

新 教 材

# 数 学

---



---

高中二年级第一学期用

主 编 忻再义

上海科学技术出版社

# 出 版 说 明

这套同步分层导学丛书以上海市二期课改新教材为依据,内容紧密配合教材.本丛书按每学期一册编写,旨在同步地对课堂内容进行辅导,为学生提供训练机会,并成为课堂教学的有益的参考辅导读物.

本丛书将每章内容按单元进行划分,每一单元由[综合导学]、[随堂应用]、[分层达标]等栏目组成,每章末还有[阅读与欣赏]、[研究性学习]等栏目.整本书中附有[阶段测试]、[期末测试]及[参考答案]等.

[综合导学]按这一单元的知识要点、例题剖析、思维误区、方法指导、请你思考等进行编写.

[随堂应用]按课时需要编写,每一单元可根据内容分成多个[随堂应用],每个[随堂应用]安排3~5题与课堂教学内容密切相关的练习题,供学生课后复习巩固之用.其内容的深浅、顺序与课堂内容一致.

[分层达标]对本单元的有关知识以试卷形式让学生进行训练,分为基础型、提高型两组题目.

[阅读与欣赏]根据二期课改的新理念编写,旨在开拓学生的眼界,提高学生的学习兴趣.

[研究性学习]根据二期课改的新理念编写,旨在让学生在探究的过程中,培养其创新能力.

[阶段测试]供学生在每学期期中复习时使用安排两份阶段测试练习题.

[期末测试]供学生在每学期期末复习时使用安排两份期末测试练习题.

[参考答案]给出了[随堂应用]、[分层达标]、[阶段测试]、[期末测试]的答案,对有难度的题目,进行详细解答.

本册主编为忻再义,参加本册编写的有:熊秋菊(第7章第一至四单元)、赵岩(第7章第五至六单元、第9章)、阮瑾怡(第8章)、杨侃(第10章)等.本册由忻再义统稿.



# 目

# 录

第7章 数列与数学归纳法 .....	1
第一单元 数列 .....	1
综合导学 .....	1
随堂应用 .....	3
分层达标 .....	4
第二单元 等差数列 .....	5
综合导学 .....	5
随堂应用 .....	10
分层达标 .....	11
第三单元 等比数列 .....	13
综合导学 .....	13
随堂应用 .....	17
分层达标 .....	18
第四单元 数学归纳法 .....	21
综合导学 .....	21
随堂应用 .....	25
分层达标 .....	26
第五单元 数列的极限和运算 .....	27
综合导学 .....	27
随堂应用 .....	32
分层达标 .....	33
第六单元 无穷等比数列各项的和 .....	36
综合导学 .....	36
随堂应用 .....	40
分层达标 .....	41
阅读与欣赏 .....	43
研究性学习 .....	44
阶段测试 .....	46
A 卷 .....	46
B 卷 .....	47
第8章 平面向量的坐标表示 .....	50
第一单元 向量及向量的加减法 .....	50
综合导学 .....	50
随堂应用 .....	52
分层达标 .....	52
第二单元 实数与向量的乘积 .....	54
综合导学 .....	54
随堂应用 .....	55



# 目

# 录

分层达标 .....	56
第三单元 向量的坐标表示及其运算 .....	57
综合导学 .....	57
随堂应用 .....	59
分层达标 .....	60
第四单元 向量的数量积 .....	61
综合导学 .....	61
随堂应用 .....	65
分层达标 .....	65
第五单元 平面向量的分解定理 .....	66
综合导学 .....	66
随堂应用 .....	69
分层达标 .....	70
第六单元 向量的应用 .....	71
综合导学 .....	71
随堂应用 .....	73
分层达标 .....	73
阅读与欣赏 .....	74
研究性学习 .....	75
第9章 矩阵和行列式初步 .....	77
第一单元 矩阵的概念和运算 .....	77
综合导学 .....	77
随堂应用 .....	83
分层达标 .....	84
第二单元 二阶行列式 .....	88
综合导学 .....	88
随堂应用 .....	91
分层达标 .....	92
第三单元 三阶行列式 .....	94
综合导学 .....	94
随堂应用 .....	98
分层达标 .....	99
阅读与欣赏 .....	102
研究性学习 .....	103
第10章 算法初步 .....	105
综合导学 .....	105
随堂应用 .....	112



分层达标 .....	117
阅读与欣赏 .....	123
期末测试 .....	126
A 卷 .....	126
B 卷 .....	127
提示与参考答案 .....	130

# 目

# 录



## 第7章

# 数列与数学归纳法

### 第一单元 数 列

#### 综合导学

#### 知识要点

1. 理解数列的概念;知道数列的表示法.
2. 理解有穷数列、无穷数列的概念.
3. 掌握数列的通项公式的概念;能根据数列的通项公式写出数列的项.

