^2 + (a+1)x + \lg|a+2|$ ($a \in \mathbf{R}$, 且 $a \neq -2$).

(1) 若 $f(x)$ 能表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 的和, 求 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的解析式.

(2) 命题 P : 函数 $f(x)$ 在区间 $[(a+1)^2, +\infty)$ 上是增函数;

命题 Q : 函数 $g(x)$ 是减函数.

如果命题 P, Q 有且仅有一个是真命题, 求 a 的取值范围.

(3) 在(2)的条件下, 比较 $f(2)$ 与 $3 - \lg 2$ 的大小.



高考常见失分原因剖析及应对策略

【案例1】 选择题: (1) “至少有1个”的否定为().

A. 有1个 B. 至多有1个 C. 至少有2个 D. 没有

(2) “至多有3个”的否定为().

A. 至少有3个 B. 至少有4个 C. 有3个 D. 有4个

【错解一】 选A、选B.

【受阻分析】 A和B中都有“有1个”的情况, 所以并没把命题的各方面都否定.

【合理构思】 因为, A、B、C中都有“有1个”的情况, 所以并没把命题的各方面都否定, 所以, 选D.

【正确解答】 选D.

【错解二】 选A.

【受阻分析】 因为, A中包括“有3个”的情况, 故错误.

【合理构思】 因为A、C、D中都包括“有3个”的情况,没把“至多有3个”否定,所以均为错误的,而“至少有4个”才完全否定了“至多有3个”,所以,选B.

【正确解答】 选B.

【点评】 “至少”与“至多”互为否定,且具体数字上相差一个,如第(1)小题“至少”否定为“至多”1个变为0个,差“1”,至多零个即没有.又如第(2)小题“至多”否定为“至少”3个变4个相差1个,即至少4个.

【案例2】 设 $A = \{x | x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0\}$, $B = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$, $A \cup B = \{x | x + 2 > 0\}$, $A \cap B = \{x | 1 < x \leq 3\}$, 求 a, b 的值.

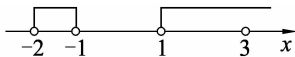
【错解一】 由已知 $x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0$, 得 $(x+2)(x^2-1) > 0$, 故 $A = \{x | -2 < x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$.

$\because A \cap B = \{x | 1 < x \leq 3\}$, $\therefore B \neq \emptyset$.

又 $\because B = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$, 故方程 $x^2 + ax + b = 0$ 必有两个不相等的实数解 x_1, x_2 .

设 $x_1 < x_2$, 有 $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 \cdot x_2 = b$ 且 $A \cap B = \{x | 1 < x \leq 3\}$, 得 $x_2 = 3, x_1 = 1$.

故 $a = -4, b = 3$.



案例2题图

【错解二】 同上解得 $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 \cdot x_2 = b$, 又因为 $A \cup B = \{x | x > -2\}$, 故得 $x_1 = -2$ 且 $A \cap B = \{x | 1 < x \leq 3\}$, 得 $x_2 = 3$, 则 $a = -1, b = -6$.

【受阻分析】 此两解的错因都是思考片面. 应由 $A \cap B$ 得 $x_2 = 3$ 且 $x_1 \geq -1$ 且 $x_1 \leq 1$, 由 $A \cup B$ 得 $x_2 \geq 1$ 且 $x_1 \leq -1$ 得 $x_2 = 3, x_1 = -1$.

【合理构思】 由已知, 得 $A = \{x | -2 < x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$. 因为 $A \cap B = \{x | 1 < x \leq 3\}$, 知 $B \neq \emptyset$, 不妨设方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有两个不相等实根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 那么 $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 \cdot x_2 = b$,

$\because A \cap B = \{x | 1 < x \leq 3\}$ 得 $x_2 = 3, -1 \leq x_1 \leq 1$

又 $\because A \cup B = \{x | x > -2\}$ 得 $x_1 \leq -1$

从而解得 $a = -2, b = -3$.

【正确解答】 满足条件的 $a = -2, b = -3$.



高考预测

1. (2010·全国)已知命题:

$P_1: y = 2^x - 2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 为增函数;

$P_2: y = 2^x + 2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 为增函数.

则在命题 $q_1: P_1 \vee P_2, q_2: P_1 \wedge P_2, q_3: \neg P_1 \vee P_2, q_4: P_1 \wedge \neg P$ 中, 真命题有().

A. q_1, q_3

B. q_1, q_4

C. q_2, q_3

D. q_2, q_4

2. 已知集合 $A = \{y | y^2 - (a^2 + a + 1)y + a(a^2 + 1) > 0\}$,

$$B = \left\{ y \mid y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}, 0 \leq x \leq 3 \right\}.$$

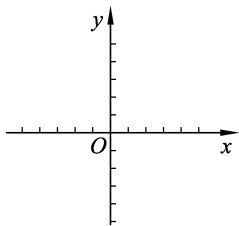
(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围.

