

第一章 常用逻辑用语

第一节 命题及其关系

学习目标

1. 了解命题的逆命题、否命题、逆否命题.
2. 分析四种命题的相互关系, 会判断四种命题的真假以及真假性之间的关系.

基础导引

1. 下列语句中不是命题的是().
A. 集合中的元素是没有顺序的 B. 余弦函数是周期函数
C. $12 > 5$ D. 个子比较高的人
2. 下列语句中是命题的是().
A. $|x + a|$ B. $\{0\} \in \mathbb{N}$
C. 集合与简易逻辑 D. 真子集
3. 下列命题中是假命题的是().
A. $f(x) = x^3 - 2x$ 是奇函数
B. 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数
C. 奇函数的图象一定过原点
D. 函数 $y = 2^x$ 的定义域为 $\mathbb{R}$
4. “全等三角形一定是相似三角形”的逆否命题是().
A. 不全等三角形一定不是相似三角形
B. 不相似三角形不一定是全等三角形
C. 不相似三角形一定不是全等三角形
D. 不全等三角形不一定是相似三角形
5. 命题“两条对角线互相垂直的四边形是矩形”是命题“矩形是两条对角线互相垂直的四边形”的_____命题.
6. 命题“若 $a > 1$ 则 $a > 0$ ”的逆命题是_____, 逆否命题是_____.



范例解析

例1 按题后要求构造命题：

(1) 等腰三角形的两个底角相等.(写出逆命题)；

(2) 正 n 边形($n \geq 3$)的 n 个内角全相等.(写出否命题)；

(3) 若两个整数之积为偶数,则两个整数中至少有一个是偶数.(写出否命题)；

(4) 若直线 l_1 与 l_2 相交,则至多有一个交点.(写出逆否命题).

分析 构造命题的要点是分清原命题的条件和结论.

解 (1) 有两个角相等的三角形为等腰三角形.

(2) 不是正 n 边形($n \geq 3$)的 n 个内角不全相等.

(3) 若两个整数之积不是偶数,则两个整数中一个也不是偶数.

(4) 若直线 l_1 与 l_2 至少有两个交点,则 l_1 与 l_2 不相交.

评注 求命题的否定需注意将命题中的关键词语改成它的否定词语.

例2 判断命题“若 $k > 0$,则方程 $x^2 + x - k = 0$ 有实数根”的逆否命题的真假.

分析 可直接由原命题的真假得出其逆否命题的真假,也可由原命题写出其逆否命题后再判断其真假.

解法一 $k > 0$,

方程 $x^2 + x - k = 0$ 的判别式 $\Delta = 4k + 1 > 0$,

, 方程有实数根,原命题为真.

而原命题与逆否命题等价,故逆否命题为真.

解法二 原命题 若 $k > 0$,则方程 $x^2 + x - k = 0$ 有实数根.

逆否命题 若方程 $x^2 + x - k = 0$ 无实数根,则 $k \leq 0$.

$$x^2 + x - k = 0 \text{ 无实数根, } \Delta = 4k + 1 < 0, \quad k < -\frac{1}{4},$$

从而 $k < -\frac{1}{4} \leq 0$, 原命题的逆否命题为真.

评注 注意到若 $k > 0$,则 $k > -\frac{1}{4}$; 同样,若 $k < -\frac{1}{4}$,则有 $k \leq 0$ 成立.

备选例题

1. 命题:“已知 a, b, c, d 是实数,若 $a = b, c = d$,则 $a + c = b + d$ ”. 写出其逆命题、否命题、逆否命题.

2. 分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题,并判断它们的真假.

- (1) 若 $q < 1$, 则方程 $x^2 + 2x + q = 0$ 有两个不等实根;
 (2) 若 $ab = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$;
 (3) 若 $x^2 + y^2 = 0$, 则 x, y 全为零.

能力测试

一、选择题

1. 下列4个命题:

- ① “若 $xy = 1$, 则 x, y 互为倒数”的逆命题;
 ② “面积相等的三角形全等”的否命题;
 ③ “若 $m \leq 1$, 则 $x^2 - 2x + m = 0$ 有实根”的逆否命题;
 ④ “若 $A \cap B = B$, 则 $A \subseteq B$ ”的逆否命题.

