

普通高中课程标准实验教材

高中数学

必修 ④

GAOZHONG SHUXUE

新课标 新精编

XINKEBIAO
XINJINGBIAN

主编
胡建军



配人教 A 版

浙江教育出版社

ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

普通高中课程标准实验教材

高中数学

必修④

新课标 新精编

XINKEBIAO
XINJINGBIAN

顾问 何 岑 申 王而治 金才华 许芬英

主 编 胡建军

编 者 朱恒元 张敬政 吴直爽

浙江教育出版社

ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE



前言

高中课程改革正在全国各地逐步展开。其中,高中数学新课程旨在提高学生的科学素养,改变学生的学习方式,从知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观三个方面培养学生。为了深入贯彻新课程标准的精神,配合人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书·数学》的顺利使用,帮助学生实现高中数学课程的教育目标,我们组织了教学第一线的数学特级教师和优秀中青年教师,在深入研究了《高中数学课程标准》及其各种版本实验教科书的基础上,编写了这套《新课标新精编高中数学》丛书。

本丛书的编写以“讲求循序渐进,重现科学思想与科学方法,强调实践意识与探究精神,渗透情感态度价值观的教育”为原则,与人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书·数学》配套。它具有以下几个鲜明的特点:

1. 同步性。本丛书的例题和练习均以课时为基本单位,根据新课程教学的要求和学生学习的特点进行编写,与教学同步,便于教师的教学和学生的使用。

2. 科学性。本丛书根据新课标学习的需要,设置了“学法指导”、“基础例说·基础训练”、“应用·拓展·综合训练”、“自我评估”、“高考链接”五个栏目。“学法指导”帮助学生深刻理解教材的重点、难点和目标要求。“基础例说·基本训练”分例说和训练两部分,“例说”以典型例题为载体,教给学生思考问题、分析问题和解决问题的策略和方法;“训练”目的在于让学生通过训练巩固所学知识,发展思维能力。“应用·拓展·综合训练”纵揽全章,起到复习、巩固、拓展、加强应用和综合训练的作用。“自我评估”为全章知识的综合评估,分A、B两份试卷,其中A卷为基本要求,B卷为较高要求。“高考链接”选取近三年有代表性的高考真题,让学生试做,以同步了解高考命题的基本特点。

3. 层次性。为了适应不同学习水平的学生的不同要求,以及学生在学习阶段的不同要求,本丛书选编的训练题都分为“A组”和“B组”两组,分别反映了课程的基础性目标和发展性目标。使不同层次的学生都能够充分获益,也符合循序渐进的学习原则。

4. 新颖性。本丛书力求体现新课程的理念,突出数学探究、联系实际,注重激发学生学习兴趣,力求反映近年来高中数学教学和命题研究的最新成果,所选习题无论是在内容上,还是在形式上,都具有一定的新颖性。

由于时间匆促,加上作者对新课程的认识有待进一步提高,本丛书在编写时难免出现一些不足之处,敬请广大师生指正。

浙江教育出版社

2006年10月



第一章 三角函数	1
学法指导	1
基础例说·基本训练	2
1.1 任意角和弧度制	2
1.1.1 任意角	2
1.1.2 弧度制	4
1.2 任意角的三角函数	6
1.2.1 任意角的三角函数	6
1.2.2 同角三角函数的基本关系	10
1.3 三角函数的诱导公式	11
1.4 三角函数的图象与性质	15
1.4.1 正弦函数、余弦函数的图象	15
1.4.2 正弦函数、余弦函数的性质	17
1.4.3 正切函数的性质与图象	21
1.5 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象	22
1.6 三角函数模型的简单应用	28
应用·拓展·综合训练	32
综合复习(一)	32
综合复习(二)	33
自我评估	35
高考链接	37
第二章 平面向量	39
学法指导	39
基础例说·基本训练	40
2.1 平面向量的实际背景及基本概念	40
2.2 平面向量的线性运算	43
2.2.1 向量加法运算及其几何意义	43
2.2.2 向量减法运算及其几何意义	45
2.2.3 向量数乘运算及其几何意义	46



2.3 平面向量的基本定理及坐标表示	48
2.4 平面向量的数量积	52
2.4.1 平面向量数量积的物理背景及其含义	52
2.4.2 平面向量数量积的坐标表示、模、夹角	54
2.5 平面向量应用举例	56
2.5.1 平面几何中的向量法	56
2.5.2 向量在物理中的应用举例	58
应用·拓展·综合训练	60
综合复习(一)	60
综合复习(二)	63
自我评估	65
高考链接	66
第三章 三角恒等变换	68
学法指导	68
基础例说·基本训练	68
3.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式	68
3.1.1 两角差的余弦公式	68
3.1.2 两角和与差的正弦、余弦、正切公式	68
3.1.3 二倍角的正弦、余弦、正切公式	78
3.2 简单的三角恒等变换	81
应用·拓展·综合训练	87
综合复习(一)	87
综合复习(二)	90
自我评估	93
高考链接	95
答案与提示	98



学法指导

三角函数是基本初等函数,它是描述周期现象的重要数学模型,在数学和物理学、天文学、测量学以及其他应用技术学科中都具有重要的作用.本章学习的内容主要有三角函数的定义、图象、性质及应用.

学习目标

1. 了解任意角的概念和弧度制,能进行弧度与角度互化.
2. 理解任意角的三角函数的定义,能借助三角函数线推导出诱导公式,能画出函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ 的图象,了解三角函数的周期性;理解三角函数的性质;理解同角三角函数的基本关系式;了解函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的实际意义,能借助计算器或计算机画出函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象,了解参数 A, ω, φ 对函数图象变化的影响.

3. 会用三角函数解决一些简单的实际问题,体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.

重点、难点

重点是任意角的三角函数的概念,同角三角函数基本关系式、诱导公式及其应用,正弦曲线的画法 and 正弦函数的性质.

难点是弧度制的概念,周期函数的概念,函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与正弦曲线的关系.

主要概念、定理、公式及规律

1. 主要概念

(1) 按逆时针方向旋转形成的角叫做正角,按顺时针方向旋转形成的角叫做负角,如果一条射线没有作任何旋转,称它形成了一个零角.这样,就把角的概念推广到了任意角.

(2) 将角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的正半轴重合,那么角的终边在第几象限,就称这个角是第几象限角.

(3) 角可以用度或弧度为单位进行度量.1度的角等于周角的 $\frac{1}{360}$,用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制;把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度的角,用弧度作为单位来度量角的单位制叫做弧度制.

(4) 设 α 是一个任意大小的角,角 α 的终边上任意一点 P 的坐标为 (x, y) ,它到原点的距离为 r ($r > 0$),那么角 α 的三角函数定义为:

正弦函数 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$, 余弦函数 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, 正切函数

$\tan \alpha = \frac{y}{x}$. 特别地,当点 P 位于单位圆上时, $\sin \alpha = y$, $\cos \alpha = x$.