#### 例题剖析

例1 已知下列数列的前四项,试写出它的一个可能的通项公式.

$$(1) \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots;$$

$$(2) 1, 3, 6, 10, \dots.$$

分析 本例给出了数列的前四项求通项,一般可先观察分析各项的特点:如(1)中所给的奇数项为正,偶数项为负,从而第 $n$ 项的符号为 $(-1)^{n+1}$ ,而各项分子是自然数,分母比分子大1,这样其中的规律就很明显了;(2)中的各项先乘以2再除以2,并将所得数的分子分解成两个连续正整数的积,即可找到规律.

解 (1)  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ ;

(2) 观察,得  $1 = \frac{1 \times 2}{2}$ ,  $3 = \frac{2 \times 3}{2}$ ,  $6 = \frac{3 \times 4}{2}$ ,  $10 = \frac{4 \times 5}{2}$ ,

$$\therefore a_n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

例2 已知数列 $\{a_n\}$ 中的奇数项都是1,偶数项都是0,有下列各式:

$$(1) a_n = \begin{cases} 1, & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } n=2k \text{ 时} \end{cases} \quad (k \in \mathbf{Z}^+); \quad (2) a_n = \left| \sin \frac{n\pi}{2} \right|.$$

问:(1)、(2)都能作为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式吗?

分析 知道一个数列的通项公式,只要分别代入项数 $n$ 的值就可以得到数列相应的项 $a_n$ .反过来,除所有项都给出的数列外,要唯一地确定一个数列,一般应给出它的通项公式.

解 (1) 易检验:当 $n$ 为奇数时, $a_n=1$ ;当 $n$ 为偶数时, $a_n=0$ .

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1, & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } n=2k \text{ 时} \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}^+ \text{ 可以表示已知数列的通项公式;}$$



(2) 当  $n=1$  时,  $a_1 = \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = 1$ ,

当  $n=2$  时,  $a_1 = \left| \sin \frac{2\pi}{2} \right| = 0, \dots$ ,

即当  $n=2k-1(k \in \mathbf{Z}^+)$  时,

$$a_n = \left| \sin \frac{n\pi}{2} \right| = \left| \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} \right| = \left| \sin \left( k\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right| = 1;$$

当  $n=2k(k \in \mathbf{Z}^+)$  时,  $a_n = \left| \sin \frac{n\pi}{2} \right| = \left| \sin \frac{2k\pi}{2} \right| = |\sin k\pi| = 0$ .

所以,  $a_n = \left| \sin \frac{n\pi}{2} \right|$  也可以表示已知数列的通项公式.

说明 一个数列的通项公式的形式不唯一,反之,已知一个数列的通项公式就唯一地确定了这个数列中的每一项.

思考 你还能写出本例其他形式的通项公式吗?

例 3 有下列四个命题:

- (1) 任何数列都有通项公式;
- (2) 数列  $1, 2, 3, \dots, 98, 99$  共有 99 项;
- (3) 任何数列都有首项和末项;
- (4) 数列  $1, 2, 3$  与数列  $3, 2, 1$  是两个不同的数列.

其中真命题的个数为( ).

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3

分析 (1)如果数列  $\{a_n\}$  的第  $n$  项  $a_n$  与  $n$  之间的关系可以用一个公式来表示,那么这个公式就叫做这个数列的通项公式.不是每一个数列都是有“规律”可寻,因此,有些无穷数列是无法找到其通项公式的;(2)因为未给出数列的通项公式,所以无法断言数列  $1, 2, 3, \dots, 98, 99$  共有 99 项;(3)无穷数列无法确定哪一项是末项;(4)数列的定义为:按一定次序排列起来的一列数叫做数列,虽然  $1, 2, 3$  与  $3, 2, 1$  中数字一样,但表示不同的数列.

解 选 B,只有(4)是真命题.

例 4 根据图 7-1 所示及相应的点数,写出一个由这些图形的点数组成的数列的前 5 项及此数列的递推公式.