其中真命题是().

- A. ①② B. ②③ C. ①②③ D. ③④

2. 下列命题:

- ① 所有的函数都有解析式;
 ② 函数 $f(x) = -x^3 + 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数;
 ③ 函数 $y = 2^{3x}$ 是指数函数;
 ④ 若 $\log_x 27 = \frac{3}{4}$, 则 $x = 81$.

其中是假命题的是().

- A. ① B. ②③ C. ③④ D. ①③

3. 当命题“若 p , 则 q ”为真时, 下列命题中一定正确的是().

- A. 若 q , 则 p B. 若 $\neg p$, 则 $\neg q$
 C. 若 $\neg q$, 则 $\neg p$ D. 若 p , 则 $\neg q$

4. 若命题 p 的否命题为 r , 命题 r 的逆命题为 s , 则 s 是 p 的逆命题 t 的().

- A. 逆否命题 B. 逆命题 C. 否命题 D. 原命题

5. 命题“ $f(x) = \lg(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ 是奇函数”与它的逆命题、否命题、逆否命题中, 真命题的个数为().



- A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

6. 命题“平行于同一条直线的两条直线平行”与它的逆命题、否命题、逆否命题中,真命题是().

- A. 原命题与逆否命题 B. 逆命题与否命题
C. 原命题与逆命题 D. 上述四个命题

7. 命题“正数的算术平方根是正数”的否命题是().

- A. 正数的算术平方根不是正数
B. 正数的算术平方根是负数
C. 若一个数不是正数,则它的算术平方根不是正数
D. 若一个数的算术平方根不是正数,则它不是正数

8. 如果一个命题的逆命题是假命题,则它的否命题().

- A. 一定是真命题 B. 不一定是真命题
C. 不一定是假命题 D. 一定是假命题

9. 有下列命题:

- ① $a=0$ 时,集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0, x\in R\}$ 中,只有一个元素;
② 若 $E=\{(x,y)|y=x^2-2x+1\}$, $F=\{(x,y)|x^2-2x+1=0, y\in R\}$, 则 $E=F$;
③ 若 $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x^2}$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数;
④ 若 $f(x)=x^2+1$, 则 $f[f(-1)]=5$.

其中真命题共有().

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

10. 命题“正切函数的值域不是 R ”的逆命题的逆否命题是().

- A. 原命题的逆命题 B. 原命题的否命题
C. 否命题的逆命题 D. 逆否命题的否命题

11. “若 $x, y \in R$, 且 $x^2+y^2=0$, 则 x, y 全为 0”的否命题是().

- A. 若 $x, y \in R$, 且 $x^2+y^2 \neq 0$, 则 x, y 全不为 0
B. 若 $x, y \in R$, 且 $x^2+y^2 \neq 0$, 则 x, y 不全为 0
C. 若 $x, y \in R$, 且 x, y 全为 0, 则 $x^2+y^2=0$
D. 若 $x, y \in R$, 且 $xy \neq 0$, 则 $x^2+y^2 \neq 0$

12. 下列否定结论“至多有两个解”的说法中,正确的是().

- A. 有一个解 B. 有两个解
C. 至少有三个解 D. 至少有两个解

13. 命题“若 $A \cap B = A$, 则 $A \cup B = B$ ”的逆否命题是().

- A. 若 $A \cup B = B$, 则 $A \cap B = A$ B. 若 $A \cup B \neq B$, 则 $A \cap B \neq A$
C. 若 $A \cap B \neq A$, 则 $A \cup B \neq B$ D. 若 $A \cup B \neq B$, 则 $A \cap B = A$

14. 下列说法中正确的是().

- A. 一个命题的逆命题为真,则其逆否命题一定为真
B. “ $a > b$ ”与“ $a + c > b + c$ ”不等价
C. “ $a^2 + b^2 = 0$,则 a, b 全为 0”的逆否命题是“若 a, b 全不为 0,则 $a^2 + b^2 \neq 0$ ”
D. 一个命题的否命题为真,则它的逆命题一定为真

二、填空题

15. 用反证法证明“若 ab 不是偶数,则 a, b 都不是偶数”时,应假设_____.
16. 在空间中,①若四点不共面,则这四点中任何三点都不共线;②若两条直线没有公共点,则这两条直线是异面直线.以上两个命题中,逆命题为真命题的是_____.