(5) 如图 1-1,角 α 的终边与单位圆交于点 P ,过点 P 作 x 轴的垂线,垂足为 M ,过点 $A(1, 0)$ 作单位圆的切线,它与角 α 的终边或其反向延长线交于点 T ,把三条有向线段 MP, OM, AT 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线,统称为三角函数线.

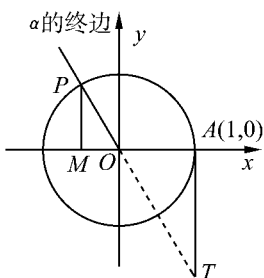


图 1-1

(6) 借助三角函数线,能够画出正弦函数的图象、余弦函数的图象和正切函数的图象,它们分别叫做正弦曲线、余弦曲线和正切曲线.

(7) 对于函数 $f(x)$,如果存在一个非零常数 T ,使得当 x 取定义域内的每一个值时,都有 $f(x+T) = f(x)$,那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数,非零常数 T 叫做这个函数的周期.如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数,那么这个最小正数就叫做 $f(x)$ 的最小正周期.本书中所涉及到的周期,如果不加特别说明,一般都是指函数的最小正周期.

(8) 在物理中,形如 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的函数描述简谐运动时, $A, \frac{2\pi}{\omega}, \frac{\omega}{2\pi}$ 分别是这个简谐运动的振幅、周期、频率, $\omega x + \varphi, \varphi$ 分别称为相位和初相.

2. 主要公式及规律

(1) 终边相同的角的表示法:任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和,即 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) 象限角的集合表示法:

第一象限角的集合为 $\{\alpha | 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$;

第二象限角的集合为 $\{\alpha | 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

第三象限角的集合为 $\{\alpha | 2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$;

第四象限角的集合为 $\{\alpha | 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(3) 终边在坐标轴上的角:

终边在 x 轴的非负半轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

终边在 x 轴的非正半轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = 2k\pi$



$+\pi, k \in \mathbf{Z}$;

终边在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$;

终边在 y 轴的非负半轴上的角的集合为

$$\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\};$$

终边在 y 轴的非正半轴上的角的集合为

$$\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\};$$

终边在 y 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$;

终边在坐标轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$.

(4) 弧长公式:

$l = |\alpha| \cdot r$ (其中 α 为此圆弧所对的圆心角的弧度数, r 为此圆的半径).

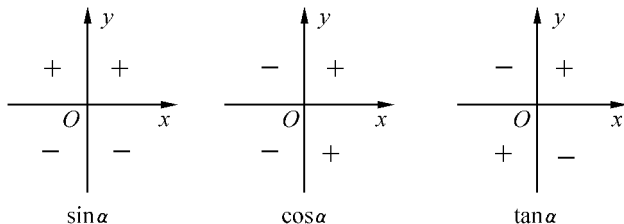
(5) 扇形的面积公式:

$$S = \frac{1}{2}lr \text{ (其中 } r \text{ 是半径, } l \text{ 是弧长)}.$$

(6) 角度与弧度的换算公式:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

(7) 各象限角的正弦、余弦、正切函数的符号:



(8) 诱导公式:

公式一 $\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin \alpha,$
 $\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos \alpha,$
 $\tan(\alpha + k \cdot 2\pi) = \tan \alpha,$ 其中 $k \in \mathbf{Z}$.

公式二 $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$
 $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$
 $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$

公式三 $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$
 $\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$
 $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$

公式四 $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha,$
 $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$
 $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$

公式五 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha,$
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$

公式六 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha,$
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha.$

(9) 同角三角函数的基本关系式:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha.$$

(10) 有关三角函数的最小正周期的计算公式:

函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|},$

函数 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|},$

函数 $y = A\tan(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期 $T = \frac{\pi}{|\omega|}.$

学习方法指导

1. 求任意角的三角函数值, 一般需运用三角函数的六组诱导公式进行求解. 这些诱导公式可概括为: $k \cdot 90^\circ \pm \alpha$ ($k \in \mathbf{Z}$) 的各三角函数值. 当 k 是偶数时, 得角 α 的同名函数值; 当 k 为奇数时, 得角 α 相应的“余”函数值, 然后加上把 α 看成锐角时函数值的符号. 可用口诀“奇变偶不变, 符号看象限”加强记忆.

2. 三角函数是一类特殊的周期函数, 现实生产和生活中, 周期现象广泛存在. 反映函数 $f(x)$ 为周期函数的本质是等式 $f(x+T) = f(x)$, 其中 T 为非零常数, 等式需对定义域内所有 x 都成立. 如: $\sin(30^\circ + 120^\circ) = \sin 30^\circ$, 但 120° 不是函数 $y = \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) 的一个周期. 因为对所有 $x \in \mathbf{R}$, $\sin(120^\circ + x) \neq \sin x$. 周期函数并不一定都有最小正周期. 如: $f(x) = 5$ ($x \in \mathbf{R}$), 任意一个非零实数都是它的周期, 由于没有最小正实数, 故它也没有最小正周期.

基础例说·基本训练★

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角

例 说

例 1 已知 $\alpha = 1\ 690^\circ$.

(1) 把 α 改写成 $\beta + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}, 0^\circ \leq \beta < 360^\circ$) 的形式;

(2) 求角 θ , 使角 θ 的终边与角 α 的终边相同, 且 $-360^\circ < \theta < 360^\circ$, 并判断角 θ 属于第几象限.

分析 第(1)题利用终边相同的角的表示法; 第(2)题利用满足条件的不等式, 对其中的 k 赋值.

解 (1) $\alpha = 250^\circ + 4 \times 360^\circ$ ($k=4, \beta=250^\circ$).

(2) $\because$ 角 θ 与角 α 终边相同,

$\therefore$ 角 θ 可写成 $250^\circ + k \cdot 360^\circ$ 的形式.

又 $\because -360^\circ < \theta < 360^\circ,$

$\therefore -360^\circ < 250^\circ + k \cdot 360^\circ < 360^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}$).

$\therefore k = -1$ 或 0 .

因此, $\theta = -110^\circ$ 或 250° , θ 属于第三象限角.



注意 求符合条件且与已知角终边相同的角,先写出与已知角终边相同的角的一般形式,即所求角的通解,然后根据条件求出 k 的值.

例 2 已知角 α 的终边与 -690° 角的终边关于 y 轴对称,求 α .

分析 利用对称角之间的关系.

解 $\because -690^\circ = -720^\circ + 30^\circ = -2 \times 360^\circ + 30^\circ$,

$\therefore -690^\circ$ 角的终边与 30° 角的终边相同.