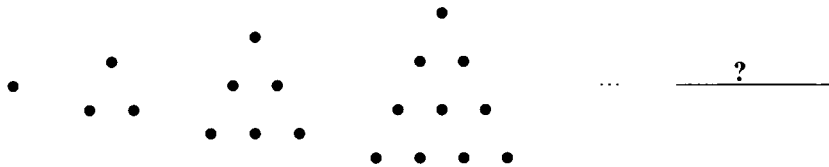


图 7-1

分析 图 7-1 中的点数组成的数列的前 4 项为  $1, 3, 6, 10$ .其中  $3=1+2, 6=3+3, 10=6+4$ ,所以第 5 个图的点数可以为  $10+5=15$ ,递推式的后一项可以等于它前一项加上这一项的项数.

解 图中点数所组成的一个数列的前 5 项可以为

$$1, 3, 6, 10, 15.$$

递推公式可以为 
$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n + n. \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*)$$



## 思维误区

例 5 有下列四个命题:

(1) 数列 1, 3, 5, 7, 9 的一个通项公式是

$$a_n = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^* ;$$

(2)  $b, b, b, b, \dots$  ( $b$  为常数) 是一个常数列;

(3) 集合  $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}^*\}$  可以表示由正偶数按从小到大的次序排列所得的数列;

(4) 已知数列  $\{a_n\}, a_n = 2n - 10$  从第 6 项起各项都是正数.

其中是真命题的序号是\_\_\_\_\_.

错解 (1), (2), (3), (4).

分析 对(1)尽管给出了通项公式,但已知数列是一个只有 5 项的有穷数列,因此,通项公式中应对  $n$  的范围加以限制,所以(1)为假命题;(2)中给出了数列的前 4 项,无法断言后面的各项是否都是  $b$ ,所以(2)也是假命题;(3)因为集合  $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}^*\}$  表示每个正偶数都是这个集中的元素,其他的数都不是这个集中的元素.而对这个集合的元素却没有也无须规定排列的次序,所以不能用集合表示数列,所以(3)也是假命题.只有(4)是真命题.

正解 (4).

## 方法指导

例 6 对于任意的正数  $n$ ,若数列  $\{a_n\}$  中都有  $a_{n+1} > a_n$ ,则称数列  $\{a_n\}$  为递增数列;反之  $a_{n+1} < a_n$ ,则称数列  $\{a_n\}$  为递减数列.判断下列数列是递增数列还是递减数列?

(1)  $a_n = 3n - 1$ ;      (2)  $a_n = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ;      (3)  $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ .

分析 本题需比较数列前、后项的大小,常用的方法为比较法.

解 (1) 对任意的正整数  $n$ ,

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 1 - 3n + 1 = 3 > 0, \therefore a_{n+1} > a_n.$$

所以,数列  $\{a_n\}$  为递增数列;

(2) 对任意的正整数  $n$ ,

$$\because a_1 = -\frac{3}{2}, a_2 = \frac{3}{4}, a_3 = -\frac{3}{8}, \dots,$$

数列  $\{a_n\}$  既不是递增数列也不是递减数列.

(3)  $\because a_n = 2 - \frac{3}{n+1}$ ,

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 2 - \frac{3}{n+1+1} - 2 + \frac{3}{n+1} = \frac{3}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

所以数列  $\{a_n\}$  为递增数列.

## 随堂应用

应用 数列

1. 若数列  $\{a_n\}$  的通项为  $a_n = n^2 - 1$ ,则 99 为该数列的第\_\_\_\_\_项.

2. 数列  $-1, \frac{6}{5}, -\frac{9}{7}, \frac{4}{3}, \dots$  的一个通项公式为\_\_\_\_\_.



3. 在数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_n = \frac{3^n}{n+1}$ , 则它的前 5 项分别为 \_\_\_\_\_.
4. 在数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_n = 2n^2 - n - 1$ ,
- (1) 写出  $a_8, a_{n+1}$ ;
  - (2) 问 20 是否是数列  $\{a_n\}$  中的项? 若是, 是第几项? 若不是, 说明理由.