17. 已知 a, b 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面,且 $a \perp \alpha, b \perp \beta$,则下列命题中的假命题是_____. ①若 $a \parallel b$,则 $\alpha \parallel \beta$; ②若 $\alpha \perp \beta$,则 $a \perp b$; ③若 a, b 相交,则 α, β 相交; ④若 α, β 相交,则 a, b 相交.

18. 命题“若 $ab = 0$,则 $a = 0$ 或 $b = 0$ ”的逆否命题是_____.
19. 若 p 的逆命题是 r , r 的否命题是 s ,则 s 是 p 的否命题的_____.
20. 命题 $x \in A \cap B$ 的否命题是_____.

三、解答题

21. 命题:“已知 a, b, c, d 是实数,若 $a = b, c = d$,则 $a + c = b + d$ ”写出该命题的逆命题、否命题、逆否命题,并判断这些命题的真假.

22. 已知命题 $p: |3x - 4| < 2$, $q: |3x - 4| < 8$,且 p 假 q 真,求 x 的取值范围.

23. 用反证法证明:若 $a^2 + b^2 = c^2$,则 a, b, c 不可能都是奇数.

24. 判断命题“已知 a, x 为实数,如果关于 x 的不等式 $x^2 + (2a + 1)x + a^2 + 2 \leq 0$ 的解集非空,则 $a \geq 1$ ”的逆否命题的真假.



探索与创新

1. 设 A, B 为两个集合, 下列四个命题:

- ① $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \notin B$;
- ② $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;
- ③ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\supset B$;
- ④ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 使得 $x \notin B$.

其中真命题的序号是_____ (把符合要求的命题序号都填上).

2. 探究命题“若 $x + y \leq 5$, 则 $x \leq 2$ 或 $y \leq 3$ ”的真假.

第二节 充分条件 必要条件

6

学习目标

理解充分条件、必要条件的意义.

基础导引

- 1. 下列“若 p 则 q ”形式的命题中 p 是 q 的充分条件的命题是().
 - A. 若 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 则 $x = 2$
 - B. 若 $f(x)$ 为减函数, 则 $f(x) = 2^x$
 - C. 若 $x = 1$, 则 $x^2 + 5x - 6 = 0$
 - D. 若 $x + 1$ 为偶数, 则 x 为偶数
- 2. 下列“若 p 则 q ”形式的命题中 q 是 p 的必要条件的是().
 - A. 若两个三角形的周长相等, 则这两个三角形的面积相等
 - B. 若一个点在圆内, 则它到该圆的圆心的距离等于半径
 - C. 若 $a > b$, 则 $ac > bc$
 - D. 若 $|x| = |y|$, 则 $x = y$
- 3. 下列“若 p 则 q ”形式的命题中 p 是 q 的必要条件的是().
 - A. 若 $A = B$, 则 $\sin A = \sin B$
 - B. 若向量 a 与 b 的夹角为 0° , 则 $a \parallel b$
 - C. 若 $(x - m)(x - n) = 0$, 则 $x = m$

- D. 若 $x > 22$ 则 $x > 12$
4. 若 p 是 q 的充分条件 则 q 是 p 的().
- A. 充分条件
B. 必要条件
C. 既不是充分条件 又不是必要条件
D. 无法确定
5. 对于 $x, y \in \mathbb{R}$, “ $xy = 0$ 是 $x^2 + y^2 = 0$ ”的().
- A. 充分条件
B. 必要条件
C. 既不充分也不必要条件
D. 不能判断
6. “ $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ ”是“ $x \neq 1$ ”的().
- A. 充分条件
B. 必要条件
C. 不是充分条件
D. 既不充分也不必要条件
7. “ $x > y > 0$ ”是“ $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ ”的_____条件.
8. _____是 $x < 2$ 的充分条件.
9. “ $\angle A = \angle B$ ”是“ $\angle A$ 与 $\angle B$ 是对顶角”的_____条件.
10. “ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 面积相等”是“ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 全等”的_____条件.