30° 角关于 y 轴对称的角可表示为 $180^\circ - 30^\circ$,

$\therefore \alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ - 30^\circ (k \in \mathbb{Z})$,

即 $\alpha = k \cdot 360^\circ + 150^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

注意 一般地,若角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称,则 $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$;若角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称,则 $\alpha + \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$;若角 α 与角 β 的终边关于原点对称,则 $\alpha - \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$;若角 α 与角 β 的终边在同一条直线上,则 $\alpha - \beta = k \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

例 3 已知 α 是第二象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角?请画出图形.

分析 先表示出第二象限角,然后对 k 进行分类讨论.

解 $\because \alpha$ 为第二象限角,

$\therefore k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

$\therefore k \cdot 180^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

当 k 为偶数时,令 $k = 2n (n \in \mathbb{Z})$,

则 $n \cdot 360^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 90^\circ$,

故 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角;

当 k 为奇数时,令 $k = 2n+1 (n \in \mathbb{Z})$,

则 $n \cdot 360^\circ + 225^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 270^\circ$,

故 $\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角.

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 为第一、第三象限角.

$\frac{\alpha}{2}$ 的终边落在如图 1-2 所示的阴影部分的区域内.

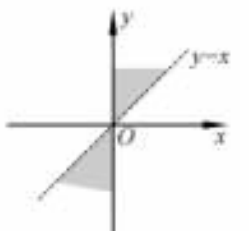


图 1-2

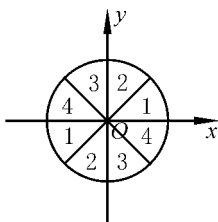


图 1-3

注意 求 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限的一般方法为:作出各象限

的角平分线,它们与坐标轴把圆周等分成 8 个区域,从 x 轴的非负半轴开始,按逆时针方向把这 8 个区域依次循环标上号码 1,2,3,4,则标号是几的两个区域,就是 α 为第几象限的角时 $\frac{\alpha}{2}$ 终边所在的区域,如图 1-3 所示.如:

α 是第一象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一、第三象限角.

训练

A 组

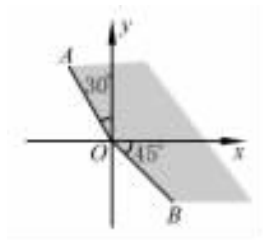
- 下列命题正确的是().
(A) 终边相同的角一定相等
(B) 第一象限角都是锐角
(C) 锐角都是第一象限角
(D) 小于 90° 的角都是锐角
- 与 -457° 角终边相同的角的集合是().
(A) $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 457^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
(B) $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 97^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
(C) $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 263^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
(D) $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ - 263^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
- 已知集合 $M = \{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ - 36^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{\beta | -180^\circ < \beta < 180^\circ\}$, 则 $M \cap N$ 等于().
(A) $\{-36^\circ, 54^\circ\}$
(B) $\{-126^\circ, 144^\circ\}$
(C) $\{-126^\circ, -36^\circ, 54^\circ, 144^\circ\}$
(D) $\{-126^\circ, 54^\circ\}$
- 若 α 是第一象限角,则 2α 是().
(A) 第一或第二象限角
(B) 第三或第四象限角
(C) 第三或第四象限角或终边落在 y 轴的负半轴上
(D) 第一或第二象限角或终边落在 y 轴的正半轴上
- 已知角 α, β 的终边相同,则 $\alpha - \beta$ 的终边在().
(A) x 轴的非负半轴上 (B) y 轴的非负半轴上
(C) x 轴的非正半轴上 (D) y 轴的非正半轴上
- 若 α 是第一象限角,则 $-\alpha$ 是().
(A) 第一象限角 (B) 第一或第四象限角
(C) 第二或第三象限角 (D) 第四象限角
- 终边在直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上的角的集合为_____.
- 与 -1778° 的终边相同且绝对值最小的角是_____.
- 若角 θ 的终边所在直线过点 $A(-2, 2)$, 且 $-360^\circ < \theta < 360^\circ$, 求角 θ .



10. 若角 θ 的终边与 60° 角的终边相同, 则满足 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ 条件的哪些角 α 的终边与 $\frac{\theta}{3}$ 的终边相同?

11. 如图.

- (1) 分别写出终边落在射线 OA 与射线 OB 上的角的集合;
(2) 写出终边落在阴影部分(含边界)的角的集合.



(第 11 题)

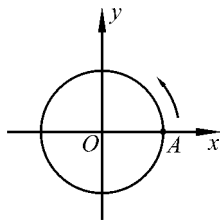
12. 已知集合 $M = \{\alpha | \alpha = (4k \pm 1) \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{\beta | \beta = (2k + 1) \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 那么 M, N 的关系如何?

B 组

13. 如果角 2α 的终边在 x 轴上方, 那么角 α 是().
(A) 第一象限角
(B) 第一或第二象限角
(C) 第一或第三象限角
(D) 第一或第四象限角
14. 若 α 为锐角, 则 $-\alpha + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ 所在象限是().
(A) 第二象限
(B) 第四象限
(C) 第一或第三象限
(D) 第二或第四象限
15. 若角 α 的终边与 -50° 角的终边互相垂直, 则角 α 等于_____.
16. 今天是星期一, 则 158 天后的一天是星期_____.
17. 已知集合 $A = \{\alpha | 30^\circ + k \cdot 180^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 集合 $B = \{\beta | -45^\circ + k \cdot 360^\circ < \beta < 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 求 $A \cap B$.

18. 在平面直角坐标系中, 角 α 的顶点在坐标原点, 始边在 x 轴的正半轴上. 若角 α 的终边过函数 $y = -2^x$ 与 $y = -\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 的图象的交点, 求满足条件的角 α 的集合.

19. 如图, 半径为 1 的圆的圆心位于坐标原点, 圆周上点 A 从 $(1, 0)$ 出发, 按逆时针方向做匀速圆周运动. 已知点 A 1 min 转过 θ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) 角, 2 min 到达第三象限, 14 min 后回到原来位置, 求角 θ .



(第 19 题)

20. 已知 $f(x) = 5^\circ \cdot x + 20^\circ$, $g(x) = 6^\circ \cdot x + 30^\circ$, 是否存在整数 T , 使得对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x+T)$ 与 $f(x)$, $g(x+T)$ 与 $g(x)$ 表示终边相同的角? 若存在, 求出 T 的值; 若不存在, 请说明理由.

1.1.2 弧度制



例 说

例 1 (1) 把 -1480° 写成 $\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 的形式, 其中 $0 \leq \alpha < 2\pi$;

(2) 若 $\beta \in [-4\pi, 0]$, 且角 β 与 (1) 中角 α 的终边相同, 求角 β .