## 分层达标

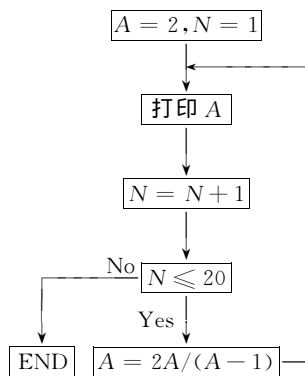
### 基础型

#### 一、填空题

1. 命题“任一数列都有通项公式”是 \_\_\_\_\_ (填“真”或“假”)命题.
2. “数列的递推公式是唯一确定的”是 \_\_\_\_\_ (填“真”或“假”)命题.
3. 数列  $\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}, \frac{9}{10}, -\frac{16}{17}, \dots$  的一个通项公式可以为 \_\_\_\_\_.
4. 若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1}a_n = a_n + (-2)^n$ , 且  $a_1 = 1$ , 则  $\frac{a_4}{a_2} =$  \_\_\_\_\_.

#### 二、解答题

5. 在数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  的每相邻两项中间插入 3 个数, 若所得数列构成一个新数列, 则新数列的第 29 项是原数列的第几项?
6. 根据下列流程框图, 试建立数列的递推公式.



(第 6 题)

7. 在数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_n = \frac{n+1}{n-1}, 2 \leq n \leq 30, n \in \mathbf{N}^*$ , 且  $a_1 = 0$ , 问该数列是否存在数值最大的项? 若存在求出最大项的值; 若不存在, 试说明理由.

### 提高型

#### 一、填空题

1. 写出下列数列的一个通项公式.
  - (1)  $5, 9, 13, 17, 21, \dots, a_n =$  \_\_\_\_\_;
  - (2)  $3, 5, 9, 17, 33, \dots, a_n =$  \_\_\_\_\_;
  - (3)  $9, 99, 999, 9\,999, 99\,999, \dots, a_n =$  \_\_\_\_\_;

(4)  $7, 77, 777, 7\ 777, 77\ 777, \dots, a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 写出下列数列的一个递推式.

(1)  $2, -4, 8, -16, 32, \dots$  \_\_\_\_\_;

(2)  $1, 4, 7, 10, 13, \dots$  \_\_\_\_\_;

(3)  $1, 0, -1, -2, -3, \dots$  \_\_\_\_\_.

3. 若数列为:  $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, 3, \sqrt{11}, \dots, \sqrt{2n+1}, \dots$ , 则  $3\sqrt{3}$  是此数列的第 \_\_\_\_\_ 项.

### 二、选择题

4. 数列  $1, \underbrace{2, 2}_{2\text{个}}, \underbrace{3, 3, 3}_{3\text{个}}, \underbrace{4, 4, 4, 4}_{4\text{个}}, \dots, \underbrace{n, n, \dots, n}_{n\text{个}}, \dots$  中, 第 100 项是( ).

(A) 10 (B) 13 (C) 14 (D) 100

5. 已知数列  $\{a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$  中的奇数项都是 1, 偶数项都是  $-1$ , 有下列各式:

①  $a_n = (-1)^{n-1}$ ;      ②  $a_n = \sin \frac{2n-1}{2} \pi$ ;      ③  $a_n = \tan \frac{2n-1}{4} \pi$ .

那么其中能作为数列  $\{a_n\}$  的通项公式的个数为( ).

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

### 三、解答题

6. 已知数列  $\{a_n\}$  的第一项是 1, 以后各项由公式  $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$  给出, 写出这个数列的前 5 项, 并判断  $\frac{13}{9}$  是不是此数列中的项?

7. 在数列  $\{a_n\}$  中, 通项公式  $a_n$  是  $n$  的二次函数, 若  $a_2 = 3, a_5 = 8$ , 则数列  $\{a_n\}$  能否确定? 若能确定, 请求出通项公式; 若不能确定, 请添加条件, 使之能确定, 并求出相应的通项公式.



## 第二单元 等差数列

### 综合导学

#### 知识要点

1. 掌握等差数列的概念, 会求等差数列的公差与通项公式.
2. 掌握等差中项的概念, 会求两个数的等差中项.
3. 掌握等差数列前  $n$  项之和的概念, 会求已知等差数列的前  $n$  项和.

#### 例题剖析

例 1 (1) 已知等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_3 = 14, a_{10} = 35$ , 求  $a_{29}$ ;

(2) 已知  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  是等差数列, 且  $a_4 = 6, a_6 = 4$ , 求  $a_{10}$ .

分析 利用等差数列的通项公式及已知的条件, 可得到关于首项和公差的两个方程. 解方程组即可得到首项与公差的值, 从而可求出所要求的值.