范例解析

例1 给出下列四组命题:

- (1) $p: x - 2 = 0$ $q: (x - 2)(x - 3) = 0$.
- (2) p : 两个三角形相似 q : 两个三角形全等.
- (3) $p: m < -2$ q : 方程 $x^2 - x - m = 0$ 无实根.
- (4) p : 一个四边形是矩形 q : 四边形的对角线相等.

试分别指出 p 是 q 的什么条件.

分析 首先分清条件和结论 然后搞清楚是前者推出后者 还是后者推出前者.

解 (1) $x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$;

而 $(x - 2)(x - 3) = 0 \not\Rightarrow x - 2 = 0$.

, p 是 q 的充分不必要条件.

(2) 两个三角形相似 $\not\Rightarrow$ 两个三角形全等;

但两个三角形全等 $\Rightarrow$ 两个三角形相似.

, p 是 q 的必要不充分条件.

(3) $m < -2 \Rightarrow$ 方程 $x^2 - x - m = 0$ 无实根; 方程 $x^2 - x - m = 0$ 无实根 $\not\Rightarrow m <$



, p 是 q 的充分不必要条件.

(4) 矩形的对角线相等, $p \Rightarrow q$,
而对角线相等的四边形不一定是矩形,

, $q \nRightarrow p$.

, p 是 q 的充分不必要条件.

评注 判定 p 是 q 的什么条件, 关键看 p 能否推出 q , q 能否推出 p .

例 2 判断 $p: a^2 - b^2 + 2a - 4b - 3 \neq 0$ 是 $q: a - b \neq 1$ 的什么条件?

分析 此题直接判断比较困难, 我们可以分析它的等价命题.

解 其逆否命题是:

$\neg q: a - b = 1, \neg p: a^2 - b^2 + 2a - 4b - 3 = 0$.

① 把 $a = b + 1$ 代入 $a^2 - b^2 + 2a - 4b - 3$ 中, 易得 $a^2 - b^2 + 2a - 4b - 3 = 0$.

即原命题的逆否命题成立, $\therefore \neg q \Rightarrow \neg p$.

② 由 $a^2 - b^2 + 2a - 4b - 3 = (a^2 + 2a + 1) - (b^2 + 4b + 4) = (a + 1)^2 - (b + 2)^2 = 0$ 得 $a - b = 1$ 或 $a + b = -3$, 即 $\neg p \nRightarrow \neg q$.

综上所述可知, 由原命题与逆否命题的等价性 $p \Rightarrow q$, 即 p 是 q 的充分条件.

评注 当命题不易直接判断时, 可转换命题的形式, 利用命题的等价性加以判定.

备选例题

1. 判断 $|x| = -x$ 是 $x^2 \geq x$ 的什么条件.

2. 判断并证明 $p: x \geq 0$ 是 $q: x^2 \leq x$ 的什么条件.

能力测试

一、选择题

1. 条件甲: $A \cap B = A$, 条件乙: $A \subsetneq B$, 则甲是乙的().

A. 充分条件

B. 必要条件

C. 既不充分也不必要条件

D. 不必要条件

2. 若 $p: f(x) = \cos(2x + 1)$, $q: f(x)$ 的周期为 π , 则 p 是 q 的().