分析 把 -1480° 化为弧度制.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \quad -1480^\circ &= -\frac{74}{9}\pi = -8\pi - \frac{2}{9}\pi \\ &= -10\pi + \frac{16}{9}\pi. \end{aligned}$$

$$\because 0 \leq \frac{16}{9}\pi < 2\pi, \quad \therefore -1480^\circ = \frac{16}{9}\pi - 2 \times 5\pi.$$

(2) $\because$ 角 β 与角 α 终边相同,

$$\therefore \beta = \alpha + 2k\pi = \frac{16}{9}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\therefore \beta \in [-4\pi, 0],$$



$$\therefore \beta_1 = \frac{16}{9}\pi - 2\pi = -\frac{2\pi}{9}, \beta_2 = \frac{16}{9}\pi - 4\pi = -\frac{20}{9}\pi.$$

注意 弧度制下终边相同的角的表示方法与角度制表示方法相似.

例 2 已知集合 $A = \left\{ x \mid k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 集合 $B = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$, 求 $A \cap B$.

分析 运用角的弧度数的实数性质.

解 对于 $k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}$,

当 $k=0$ 时, $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$;

当 $k=-1$ 时, $-\frac{3\pi}{4} \leq x < -\frac{\pi}{2}$.

当 k 取其他值时, $\left[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 与 $[-2, 3]$ 没有公共元素, 如图 1-4 所示.

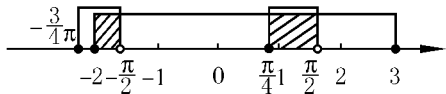


图 1-4

因此, $A \cap B = \left\{ x \mid -2 \leq x < -\frac{\pi}{2}, \text{ 或 } \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \right\}$.

注意 引入弧度制后, 使得“角度”与“实数”之间建立了一一对应关系, 这样角度就具有了实数的属性.

例 3 如图 1-5, 已知扇形 AOB 的周长为 6 cm, 该扇形的中心角为 1, 求弓形的面积.

分析 从“扇形 AOB 的周长”这个条件入手.

解 设扇形的半径为 r cm, 弧长为 l cm,

$$\text{则} \begin{cases} 2r + l = 6, \\ \frac{l}{r} = 1, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} r = 2, \\ l = 2. \end{cases}$$

$$\therefore S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2(\text{cm}^2).$$

过点 A 作 $AD \perp OB$, 垂足为 D , 如图 1-6 所示.

在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中,
 $AD = OA \cdot \sin \angle AOD = 2\sin 1$, $\therefore S_{\triangle AOB} = 2\sin 1$,
 $\therefore S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}} - S_{\triangle AOB} = 2 - 2\sin 1(\text{cm}^2)$.

注意 本题将扇形、弓形与三角形有机地结合在一起, 需充分利用三者之间的面积关系加以解决. 若过点 O 作 $OC \perp AB$, 垂足为 C , 该如何求解?

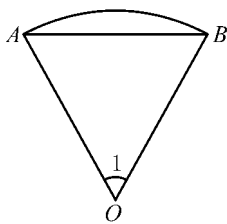


图 1-5

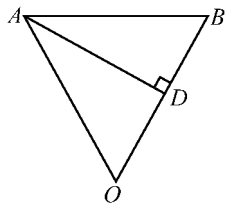


图 1-6

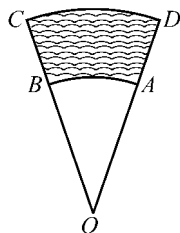
训练

A 组

- $\frac{8\pi}{5}$ 化为角度是().
 (A) 278° (B) 280° (C) 288° (D) 318°
- 若 $\alpha = -3$, 则角 α 的终边在().
 (A) 第一象限 (B) 第二象限
 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 把 $-\frac{11}{4}\pi$ 表示成 $\theta + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 的形式, 使 $|\theta|$ 最小的 θ 的值是().
 (A) $-\frac{3\pi}{4}$ (B) $-\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$
- 在半径不相等的圆中, 1 rad 的圆心角所对的().
 (A) 弦长相等
 (B) 弧长相等
 (C) 弦长等于所在圆半径
 (D) 弧长等于所在圆半径
- 若 1 rad 的圆心角所对的弦长为 2, 则这个圆心角所对的弧长为().
 (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\sin \frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{\sin \frac{1}{2}}$ (D) $2\sin \frac{1}{2}$
- 已知扇形的周长为 6 cm, 面积为 2 cm^2 , 则扇形圆心角的弧度数为().
 (A) 1 (B) 4 (C) 1 或 4 (D) 2 或 4
- 若将分针拨慢 10 min, 则分针转过的弧度数为().
 (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $-\frac{\pi}{6}$
- 在与 $\frac{3\pi}{4}$ 终边相同的所有角中, 最大的负角是_____.
- 当圆心角 α 为 -216° , 弧长为 $7\pi \text{ cm}$ 时, 其半径 r 为_____.
- 把下列各角写成 $\alpha + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 的形式, 其中 $0 \leq \alpha < 2\pi$, 并指出它们是哪个象限角:
 (1) -1500° ; (2) $-\frac{18}{7}\pi$; (3) 672° .
- 已知地球的赤道半径约为 6 370 km, 那么赤道上 1° 的圆心角所对的弧长为多少千米?



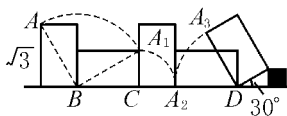
12. 如图,有一个近似于环形的水塘,测得 AB 长为 20 m, CD 长为 30 m, $AD=BC=15$ m. 现准备用来养鱼,若每平方米水面可以放鱼苗 15 尾左右,那么这个水塘中约可放多少尾鱼苗?



(第 12 题)

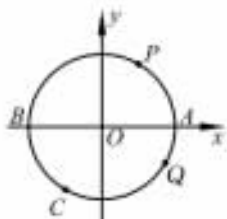
B 组

13. 已知集合 $M=\left\{x \mid x=k\pi+(-1)^k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $N=\left\{x \mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 则集合 M 与 N 之间的关系是().
- (A) $M \supsetneq N$ (B) $M \subsetneq N$
(C) $M=N$ (D) $M \cap N = \emptyset$
14. 已知一扇形的周长为 40 cm. 当它的半径等于 _____ cm 时,扇形有最大面积 _____ cm^2 .
15. 如图,已知长为 $\sqrt{3}$ dm, 宽为 1 dm 的长方形木块在桌面上做无滑动的翻滚,翻滚到第四次时被一小木板挡住,木块底面成 30° 的角. 求点 A 走过的路程的长及走过的弧度所在扇形的总面积.



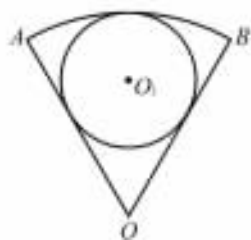
(第 15 题)

16. 如图,动点 P, Q 从点 $A(4, 0)$ 出发,沿圆周运动,点 P 按逆时针方向每秒转 $\frac{\pi}{3}$ 弧度,点 Q 按顺时针方向每秒转 $\frac{\pi}{6}$ 弧度,求点 P, Q 第一次相遇时所用的时间、相遇点的坐标及点 P, Q 各自走过的弧长.