(2) 当 a 取使不等式 $x^2 + 1 \geq ax$ 恒成立的 a 的最小值时, 求 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$.

3. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - x - 6 < 0\}$, 集合 $B = \{x \mid x^2 + 2x - 8 > 0\}$, 集合 $C = \{x \mid x^2 - 4ax + 3a^2 < 0\}$, 若 $C \supseteq (A \cap B)$, 试确定实数 a 的取值范围.

4. (1) 画出函数 $y = x^2 - 2x - 3, x \in (-1, 4]$ 的图象.

(2) 讨论: 当 k 为何实数值时, 方程 $x^2 - 2x - 3 - k = 0$ 在 $(-1, 4]$ 上的解集为空集、单元素集、两元素集?

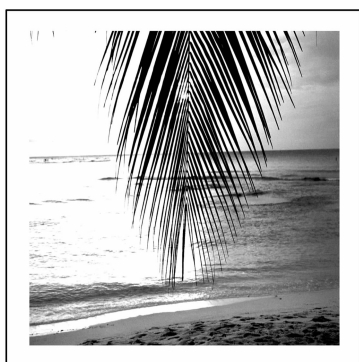


第4题图

5. 设全集 $U = \mathbf{R}$.

(1) 解关于 x 的不等式 $|x - 1| + a - 1 > 0$ ($a \in \mathbf{R}$).

(2) 记 A 为(1)中不等式的解集, 集合 $B = \left\{ x \mid \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \right\}$, 若 $(\complement_U A) \cap B$ 恰有 3 个元素, 求 a 的取值范围.

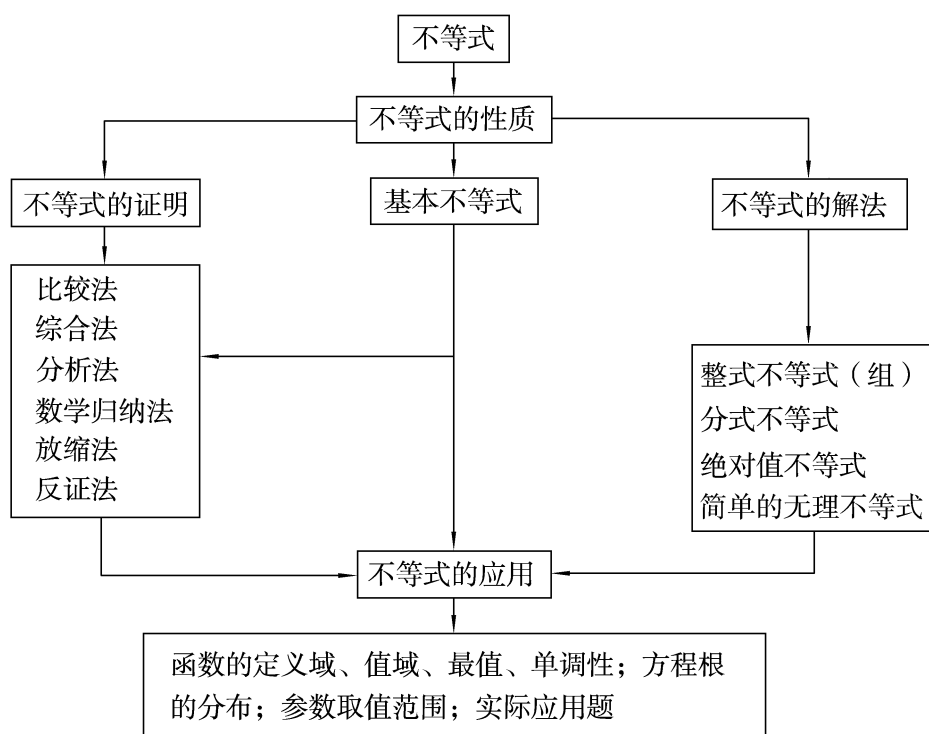


专题二

不等式



知识网络



命题趋势及解题策略

不等式是现实生活中不等关系在数学上的反映,是等式、函数、方程等数学知识的延伸与补充. 不等式在求函数的定义域、值域,研究函数的性质,讨论方程的解以及在现实生活中有广泛而又具体的应用. 不等式一直是高考考查的主要内容之一,在历年高考试题中占有相当的比重. 这些试题不仅测试不等式的基础知识、基本技能,而且着重考查运算能

力、逻辑思维能力以及运用不等式的知识、方法解决函数、数列及现实生活当中问题的能力. 复习中,既要把握以上精髓,又要从新教材及相应的教学大纲改革中,确定复习要求及解答策略. 一些知识点该限则限,该降当降,以便集中精力使不等式的知识更加系统、规范,使不等式体现的数学思想及方法更加清晰、扎实.