解 (1) 设数列  $\{a_n\}$  的首项为  $a_1$ , 公差为  $d$ , 则

$$a_3 = 14 = a_1 + (3-1)d. \quad ①$$

$$a_{10} = 35 = a_1 + (10-1)d. \quad ②$$

联立①、②解方程组, 得

$$a_1 = 8, d = 3.$$

$$\therefore a_{29} = a_1 + (29-1)d = 8 + 28 \times 3 = 92;$$

(2) 设数列  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  的首项为  $\frac{1}{a_1}$ , 公差为  $d$ , 则

$$\frac{1}{a_4} = \frac{1}{6} = \frac{1}{a_1} + (4-1)d, \quad ①$$

$$\frac{1}{a_6} = \frac{1}{4} = \frac{1}{a_1} + (6-1)d. \quad ②$$

联立①、②解方程组, 得

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{24}, d = \frac{1}{24}.$$

$$\therefore \frac{1}{a_{10}} = \frac{1}{24} + 9 \times \frac{1}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}. \text{ 即 } a_{10} = \frac{12}{5}.$$

说明 本例也可按以下方法不求  $a_1$ , 通过求  $d$  后, 直接求解.

$$(1) \text{ 由 } a_{10} = a_3 + (10-3)d, \text{ 得 } d = \frac{a_{10} - a_3}{7} = 3, \text{ 故 } a_{29} = a_{10} + (29-10)d = 92;$$

$$(2) \text{ 由 } \frac{1}{a_6} = \frac{1}{a_1} + (6-1)d, \text{ 得 } d = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}{5} = \frac{1}{24}, \text{ 故 } \frac{1}{a_{10}} = \frac{1}{a_6} + (10-6)d = \frac{5}{12}, a_{10} = \frac{12}{5}, \text{ 其解题}$$

依据见例 2.

例 2 已知数列  $\{a_n\}$  为等差数列,  $d$  为公差,  $a_m$  为数列的第  $m$  项, 试用  $a_m$  表示  $a_n$ .

分析 由等差数列的通项公式可将  $a_m$  用  $a_1$  表示, 由此可得用  $a_m$  表示  $a_1$  的式子, 再代入数列的通项公式中即可.

$$\text{解 } \because a_m = a_1 + (m-1)d, \therefore a_1 = a_m - (m-1)d.$$

代入  $a_n = a_1 + (n-1)d$ , 得

$$a_n = a_m - (m-1)d + (n-1)d = a_m + (n-m)d.$$

即  $a_n = a_m + (n-m)d. (m, n \in \mathbf{N}^*)$

说明 不妨设  $m < n$ , 显然数列  $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$  也是等差数列, 它的首项为  $a_m$ , 公差仍为  $d$ ,  $a_m$  为第 1 项,  $a_n$  为第  $n - (m-1)$  项. 对这个数列应用通项公式, 得

$$a_n = a_m + [n - (m-1) - 1]d = a_m + (n-m)d.$$

当  $n < m$  时, 有  $a_m = a_n + (m-n)d$ , 同样可得  $a_n = a_m + (n-m)d$ .

例 3 已知在等差数列  $\{a_n\}$  中, 若对正整数  $m, n, s, t$  满足  $m+n=s+t$ , 则可证明等式  $a_m + a_n = a_s + a_t$  成立.

分析 用首项和公差来表示  $a_m + a_n, a_s + a_t$  即可证得.

证明 设数列  $\{a_n\}$  的首项为  $a_1$ , 公差为  $d$ , 则

$$a_m + a_n = 2a_1 + (m+n-2)d,$$

$$a_s + a_t = 2a_1 + (s+t-2)d.$$

而  $m+n=s+t, \therefore a_m + a_n = a_s + a_t.$



**例 4** (1) 已知等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_2=15, a_8=-3, S_n$  表示其前  $n$  项和, 求满足  $S_n=63$  的所有  $n$  值;

(2) 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1=-60, a_5=-48$ , 求数列  $\{|a_n|\}$  的前 30 项之和.

**分析** (1) 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_2, a_8$ , 利用其通项公式求出首项和公差, 然后用等差数列前  $n$  项和公式求出  $S_n$ , 解方程  $S_n=63$  即可; (2) 要求数列  $\{|a_n|\}$  的前 30 项之和, 关键是要确定原数列  $\{a_n\}$  中有多少项为负值.

**解** (1) 设首项为  $a_1$ , 公差为  $d$ , 则

$$a_8 = a_2 + 6d.$$

$$\because a_2 = 15, a_8 = -3,$$

$$\therefore d = -3, a_1 = 18.$$

$$\therefore 63 = S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 18n - \frac{n(n-1)}{2} \times 3,$$

即  $n^2 - 13n + 42 = 0.$

解方程, 得  $n=6$  或  $n=7.$

$\therefore$  满足  $S_n=63$  的所有  $n$  值为 6 或 7.