- A. 充分条件 B. 必要条件 C. 都不是 D. 都有可能
3. a, b 中至少有一个不为零的必要条件是().
A. $ab=0$ B. $ab>0$ C. $a^2+b^2=0$ D. $a^2+b^2>0$
4. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则 $x>5$ 的一个充分条件是().
A. $x>4$ B. $x<8$ C. $x>6$ D. $-2<x<15$
5. 函数 $y=x^2+bx+c$, $x \in [0, +\infty)$ 是单调函数的必要条件是().
A. $b \geq 52$ B. $b \geq -1$ C. $b \leq 2$ D. $b \leq -1$
6. 下列“若 p 则 q ”形式的命题中, p 是 q 的充分条件的是().
A. 若 $xy>0$, 则 $x<0, y<0$
B. 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^x - 1}$
C. 若 $\lg x + \lg y$ 的最大值为 $\lg \frac{25}{6}$, 则非负实数 x, y 满足 $2x+3y=100$
D. 若 $x^2 > a^2 + b^2$, 则 $x^2 > 2ab$
7. 下列“若 p 则 q ”形式的命题中, p 是 q 的必要条件的是().
A. 若 $\log_a 3 < 1$, 则 a 的取值范围是 $0 < a < 1$
B. 若 θ 为第一象限角, 则 2θ 是第三象限的角
C. 若 $\sin \alpha \neq \sin \beta$, 则 $\alpha \neq \beta$
D. 若 $y = -\sin^2 x + 4\sin x + \frac{7}{4}$, 则其值域为 $\left[-\frac{19}{4}, \frac{13}{4}\right]$
8. 下列“若 p 则 q ”形式的命题中, q 是 p 的必要条件的是().
A. 若函数 $y = 5 + \sin^2 2x$, 则其最小正周期为 $\frac{\pi}{4}$
B. 若 α 是第二象限角, 且 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 则 2α 不在一、二、四象限内
C. 若 $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$, 则其单调增区间是 $\left[k\pi - \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{3}{8}\pi\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$)
D. 若要得到函数 $y = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象, 则只需将 $y = \sin \frac{x}{2}$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位
9. 对任意实数 a, b, c , 在下列命题中真命题是().
A. “ $ac > bc$ ”是“ $a > b$ ”的必要条件 B. “ $ac = bc$ ”是“ $a = b$ ”的必要条件
C. “ $ac > bc$ ”是“ $a > b$ ”的充分条件 D. “ $ac = bc$ ”是“ $a = b$ ”的充分条件
10. 设结论甲: $|x+1| < 2$, 则在下列结论中, 为甲的必要不充分条件的是().
A. $x^2 + 2x - 3 < 0$ B. $|x-1| < 2$



- C. $|2x+1| < 3$ D. $x^2 - 9 < 0$
11. 使不等式 $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$ 成立的一个充分不必要条件是().
- A. $x < 0$ B. $x \geq 0$
- C. $x \in \{-1, 3, 5\}$ D. $x \leq -\frac{1}{2}$ 或 $x \geq 3$

12. 条件 $p: |x-1| > 1-x$ 条件 $q: x > a$ 若 p 是 q 的充分不必要条件 则 a 的取值范围是().

- A. $a > 1$ B. $a \geq 1$ C. $a < 1$ D. $a \leq 1$
13. 下列四组条件中, 甲是乙的充分而不必要条件的的是().

- A. 甲 $a > b$; 乙 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- B. 甲 $ab < 0$; 乙 $|a+b| < |a-b|$
- C. 甲 $a = b$; 乙 $a + b = 2\sqrt{ab}$
- D. 甲 $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$; 乙 $\begin{cases} 0 < a+b < 2 \\ -1 < a-b < 1 \end{cases}$
14. $a, b \in \mathbb{R}$ 则使 $|a| + |b| > 1$ 成立的一个充分而不必要条件的的是().
- A. $|a+b| \geq 1$ B. $a \geq 1$
- C. $|a| \geq \frac{1}{2}$ 且 $|b| \geq \frac{1}{2}$ D. $b < -1$

二、填空题

15. 用“ $\Rightarrow$ ”或“ $\nRightarrow$ ”填空:

若 $p: A \cap B = A$ $q: A \subseteq B$ 则 p _____ q 且 _____ p .

16. 若 B 是 A 的充分条件 A 是 C 的充分条件 则 C 是 B 的 _____ 条件.

17. “ $(a-b)(b-c)(c-a) < 0$ ”是“ $a > b > c$ ”的 _____ 条件.

18. 设 A, B 是两个命题 如果 A 是 B 的充分条件 那么 $\neg A$ 是 $\neg B$ 的 _____, $\neg B$ 是 $\neg A$ 的 _____.

19. “ $a \in \mathbb{R}, |a| < 1$ ”是方程“ $x^2 + (a^2 - 1)x + a - 2 = 0$ ”的一个根大于 1, 另一个根小于 1”的 _____ 条件.