(第 16 题)

17. 如图,“十字形”公路的交叉处周围呈扇形形状,某市规划拟在这块扇形土地上修建一个圆形广场. 已知 $\angle AOB=60^\circ$, $\widehat{AB}=100\pi$ m. 则怎样设计,广场的占地面积最大?



(第 17 题)

18. 已知视力正常的人,能读远处文字的视角不小于 $5'$.
- (1) 距离人 10 m 处所能阅读文字的大小如何?
- (2) 要看清长、宽均为 5 m 的大字标语,人距离标语最远距离为多少?

1.2 任意角的三角函数

1.2.1 任意角的三角函数

第 1 课时 任意角的三角函数(一)



例 说

例 1 已知角 α 的终边上一点 $P(x, -2)$ ($x < 0$), 且 $\cos \alpha = \frac{x}{3}$, 求 $\sin \alpha, \tan \alpha$ 的值.

分析 先由 $\cos \alpha = \frac{x}{3}$ 求出 x , 然后求 $\sin \alpha, \tan \alpha$ 的值.

解 $\because \cos \alpha = \frac{x}{3} = \frac{x}{r}, \therefore r = 3.$

又 $\because r = \sqrt{x^2 + 4} = 3, x < 0, \therefore x = -\sqrt{5}.$

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(-\sqrt{5}, -2).$

$\therefore \sin \alpha = \frac{y}{r} = -\frac{2}{3}, \tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{2}{5}\sqrt{5}.$

注意 本题若去掉 $x < 0$ 这一个条件, 则 $x = \pm\sqrt{5}$, 需分类求解.

例 2 已知 $|\sin \theta| = -\sin \theta, |\cos \theta| = -\cos \theta$, 且 $\sin \theta \cdot \cos \theta \neq 0$, 试判断点 $P(\tan \theta, \sin \theta)$ 在第几象限.



分析 需判断 $\tan\theta$ 和 $\sin\theta$ 的符号.

解 由 $|\sin\theta| = -\sin\theta$, 可知 $\sin\theta < 0$.

由 $|\cos\theta| = -\cos\theta$, 可知 $\cos\theta < 0$.

$\therefore \theta$ 是第三象限角, 故 $\tan\theta > 0$.

因此, 点 P 在第四象限.

例 3 已知函数 $f(x) = \sin \frac{\pi x}{3}$, 求 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2\ 008)$ 的值.

分析 由 $f(x) = \sin \frac{\pi x}{3}$, 易得到 $f(1) = f(7), f(2) = f(8), f(3) = f(9), \dots$ 由此猜想 $f(x+6) = f(x)$.

解 $\because \sin \frac{\pi x}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{3}x + 2\pi\right) = \sin \frac{\pi(x+6)}{3}$,
 $\therefore f(x+6) = f(x)$.
 $\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2\ 008)$
 $= [f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(6)] \times 334$
 $+ f(2\ 005) + f(2\ 006) + f(2\ 007) + f(2\ 008),$

而 $f(1) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, f(2) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$f(3) = \sin \pi = 0, f(4) = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$

$f(5) = \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, f(6) = \sin 2\pi = 0,$

$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 0,$

$\therefore$ 原式 $= f(2\ 005) + f(2\ 006) + f(2\ 007) + f(2\ 008)$

$= f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

注意 请用类似的方法解答下列问题: 已知函数

$f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$, 求 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2\ 007)$ 的值.

训练

A 组

- 若 $\cos\theta < 0$, 则 ().
 (A) θ 是第二象限角
 (B) θ 是第三象限角
 (C) θ 是第二或第三象限角
 (D) $\theta \in \left\{ \theta \mid 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 下列等式成立的是 ().
 (A) $\sin 700^\circ = \sin 20^\circ$
 (B) $\sin 370^\circ = \sin(-350^\circ)$
 (C) $\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$
 (D) $\cos \frac{25}{6}\pi = \cos\left(-\frac{19}{6}\pi\right)$
- $\sin \frac{25\pi}{6}$ 等于 ().

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

- 函数 $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{\cos x}{|\cos x|} + \frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域是 ().
 (A) $\{-1\}$ (B) $\{-1, 3\}$
 (C) $\{3\}$ (D) $\{-1, 1, 3\}$
- 下列各式为正号的是 ().
 (A) $\cos 2 - \sin 2$ (B) $\cos 2 \cdot \sin 2$
 (C) $\tan 2 \cdot \cos 2$ (D) $\sin 2 \cdot \tan 2$
- 已知 $\tan\alpha > 0$, 且 $\sin\alpha + \cos\alpha > 0$, 那么角 α 是 ().
 (A) 第一象限角 (B) 第二象限角
 (C) 第三象限角 (D) 第四象限角
- 若角 α 的终边与直线 $y = 3x$ 重合, 且 $\sin\alpha < 0$, 又 $P(m, n)$ 是 α 终边上一点, 且 $|OP| = \sqrt{10}$, 则 $m - n$ 等于 ().
 (A) 2 (B) -2 (C) 4 (D) -4
- $\cos \frac{9\pi}{4} + \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) =$ _____.
- 若 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin 2\theta} < 1$, 则 θ 是第 _____ 象限角.
- 计算: $a^2 \sin(-1\ 350^\circ) + b^2 \tan 405^\circ - (a - b)^2 \tan 765^\circ - 2ab \cos(-1\ 080^\circ).$

- 已知 $\sin\theta \cdot \cos\theta > 0$, 且 $\tan\theta \cdot \cos\theta < 0$, 求证: θ 是第三象限角.

- 已知角 α 的终边经过点 $(3a - 9, a + 2)$, 且 $\cos\alpha \leq 0$, $\sin\alpha > 0$, 求实数 a 的取值范围.

B 组

- 若 α 为第二象限角, 且 $\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right| = -\cos \frac{\alpha}{2}$, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是 ().
 (A) 第一象限角 (B) 第二象限角
 (C) 第三象限角 (D) 第四象限角
- 若三角形的两内角 A, B 满足 $\sin A \cdot \cos B < 0$, 则此三角形的形状是 ().
 (A) 锐角三角形 (B) 钝角三角形
 (C) 直角三角形 (D) 不能确定



15. 若点 $P(\tan\theta, \sin\theta + \cos\theta)$ 在第一象限内, 则角 θ 是 ().
 (A) 第一象限角 (B) 第二象限角
 (C) 第三象限角 (D) 第四象限角
16. 若 α 为第一象限角, 则 $\sin 2\alpha, \cos \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\alpha}{2}$ 中取正值的有 ().
 (A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个
17. 若 $a = \sin 125^\circ \cos 75^\circ, b = \cos 230^\circ, c = \tan 405^\circ$, 则 a, b, c 由大到小的排列是 _____.
18. 设函数 $f(x) = a \sin(\pi x + \alpha) + b \cos(\pi x + \beta)$, 其中 a, b, α, β 都是不为零的实数, 且满足 $f(2\ 000) = -1$, 求 $f(2\ 002)$ 的值.
19. 已知 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5}, \theta \in [0, \pi]$, 求 $\tan\theta$ 的值.
20. 已知角 θ 终边上一点 $P(x, 2x-3) (x \neq 0)$, 且 $\tan\theta = -x$, 求 $\sin\theta + \cos\theta$ 的值.