(2)  $\because a_5 = a_1 + 4d$ , 即  $-48 = -60 + 4d$ ,  $\therefore d = 3.$

$$a_n = -60 + 3(n-1) = 3n - 63.$$

当  $1 \leq n \leq 20, n \in \mathbf{N}^*$  时,  $a_n < 0.$

当  $n=21$  时,  $a_n = 0;$

当  $n \geq 22, n \in \mathbf{N}^*$  时,  $a_n > 0.$

$$\begin{aligned} \therefore & |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{30}| \\ &= -a_1 - a_2 - \cdots - a_{20} + a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{30} \\ &= S_{30} - 2S_{20} = \frac{-60+27}{2} \times 30 - 2 \times \frac{-60+(-3)}{2} \times 20 \\ &= 765. \end{aligned}$$

**例 5** 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n = n^3 + 3n + 1$ , 求数列的通项公式.

**分析** 利用数列的前  $n$  项和  $S_n$  与  $a_n$  的关系式时, 特别要注意检验  $a_n$  对  $n=1$  时的情况.

**解**  $a_1 = S_1 = 5,$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^3 + 3n + 1 - (n-1)^3 - 3(n-1) - 1 \\ &= 3n^2 - 3n + 4. \end{aligned}$$

当  $n=1$  时,  $3n^2 - 3n + 4 = 4 \neq a_1,$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 5, & \text{当 } n=1 \text{ 时;} \\ 3n^2 - 3n + 4, & \text{当 } n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N} \text{ 时.} \end{cases}$$

**例 6** 等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1=2$ , 且该数列的前 3 项之和等于前 11 项之和, 求当  $n$  为何值时,  $S_n$  最大?

**分析** 求  $S_n$  最值的常见方法为把  $S_n$  表示为  $n$  的函数, 然后用求函数最值的方法求解. 要把  $S_n$  表示为  $n$  的函数, 根据已知条件只要求出公差  $d$ . 该题也可用等差数列中项的正负来求  $S_n$  的最大值.

**解法一**  $a_1=2, S_3=S_{11},$



即  $3a_1 + \frac{3(3-1)}{2}d = 11a_1 + \frac{11(11-1)}{2}d$ .

解方程, 得  $d = -\frac{4}{13}$ .

$$S_n = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \left(-\frac{4}{13}\right) = -\frac{2}{13}n^2 + \frac{28}{13}n$$

$$= -\frac{2}{13}(n-7)^2 + \frac{98}{13}.$$

所以当  $n=7$  时,  $S_n$  最大.

解法二  $\because S_3 = S_{11}$ ,

即  $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{11}$ ,

$\therefore a_4 + a_5 + \dots + a_{10} + a_{11} = 0$ .

又  $\because a_4 + a_{11} = a_5 + a_{10} = a_6 + a_9 = a_7 + a_8$ ,

$\therefore a_7 + a_8 = 0$ , 又  $a_1 = 2 > 0$ ,

$\therefore a_7 > 0, a_8 < 0$ .

$\therefore n=7$  时,  $S_n$  最大.

解法三 由解法一, 得  $d = -\frac{4}{13}$ .

由  $a_n = 2 + (n-1) \left(-\frac{4}{13}\right) \geq 0$ , 得  $n \leq \frac{13}{2} + 1$ .

$\therefore n=7$  时,  $S_n$  最大.



### 思维误区

例 7 数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1, a_2, a_3$  成等差数列且它们的和为 15,  $a_4, a_5, a_6$  满足:  $a_5^2 = a_4 a_6, a_4 a_5 a_6 = 27$ , 且对任意  $n \in \mathbf{N}^*$  均有  $a_{n+6} = a_n$ .

(1) 求  $a_2, a_5, a_8$  的值;

(2) 求数列  $\{a_{3k-1}\} (k \in \mathbf{N}^*)$  的前 101 项的和.

说明 该题的思维误区出现在第(2)小题上.

错解 (1)  $\because a_1, a_2, a_3$  成等差数列, 即  $a_1 + a_3 = 2a_2$ , 且  $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ ,

$\therefore a_2 = 5$ .

又  $\because a_5^2 = a_4 a_6, a_4 a_5 a_6 = 27$ ,

$\therefore a_5 = 3$ .