20. “ $x^2 - 3x + 2 > 0$ ”是“ $x < 1$ 或 $x > 4$ ”的 _____ 条件.

三、解答题

21. 在下列括号中填“充分条件”或“必要条件”.

(1) “四边形 $ABCD$ 是梯形”是“四边形 $ABCD$ 是等腰梯形”的().

(2) “ $\angle A = \angle B$ ”是“ $\angle A$ 和 $\angle B$ 是对顶角”的().

(3) “ $m=1$ ”是“函数 $y=x^{m^2-4m+5}$ 是二次函数”的().

(4) “平面向量 $a \parallel b$ ”是“ a 与 b 的夹角为 180° ”的().

22. 已知条件 $p: A=\{x \in \mathbb{R} | x^2 + ax + 1 = 0\}$, $q: B=\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$, 若 p 是 q 的充分条件, 求实数 a 的取值范围.

23. 求证: 关于 x 的实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个正根或两个负根的必要条件是 $ac > 0$.

24. 已知 $p: \left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 2$, $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$, 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分而不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

探索与创新

1. 利用集合间的包含关系来理解充分条件、必要条件.

(1) 怎样理解“若 A 是 B 的充分条件”?

(2) 怎样理解“若 A 是 B 的必要条件”?

试画出韦恩图加以说明.

2. p : 一次函数 $f(x) = kx + b (k \neq 0)$ 是奇函数, $q: b = 0$.

求证: (1) $p \Rightarrow q$; (2) $p \Leftarrow q$.



第三节 充要条件

学习目标

1. 理解充要条件的意义,并能用充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分也不必要条件来表达命题 p 与命题 q 的关系.
2. 会求某些简单问题成立的充要条件,证明充要性.

基础导引

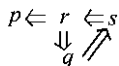
1. “两个三角形相似”的一个充分不必要条件是().
A. 它们的面积相等 B. 它们的三边对应成比例
C. 这两个三角形全等 D. 它们有两个角相等
2. “ $a+b>0$ 且 $ab>0$ ”是“ $a>0$ 且 $b>0$ ”的().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. $0<x<5$ 是不等式 $|x-2|<4$ 成立的().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 设原命题“若 p 则 q ”为真,而逆命题为假,则 p 是 q 的().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 如果 x, y 是实数,那么“ $xy>0$ ”是“ $|x+y|=|x|+|y|$ ”的().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 已知 p 是 r 的充分不必要条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件,那么 p 是 q 成立的().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) 的图象过原点的_____条件是 $c=0$.
8. “ $x_1>0$ 且 $x_2>0$ ”是“ $x_1+x_2>0$ 且 $x_1x_2>0$ ”的_____条件.
9. 设有非空集合 A, B, C , 若“ $a\in A$ ”的充要条件是“ $a\in B$ 且 $a\in C$ ”, 则“ $a\in B$ ”是“ $a\in A$ ”的_____条件.

10. 设 $a > 0$, “ $x \in \{-a, a\}$ ”是“ $|x| = a$ ”的_____条件.

范例解析

例1 已知 p, q 都是 r 的必要条件, s 是 r 的充分条件, q 是 s 的充分条件. 那么: (1) s 是 q 的什么条件? (2) r 是 q 的什么条件? (3) p 是 q 的什么条件?

分析 将已知 r, p, q, s 的关系作一个“ $\Rightarrow$ ”图.



解 (1) 由右图知: $q \Rightarrow s, s \Rightarrow r \Rightarrow q$, s 是 q 的充要条件.

例1题图

(2) $r \Rightarrow q, q \Rightarrow s \Rightarrow r$, r 是 q 的充要条件.

(3) $q \Rightarrow s \Rightarrow r \Rightarrow p$, p 是 q 的必要不充分条件.

评注 “ $\Rightarrow$ ”在解决较多个条件的问题时经常用到, 要细心体会递推法是理解充要条件的一重要方法.

例2 已知 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, 且 $a \neq 0$), 求证: $f(x) = 0$ 有两个不相等的实数解的充要条件是存在 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使 $af(x_0) < 0$.