从近几年的高考试题及新教材的变化中可以看出:对不等式解法的考查体现在:一是语言严谨,考虑问题全面,尤其含参不等式的分类讨论层次清楚、条理、全面;二是解不等式与函数性质、方程等知识的综合应用,对不等式应用的考查力度有所加大. 这主要体现在:与其他知识的综合应用要求高了,如 2001 年与排列组合结合,2002 年与数列相结合,2003 年与函数、数列相结合;对求解、证明不等式的方法及相关数学知识的应用更趋灵活;对语言及思维的严谨性及思想的灵活性提出了更高的要求. 近几年的高考几乎都把不等式与有关知识相结合作为压轴题. 对不等式应用的考查较多的体现在与现实生活相关的实际应用题以及函数性质当中.

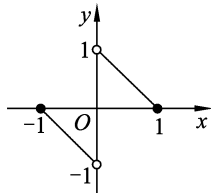


方法指导与能力训练



基础题目

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & (x < 1), \\ 3-2^{x-1} & (x \geq 1), \end{cases}$ 则使得 $f(x) \geq 1$ 的自变量 x 的取值范围是 ().
 A. $(-\infty, -2] \cup [0, 2]$ B. $(-\infty, -2] \cup [0, 1]$
 C. $(-\infty, -2] \cup [1, 2]$ D. $[-2, 0] \cup [1, 10]$
2. (2009 年·四川) 已知 a, b, c, d 为实数, 且 $c > d$, 则“ $a > b$ ”是“ $a - c > b - d$ ”的 ().
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. (2009 年·天津) 已知 $0 < b < 1 + a$, 若关于 x 的不等式 $(x - b)^2 < (ax)^2$ 的解集中的整数恰有 3 个, 则 ().
 A. $-1 < a < 0$ B. $0 < a < 1$ C. $1 < a < 3$ D. $3 < a < 6$
4. $f(x)$ 的图象是如右图中的两条线段, 它的定义域是 $[-1, 0) \cup (0, 1]$, 则不等式 $f(x) - f(-x) > -1$ 的解集是_____.
5. 证明不等式: $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$, 其中 $x > 1$.



第 4 题图



考题展示

已知不等式 $2x - 1 > m(x^2 - 1)$.

(1) 是否存在实数 m , 使不等式对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立? 请说明理由.

(2) 若对于 $m \in [-2, 2]$ 不等式恒成立, 求实数 x 的取值范围.

【思路分析】 题中含有两个未知数, 要把其中一个当成变量, 另一个当成参数, 一般要把有限定条件的未知数当成变量处理较为简单.

【解】 (1) 原不等式等价于: $mx^2 - 2x + (1 - m) < 0$,

若对于所有实数 x 恒成立, 当且仅当 $m < 0$ 且 $\Delta = 4 - 4m(1 - m) < 0$ 不等式解集为 $\emptyset$,

$\therefore$ 不存在实数 m , 使不等式恒成立.

(2) 设 $f(m) = (x^2 - 1)m - (2x - 1)$,

当 $m \in [-2, 2]$ 时, $f(m) < 0$ 恒成立.

而 $f(m)$ 在 $m \in [-2, 2]$ 时表示线段, 当且仅当

$$\begin{cases} f(2) < 0, \\ f(-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 < 0 \cdots \cdots \textcircled{1}, \\ -2x^2 - 2x + 3 < 0 \cdots \cdots \textcircled{2}. \end{cases}$$

$$\text{由 } \textcircled{1} \text{ 得: } \frac{1 - \sqrt{3}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$

$$\text{由 } \textcircled{2} \text{ 得: } x < \frac{-1 - \sqrt{7}}{2} \text{ 或 } x > \frac{-1 + \sqrt{7}}{2},$$

$$\text{取交集得: } \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore x \text{ 的取值范围是 } \left\{ x \mid \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right\}.$$

【点评】 (1) 逐步减少参数, 使问题获得解决; (2) 中数形有机结合, 避免分类讨论, 优化了解题过程.



典型例题分析

例 1 解关于 x 的不等式: $\frac{x}{x-1} < 1 - a$.

【思路分析】 移项通分转化为整式不等式, 再分类讨论求解.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \frac{x}{x-1} < 1 - a &\Leftrightarrow \frac{ax - (a-1)}{x-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow [ax - (a-1)](x-1) < 0. \end{aligned}$$

① 当 $a = 0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x \mid x < 1\}$.

② 当 $a > 0$ 时, 可化为 $\left(x - \frac{a-1}{a}\right)(x-1) < 0$.

$$\therefore \frac{a-1}{a} < 1, \therefore \text{解集为 } \left\{ x \mid \frac{a-1}{a} < x < 1 \right\}.$$