又  $\because n \in \mathbf{N}^*, a_{n+6} = a_n$ ,

$\therefore a_8 = a_{2+6} = a_2 = 5$ ,

$\therefore a_2, a_5, a_8$  的值分别为 5, 3, 5;

(2) 数列  $\{a_{3k-1}\} (k \in \mathbf{N}^*)$  的前 101 项和为

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{101}.$$

由题目中条件无法求出  $a_1, a_3, a_4, a_6, \dots$  等项, 所以无法求出数列  $\{a_{3k-1}\} (k \in \mathbf{N}^*)$  的前 101 项的和.

分析 以上解不出的原因是没理解数列  $\{a_{3k-1}\}$  与原数列  $\{a_n\}$  的关系. 数列  $\{a_{3k-1}\}$  由原数列  $\{a_n\}$  中的



第2项作为第1项,第5项作为第2项,……,第 $3k-1$ 项作为第 $k$ 项组成.所以数列 $\{a_{3k-1}\}_{k \in \mathbf{N}^*}$ 的前101项和为:

$$a_2 + a_5 + a_8 + a_{11} + \cdots + a_{3 \times 101 - 1}.$$

**正解** 由题意数列 $\{a_{3k-1}\}_{k \in \mathbf{N}^*}$ 的前101项和为

$$S = a_2 + a_5 + a_8 + a_{11} + \cdots + a_{3 \times 101 - 1},$$

$$\because a_{n+6} = a_n, n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore a_{11} = a_5 = 3,$$

$$a_{14} = a_8 = a_2 = 5.$$

以此类推  $a_{3 \times 101 - 1} = a_2 = 5,$

$$\therefore S = 50 \times 3 + 51 \times 5 = 405.$$

## 方法指导



**例8** 已知数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列,且 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ,试问数列 $\{b_n\}$ 能否为等差数列?如能,写出一个满足条件的 $\{b_n\}$ ;如不能,请说明理由.

**分析** 本题是一道开放题,帮助理解等差数列的意义,同时也为后面构造等差数列作准备.

**解** 由 $b_n = a_{n+1} - a_n$ 为等差数列可知

$$b_{n+1} - b_n = d,$$

即  $(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = d,$

$$a_{n+2} = d + 2a_{n+1} - a_n.$$

由上述递推式,只要给出 $a_1, a_2$ 及 $d$ 就可相应地得到数列 $\{b_n\}$ .

如 $a_1 = 1, a_2 = 3, d = 2$ 可得数列:

1, 3, 7, 13, 21, ...

**例9** 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为2,公差为2.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项的和 $S_n$ ;

(2) 求 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ ;

(3) 若对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ,都存在整数 $m$ ,使得 $\frac{m}{12} < T_n$ ,则整数 $m$ 的最大值为何值.

**分析** (1) 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项、公差已知,所以只需直接应用等差数列前 $n$ 项和公式求解;(2)由(1)可得 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的通项公式,然后用“裂项相消”求其前 $n$ 项和 $T_n$ .(3)由数列的单调性求 $T_n$ 的最小值,从而可求得 $m$ 的最大值,这也是“恒成立”问题的一种通法.

**解** (1)  $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 = 2, d = 2$ ,则

$$a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n,$$

$$\therefore S_n = n(n+1);$$

$$(2) \frac{1}{S_n} = \frac{1}{n(n+1)},$$

$$\begin{aligned} \therefore T_n &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$



$$=1 - \frac{1}{n+1};$$

$$(3) T_{n+1} - T_n = 1 - \frac{1}{n+2} - 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} > 0,$$

$$\therefore T_{n+1} > T_n.$$

$\therefore T_n$  随  $n$  的增大而增大,

即 当  $n=1$  时  $(T_n)_{\min} = T_1 = \frac{1}{2}$ .

对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 有  $\frac{m}{12} < \frac{1}{2}$ , 得  $m < 6$ ,

所以整数  $m$  的最大值是 5.

### 随 堂 应 用

#### 应用 等差数列

##### 一、选择题

1. 下列数列中, 成等差数列的是( ).

(A)  $\sin^2 \alpha, 1, \cos^2 \alpha$

(B)  $\cos^2 \alpha, \cos 2\alpha, -\sin^2 \alpha$

(C)  $-\tan^2 \alpha, 1, \sec^2 \alpha$

(D)  $\tan 150^\circ, \tan 30^\circ, \tan 60^\circ$

2. 若数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = -3n - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ , 则这个数列是一个( ).