第2课时 任意角的三角函数(二)

例 说

例 4 已知点 $P(\sin\alpha - \cos\alpha, \tan\alpha)$ 在第一象限, 在区间 $[0, 2\pi)$ 内求 α 的取值范围.

分析 利用单位圆中的三角函数线求解.

解 由题意知

$$\begin{cases} \sin\alpha - \cos\alpha > 0, \\ \tan\alpha > 0. \end{cases}$$

如图 1-7, 由三角函数线可

$$\text{得} \begin{cases} \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{4}, \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ 或 } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ 或 } \pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}.$$

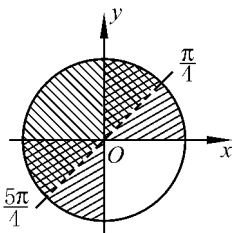


图 1-7

注意 三角函数线是利用数形结合思想解决有关问题的重要工具.

例 5 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{2\cos x - 1}; \quad (2) y = \lg(3 - 4\sin^2 x).$$

分析 根据各问题的约束条件, 利用三角函数线画出角 x 满足条件的终边及范围.

解 (1) $\because 2\cos x - 1 \geq 0, \therefore \cos x \geq \frac{1}{2}$, 如图 1-8.

$$\therefore x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbb{Z}).$$

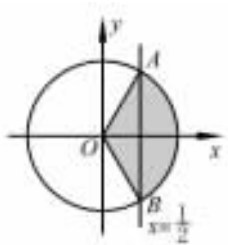


图 1-8

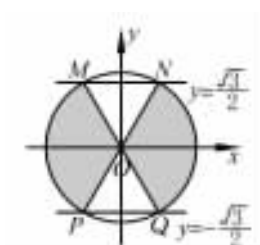


图 1-9

$$(2) \because 3 - 4\sin^2 x > 0, \therefore \sin^2 x < \frac{3}{4},$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 如图 1-9.}$$

$$\therefore x \in \left(2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{4\pi}{3}\right) (k \in \mathbb{Z}), \text{ 即 } x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right) (k \in \mathbb{Z}).$$

注意 求满足含三角函数的不等式的自变量 x 的取值范围、求三角函数的定义域及三角函数值的大小比较, 常用方法是利用三角函数线求解.

例 6 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求证: $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$.

分析 借助三角函数线来证明.

证明 如图 1-10. 设 OP 为角 α 的终边, 分别作出正弦线 MP , 正切线 AT .

$$\therefore S_{\triangle OPA} < S_{\text{扇形} OPA} < S_{\triangle OAT},$$

$$\therefore \frac{1}{2} OA \cdot MP < \frac{1}{2} OA \cdot \alpha <$$

$$\frac{1}{2} OA \cdot AT,$$

$$\therefore MP < \alpha < AT, \text{ 即 } \sin\alpha < \alpha < \tan\alpha.$$

注意 三角函数线将抽象的代数式用几何图形表示出来, 使得问题更形象直观.

训练

A 组

21. 如图, 在单位圆中, 下列有关角 α 的正弦线、正切线表示正确的是 ().

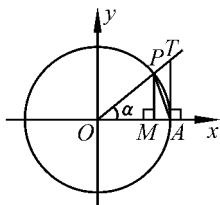
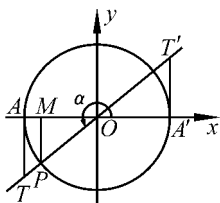


图 1-10



- (A) 正弦线 MP , 正切线 $A'T'$
 (B) 正弦线 PM , 正切线 AT
 (C) 正弦线 MP , 正切线 AT
 (D) 正弦线 PM , 正切线 $T'A'$



(第 21 题)

22. 下列条件中,能使 $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$ 成立的是().

- (A) $0 < \alpha < \pi$ (B) $0 < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
 (C) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

23. 函数 $y = \sqrt{2\cos x - 1}$ 的定义域是().

- (A) $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$
 (B) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$
 (C) $\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$
 (D) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$

24. 使 $\sin x \leq \cos x$ 成立的 x 的一个变化区间为().

- (A) $\left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right]$ (B) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
 (C) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ (D) $[0, \pi]$

25. 已知点 $P(\sin\alpha - \cos\alpha, \tan\alpha)$ 在第一象限内,则在 $[0, 2\pi]$ 内 α 的取值范围是().

- (A) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$
 (B) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$
 (C) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$
 (D) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

26. $\sin 1, \sin 1.2, \sin 1.5$ 的大小关系是().

- (A) $\sin 1 > \sin 1.2 > \sin 1.5$
 (B) $\sin 1 > \sin 1.5 > \sin 1.2$
 (C) $\sin 1.5 > \sin 1.2 > \sin 1$
 (D) $\sin 1.2 > \sin 1 > \sin 1.5$

27. 若 $\log_{\cos\theta} \sin\theta$ 有意义,则 θ 的取值范围是_____.

28. 求函数 $y = \sqrt{-\cos x} + \sqrt{\sin x}$ 的定义域.

29. 求函数 $y = \lg \sin 2x + \sqrt{9 - x^2}$ 的定义域.

30. 设 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, 试比较 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的大小.

B 组

31. 若 $\sin^2 x > \cos^2 x$, 则 x 的取值范围是().

- (A) $\left\{x \mid 2k\pi - \frac{3\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$
 (B) $\left\{x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$
 (C) $\left\{x \mid k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$
 (D) $\left\{x \mid k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

32. 求函数 $y = \sqrt{1 + 2\cos x} + \lg(2\sin x + \sqrt{3})$ 的定义域.

33. 求函数 $y = \sqrt{\sin(\cos x)}$ 的定义域.

34. 已知 $|\log_{\sin\alpha} \cos\alpha| < |\log_{\cos\alpha} \sin\alpha|$ (α 为锐角), 求 α 的取值范围.

35. 已知 α, β 是关于 x 的二次方程 $x^2 + 2(\cos\theta + 1)x + \cos^2\theta = 0$ 的两实数根, 且 $|\alpha - \beta| \leq 2\sqrt{2}$, 求 θ 的取值范围.



1.2.2 同角三角函数的基本关系

例 说

例 1 已知 $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$, 求下列各式的值:

(1) $\frac{2\cos \alpha + 3\sin \alpha}{3\cos \alpha + \sin \alpha}$;

(2) $2\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 3\cos^2 \alpha$.