分析 分清条件与结论.

证明 (1) 充分性 若存在 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使 $af(x_0) < 0$,

则 $b^2 - 4ac = b^2 - 4a[f(x_0) - ax_0^2 - bx_0] = b^2 + 4abx_0 + 4a^2x_0^2 - 4af(x_0) = (b + 2ax_0)^2 - 4af(x_0) > 0$, 方程 $f(x) = 0$ 有两个不等实根.

(2) 必要性 若方程 $f(x) = 0$ 有两个不等实根, 则 $b^2 - 4ac > 0$, 设 $x_0 = -\frac{b}{2a}$,

$$a \cdot f(x_0) = a \left[a \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} \right) + c \right] = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + ac = \frac{4ac - b^2}{4} < 0.$$

评注 充要条件的证明具有双向性, 要注意与平常证明的区别和联系.

备选例题

1. 下列各题中 p 是 q 的什么条件? (指充分不必要、必要不充分、充要、既不充分也不必要.)

(1) $p: x^2 - 3x + 2 \geq 0$ $q: x \geq 1$ 或 $x \leq 2$.

(2) $p: x = 1$ 或 $x = 2$ $q: x - 1 = \sqrt{x - 1}$.

(3) p 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A \neq 60^\circ$ $q: \sin A \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

(4) $p: xy > 0$ 且 $x > y$ $q: \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.



能力测试

1. 设原命题“若 A 则 B”真而逆命题假, 则 A 是 B 的()条件.

2. “ $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ”是“ $\alpha = 2k\pi + \frac{5}{6}\pi, k \in \mathbb{Z}$ ”的()条件.

3. 函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 是奇函数的充要条件是().

- A. $ab=0$ B. $a+b=0$ C. $a=b$ D. $a^2+b^2=0$

4. 函数 $y = x^2 + bx + c$ $x \in [0, +\infty)$ 是单调函数的充要条件是().

- A. $b \geq 0$ B. $b \leq 0$ C. $b > 0$ D. $b < 0$

5. $x, y \in \mathbb{R}$, 则下列命题中, 甲是乙的充分不必要条件的命题是().

- A. 甲 $xy=0$,乙 $x^2+y^2=0$
 B. 甲 $xy=0$,乙 $|x|+|y|=|x+y|$
 C. 甲 $xy=0$,乙 x, y 至少一个为零

- D. 甲 $x < y$, 乙 $\frac{x}{y} < 1$

6. $p: x^2 - 5x + 6 < 0$ 的必要不充分条件是().

- A. $q \mid x^2 - 5x + 6 \geq 0$ B. $q \mid x^2 - 2x < 0$
C. $q \mid x^2 - 7x + 6 < 0$ D. $q \mid x^2 - 7x \geq 0$

7. 已知 $h > 0$, 设命题甲: 两个实数 a, b 满足 $|a - b| < 2h$, 命题乙: 两个实数 a, b 满足 $|a - 1| < h$ 且 $|b - 1| < h$, 那么().

- A. 甲是乙的充分条件,但不是乙的必要条件
B. 甲是乙的必要条件,但不是乙的充分条件
C. 甲是乙的充分必要条件
D. 甲不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件

8. 下列的 4 个结论中正确的是().

- ① $x^2 > 4$ 是 $x^3 < -8$ 的必要不充分条件 ② 在 $\triangle ABC$ 中, “ $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ”

是“ $\triangle ABC$ 为直角三角形”的充要条件 ③ 若 $a, b \in \mathbb{R}$ 则“ $a^2 + b^2 \neq 0$ ”是“ a, b 全不为 0”的充要条件 ④ 若 $a, b \in \mathbb{R}$ 则“ $a^2 + b^2 \neq 0$ ”是“ a, b 不全为 0”的充要条件

A. ①②

B. ②③

C. ①④

D. ①③④

9. 下列 4 个结论：

① “ $k \neq 0$ ”是“方程 $y = kx + b$ 表示直线”的充分不必要条件；

② “ $a = 1$ ”是“函数 $y = \cos^2 ax - \sin^2 ax$ 的最小正周期为 π ”的必要不充分条件；

③ 在直角坐标系中，“ $x < -1$ ”是点 $(2x+3, x^2-2x-3)$ 在第二象限的充要条件；

④ “ $x + 2y = 1$ ”是“ $f(x) = 2^x + 4^y$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$ ”的既不充分也不必要条件.