分析 将所求式的“正弦、余弦”化为“正切”. 第(1)题, 分子、分母同除以 $\cos \alpha$, 第(2)题, 分母 1 用 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ 替代, 分子、分母同除以 $\cos^2 \alpha$.

解 (1) $\because \cos \alpha \neq 0, \therefore$ 原式 $= \frac{2+3\tan \alpha}{3+\tan \alpha} = -\frac{6}{5}$.

(2) 原式 $= \frac{2\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 3\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$
 $= \frac{2\tan^2 \alpha + \tan \alpha - 3}{\tan^2 \alpha + 1} = -\frac{7}{25}$.

注意 本题利用 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ 的关系, 把只含正弦和余弦的齐次分式转化为只含有正切的分式. 本题还可由 $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$, 得 $\sin \alpha = -\frac{4}{3}\cos \alpha$, 再进行整体代换求解.

例 2 (1) 求值: $\frac{\sqrt{1-2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}}{\sin 10^\circ - \sqrt{1-\sin^2 10^\circ}}$;

(2) 化简:

$$\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} - \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right) \left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} - \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right).$$

分析 将被开方式化为完全平方式, 要注意二次根号下的符号处理.

解 (1) 原式 $= \frac{\sqrt{\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ - 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}}{\sin 10^\circ - \sqrt{\cos^2 10^\circ}}$
 $= \frac{|\cos 10^\circ - \sin 10^\circ|}{\sin 10^\circ - \cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ - \cos 10^\circ} = -1$.

(2) 原式 $= \left(\sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{(1+\sin x)^2}} - \sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{(1-\sin x)^2}}\right) \cdot$
 $\left(\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}} - \sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1-\cos x)^2}}\right)$
 $= \left(\frac{|\cos x|}{1+\sin x} - \frac{|\cos x|}{1-\sin x}\right) \left(\frac{|\sin x|}{1+\cos x} - \frac{|\sin x|}{1-\cos x}\right)$
 $= \frac{|\cos x|(-2\sin x)}{\cos^2 x} \cdot \frac{|\sin x|(-2\cos x)}{\sin^2 x}$
 $= \frac{4|\sin x \cos x|}{\sin x \cos x} \left(x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right).$

$\therefore$ 当 $x \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z})$ 时, 原式 $= 4$;

当 $x \in \left(k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \pi\right) (k \in \mathbb{Z})$ 时, 原式 $= -4$.

例 3 已知函数 $f(1-\cos \alpha) = \sin^2 \alpha$, 求函数 $f(\tan \alpha)$ 的最大值与最小值.

分析 由已知条件求出函数 $f(\tan \alpha)$ 的表达式, 然后

利用 $\cos \alpha$ 对函数 $f(x)$ 定义域的限制, 确定 $\tan \alpha$ 的范围, 从而得到最大值与最小值.

解 令 $1-\cos \alpha = x$, 则 $\cos \alpha = 1-x$.

$$\therefore \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - (1-x)^2.$$

$$\therefore f(x) = 1 - (1-x)^2 = 2x - x^2.$$

$$\therefore -1 \leq \cos \alpha \leq 1,$$

$$\therefore 0 \leq 1 - \cos \alpha \leq 2, \text{ 即 } x \in [0, 2].$$

$$\therefore f(\tan \alpha) = 2\tan \alpha - \tan^2 \alpha \quad (0 \leq \tan \alpha \leq 2).$$

设 $\tan \alpha = t \quad (t \in [0, 2])$,

$$\text{则 } f(t) = -t^2 + 2t = -(t-1)^2 + 1.$$

$$\therefore f(t) \text{ 的最大值为 } f(1) = 1, f(t) \text{ 的最小值为 } f(0) = f(2) = 0.$$

故 $f(\tan \alpha)$ 的最大值为 1, 最小值为 0.

训练

A 组

1. 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 且 α 是第二象限角, 则 $\tan \alpha$ 的值为 ().

(A) $-\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) $\pm \frac{4}{3}$

2. 当 $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 时, $\cos \alpha$ 的值为 ().

(A) $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ (B) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(C) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ (D) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

3. 已知 $\sin A = \frac{12}{13}$, $-\frac{3\pi}{2} < A < -\pi$, 则 $\tan A$ 的值为 ().

(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{12}{5}$ (C) $-\frac{5}{12}$ (D) $-\frac{12}{5}$

4. 化简 $\sqrt{1-2\sin 4 \cos 4}$ 的结果是 ().

(A) $\sin 4 + \cos 4$ (B) $\sin 4 - \cos 4$
 (C) $-\cos 4 - \sin 4$ (D) $\cos 4 - \sin 4$

5. 已知 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, 则 $\frac{1+2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$ 的值为 ().

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) $-\frac{1}{3}$ (D) -3

6. 若 $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \frac{\sin x - 1}{\cos x}$, 则 x 的取值范围是 ().

(A) $2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(B) $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(C) $2k\pi + \frac{3\pi}{2} < x < 2k\pi + 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

(D) $2k\pi + \pi < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$



7. 已知 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5}$, $\theta \in (0, \pi)$, 则 $\tan\theta =$ _____.
8. 已知 $\frac{\sin^2\theta + 4}{\cos\theta + 1} = 2$, 则 $(\cos\theta + 3)(\sin\theta + 1)$ 的值为 _____.
9. 已知 $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$, 则 $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha =$ _____.
10. 已知 $\cos\varphi = \frac{1}{4}$, 求 $\sin\varphi, \tan\varphi$ 的值.

11. 已知 $3\sin\alpha = -\cos\alpha$, 求 $1 + \sin\alpha \cos\alpha$ 的值.

12. 已知 $\sin\theta, \cos\theta$ 是关于 x 的二次方程 $x^2 - (\sqrt{3}-1)x + m = 0$ ($m \in \mathbb{R}$) 的两个实数根. 求:
- (1) m 的值;
- (2) $\frac{\cos\theta - \sin\theta \tan\theta}{1 - \tan\theta}$ 的值.

B 组

13. 已知 α 是三角形的一个内角, 且 $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{3}$, 则这个三角形是 ().
- (A) 正三角形 (B) 直角三角形
(C) 锐角三角形 (D) 钝角三角形
14. 当 $2k\pi - \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq 2k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$ 时, 化简 $\sqrt{1-2\sin\alpha \cos\alpha} + \sqrt{1+2\sin\alpha \cos\alpha}$ 的结果是 ().
- (A) $2\sin\alpha$ (B) $-2\sin\alpha$
(C) $-2\cos\alpha$ (D) $2\cos\alpha$
15. 已知 $\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}$, 则下列结论成立的是 ().
- (A) $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
(C) $\sin\theta + \cos\theta = 0$ (D) $\sin\theta - \cos\theta = 0$
16. 已知 $\beta \in [0, 2\pi]$, 且 $\sqrt{1-\cos^2\beta} + \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sin\beta$

$-\cos\beta$, 则 β 的取值范围是 ().