其中错误的有()个.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

10. 已知条件甲 $a > 0$ 条件乙 $a > b$ 且 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 则条件甲是条件乙的().

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

11. 关于 x 的方程 $2(k+1)x + 4kx + 3k - 2 = 0$ 的两根同号的充要条件是().

A. $k < -1$ 或 $k \geq \frac{2}{3}$ B. $-2 < k < -1$ C. $-2 \leq k < -1$ 或 $\frac{2}{3} < k \leq 1$ D. $-2 \leq k \leq 1$

12. 函数 $f(x) = x|x+a| + b$ 是奇函数的充要条件是().

A. $ab = 0$ B. $a + b = 0$ C. $a = b$ D. $a^2 + b^2 = 0$

13. 下列说法中不正确的是().

① $x^2 \neq 1$ 是 $x \neq 1$ 的必要条件 ② $x > 5$ 是 $x > 4$ 的充分不必要条件 ③ $xy = 0$

是 $x = 0$ 且 $y = 0$ 的充要条件 ④ $x^2 < 4$ 是 $x < 2$ 的充分不必要条件

A. ①②

B. ③④

C. ①③

D. ②④

14. 若非空集合 $M \subsetneq N$ 则“ $a \in M$ 或 $a \in N$ ”是“ $a \in M \cap N$ ”的().

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

二、填空题

15. “ $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 有实根”是“ $ac < 0$ ”的_____条件.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\sin B \sin C = \cos^2 \frac{A}{2}$ ”是“ $\triangle ABC$ 是等腰三角形”的_____

条件.



17. “ $x \neq y$ ”是“ $\sin x \neq \sin y$ ”的_____条件.
18. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $a = 10$, $b = 5\sqrt{6}$, $A = 45^\circ$ ”是“ $B = 45^\circ$ ”的_____条件.
19. “ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形”是“ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c}$ ”的_____条件.
20. 直线 $y = ax + b$ 经过第一、三、四象限的充要条件是_____.

三、解答题

21. 已知 x, y 是非零实数, 且 $x > y$, 求证: $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ 的充要条件是 $xy > 0$.

22. 已知 a, b, c 都是实数, 求证: “ $ac < 0$ ”是“关于 x 的方程有一个正根和一个负根”的充要条件.

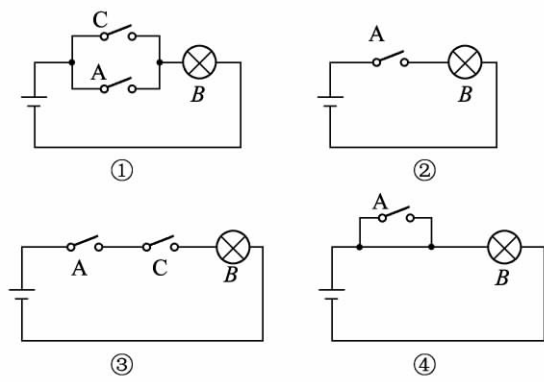
23. 设 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边, 求方程 $x^2 + 2ax + b^2 = 0$ 与 $x^2 + 2cx - b^2 = 0$ 有公共根的充要条件.

24. 试求关于 x 的方程 $x^2 + mx + n = 0$ 有两个小于1的正根的充要条件.

探索与创新

1. 从电路图的角度, 来理解充分、必要条件.

若 p : “开关 A 闭合”, q : “灯泡 B 亮”, 则下列 4 个电路图中, p 是 q 的什么条件?



第 1 题图

2. 分别写出使“直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直”的一个: ① 充分不必要条件; ② 必要不充分条件; ③ 充要条件; ④ 既不充分也不必要条件.

第四节 简单的逻辑联结词

学习目标

1. 理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义.

2. 会判断“或”、“且”、“非”构成的复合命题的真假.