- (A) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ (B) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
(C) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ (D) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

17. 已知 $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, 且 $\tan\alpha > 0$, 求 $\frac{\tan\alpha \cos^3\alpha}{1-\sin\alpha}$ 的值.

18. 求证: $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2(\cos\alpha - \sin\alpha)}{1+\sin\alpha + \cos\alpha}$.

19. 已知 $f(x) = 8x^2 - 6x + 2k + 1$.

- (1) 若 $f(x) = 0$ 的两个实数根分别为三角形两内角的正弦值, 求实数 k 的取值范围;
- (2) 问是否存在实数 k , 使得方程 $f(x) = 0$ 的两个实数根是直角三角形两个内角的正弦值.

1.3 三角函数的诱导公式

第1课时 三角函数的诱导公式(一)

例 说

例1 求证: $\frac{\tan(2\pi-\alpha)\sin(-2\pi-\alpha)\cos(6\pi-\alpha)}{\cos(\alpha-\pi)\sin(5\pi+\alpha)} = \tan\alpha$.

证明 $\because$ 左边 $= \frac{\tan(-\alpha)\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}{\cos[-(\pi-\alpha)]\sin(4\pi+\pi+\alpha)}$
 $= \frac{(-\tan\alpha)(-\sin\alpha)\cos\alpha}{(-\cos\alpha) \cdot (-\sin\alpha)} = \tan\alpha =$ 右边,

$\therefore$ 原等式成立.

注意 由于诱导公式中的 α 是任意角, 因此, 可以把“ $-\alpha$ ”作为一个整体看成公式中的“ α ”, 从而灵活运用诱导公式.



例2 已知 $\cos(75^\circ + \alpha) = \frac{1}{3}$, α 是第三象限角, 求 $\cos(105^\circ - \alpha) + \sin(\alpha - 105^\circ)$ 的值.

分析 利用等式 $(75^\circ + \alpha) + (105^\circ - \alpha) = 180^\circ$ 及诱导公式求解.

解 $\because (75^\circ + \alpha) + (105^\circ - \alpha) = 180^\circ$,
 $\therefore \cos(105^\circ - \alpha) = -\cos(75^\circ + \alpha) = -\frac{1}{3}$,
 $\sin(\alpha - 105^\circ) = -\sin(105^\circ - \alpha) = -\sin(75^\circ + \alpha)$.
 $\because \cos(75^\circ + \alpha) = \frac{1}{3} > 0$, α 是第三象限角,
 $\therefore 75^\circ + \alpha$ 为第四象限角,
 $\therefore \sin(75^\circ + \alpha) = -\sqrt{1 - \cos^2(75^\circ + \alpha)} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

因此, $\cos(105^\circ - \alpha) + \sin(\alpha - 105^\circ) = -\frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}$.

例3 化简: $\frac{\sin(k\pi - \alpha)\cos(k\pi + \alpha)}{\sin[(k+1)\pi + \alpha]\cos[(k+1)\pi - \alpha]}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

分析 为了便于运用诱导公式, 应对 k 分奇数和偶数进行讨论.

解 当 k 为偶数时,

$$\text{原式} = \frac{\sin(-\alpha)\cos\alpha}{\sin(\pi + \alpha)\cos(\pi - \alpha)} = \frac{-\sin\alpha \cos\alpha}{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)} = -1;$$

当 k 为奇数时,

$$\text{原式} = \frac{\sin(\pi - \alpha)\cos(\pi + \alpha)}{\sin\alpha \cos(-\alpha)} = \frac{\sin\alpha(-\cos\alpha)}{\sin\alpha \cos\alpha} = -1.$$

综上, 当 $k \in \mathbb{Z}$ 时, 原式 $= -1$.

注意 本题也可根据 $(k\pi - \alpha) + (k\pi + \alpha) = 2k\pi$, $[(k+1)\pi + \alpha] + [(k+1)\pi - \alpha] = 2(k+1)\pi$ 直接进行化简.

训练

A 组

- 如果 α, β 满足 $\alpha - \beta = \pi$, 则下列式子正确的是().
 (A) $\sin\alpha = \sin\beta$ (B) $\cos\alpha = \cos\beta$
 (C) $\tan\alpha = \tan\beta$ (D) $\sin\alpha = \cos\beta$
- 已知 $\cos(\pi + \alpha) = -\frac{1}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, 则 $\sin(3\pi + \alpha)$ 等于().
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 若 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角, 则().
 (A) $\sin(B+C) = \sin A$ (B) $\sin(B+C) = \cos A$
 (C) $\cos(B+C) = \cos A$ (D) $\tan(B+C) = \tan A$
- $\sin \frac{4\pi}{3} \cdot \cos \frac{25\pi}{6} \cdot \tan \frac{5\pi}{4}$ 的值是().

- (A) $-\frac{3}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

- 已知 $a = \tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$, $b = \cos \frac{9\pi}{4}$, $c = \sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$, 则().
 (A) $b > a > c$ (B) $a > b > c$
 (C) $b > c > a$ (D) $a > c > b$
- 对任何 $k \in \mathbb{Z}$, 都有 $\sin(\alpha + k\pi) = \cos(\alpha + \pi + k\pi)$, 则角 α 的值是().
 (A) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (B) $k\pi + \frac{3\pi}{4}$
 (C) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (D) $k\pi - \frac{3\pi}{4}$
- 已知角 α 的终边经过点 $(-1, \sqrt{2})$, 则 $\cos(6\pi + \alpha)$ 的值是_____.
- 若 $\cos 165^\circ = a$, 则 $\tan 195^\circ =$ _____.
- 已知 $\sin(3\pi + \theta) = \lg \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$, 求 $\frac{\cos(\pi + \theta)}{\cos\theta[\cos(\pi - \theta) - 1]} + \frac{\cos(\theta - 2\pi)}{\cos\theta\cos(\pi - \theta) + \cos(\theta - 2\pi)}$ 的值.

- 已知 $\tan\left(\alpha + \frac{8}{7}\pi\right) = a$, 求证:

$$\frac{\sin\left(\frac{15\pi}{7} + \alpha\right) + 3\cos\left(\alpha - \frac{13}{7}\pi\right)}{\sin\left(\frac{20}{7}\pi - \alpha\right) - \cos\left(\alpha + \frac{22}{7}\pi\right)} = \frac{a+3}{a+1}.$$

- 已知函数 $f(\theta) = \frac{2\cos^3\theta + \sin^2(2\pi - \theta) + \cos(-\theta) - 3}{2 + 2\cos^2(\pi + \theta) + \cos(2\pi - \theta)}$, 求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 的值.