(A) 以  $-5$  为首项,  $3$  为公差的等差数列

(B) 以  $-5$  为首项,  $-3$  为公差的等差数列

(C) 以  $-2$  为首项,  $3$  为公差的等差数列

(D) 以  $-2$  为首项,  $-3$  为公差的等差数列

3. 由下列的递推公式, 可以确定数列  $\{a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$  为等差数列的是( ).

(A)  $\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} + 1 = (a_n + 1) + 3 \end{cases}$

(B)  $\begin{cases} a_1 = 2, \\ |a_{n+1}| = |a_n| + 3 \end{cases}$

(C)  $\begin{cases} a_1 = 2, \\ \sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + 3 \end{cases}$

(D)  $\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1}^2 = a_n^2 + 3 \end{cases}$

##### 二、填空题

4. 若  $2, \log_3 x^2, -4$  三数成等差数列, 则实数  $x =$  \_\_\_\_\_.

5. 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_2 = 3, a_5 = 9$ , 则  $a_{20} =$  \_\_\_\_\_.

6. 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 若公差  $d = 1, a_4 + a_{17} = 8$ , 则  $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} =$  \_\_\_\_\_.

7. 若数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的和为  $S_n = 3n^2 + n + 1$ , 则此数列的通项公式  $a_n =$  \_\_\_\_\_.

##### 三、解答题

8. 已知数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 且  $a_1 = 2$ , 它的前 5 项和为  $S_5 = 17$ . 求它的前  $n$  项和  $S_n$ , 并求  $S_{12}$ .

9. 设  $S_n$  和  $T_n$  分别是两个等差数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的前  $n$  项之和, 若对于  $n \in \mathbf{N}^*$ , 都有  $S_n : T_n = (7n+1) : (4n+27)$ , 求  $a_{11} : b_{11}$  的值.

10. 在等差数列中, 已知  $a_1 = 25, S_9 = S_{17}$ , 问数列前多少项之和最大? 并求此最大值.



## 分层达标

### 基础型

#### 一、选择题

1. 在 1 与 25 之间插入 5 个数,若所得 7 个数成等差数列,则这 5 个数是( ).  
 (A) 3,7,11,15,19 (B) 4,8,12,16,20  
 (C) 5,9,13,17,21 (D) 6,10,14,18,22
2. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,若  $a_1+3a_8+a_{15}=120$ ,则  $2a_9-a_{10}$  的值为( ).  
 (A) 24 (B) 22 (C) 20 (D) -8
3. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,若  $a_{10}=301, a_{20}=601$ ,则 451( ).  
 (A) 是该数列的第 14 项 (B) 是该数列的第 15 项  
 (C) 是该数列的第 16 项 (D) 不是这个数列的项
4. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,若  $S_5=40, S_{10}=130$ ,则  $S_{17}$  的值为( ).  
 (A) 300 (B) -300 (C) 340 (D) -340
5. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的首项是 1,若从它的第 10 项起每项均比 0 小,则该数列公差的范围是( ).  
 (A)  $d > -\frac{1}{8}$  (B)  $d < -\frac{1}{9}$   
 (C)  $-\frac{1}{8} < d \leq -\frac{1}{10}$  (D)  $-\frac{1}{8} \leq d < -\frac{1}{9}$

#### 二、填空题

6. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,若前  $n$  项和  $S_n=2n^2-3n$ ,则公差  $d=$ \_\_\_\_\_.
7. 等差数列  $\{a_n\}$  中,已知  $a_4+a_7+a_{10}=17, a_4+a_5+a_6+\dots+a_{14}=77$ . 若  $a_k=13$ ,则  $k=$ \_\_\_\_\_.
8. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,满足  $3a_4=7a_7$ ,且  $a_1>0, S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,若  $S_n$  取得最大值,则  $n=$ \_\_\_\_\_.
9. 若数列  $-1, a_1, a_2, -4$  成等差数列,  $-1, b_1, b_2, b_3, -4$  也成等差数列,则  $\frac{a_2-a_1}{b_2}$  的值为\_\_\_\_\_.
10. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,若  $a_1+a_2+\dots+a_{10}=p, a_{n-9}+a_{n-8}+\dots+a_n=q(n>10, n \in \mathbf{N}^*)$ , 则  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n=$ \_\_\_\_\_.

#### 三、解答题

11. 在数列  $\{a_n\}$  中,已知  $a_n \neq 0$ ,且  $a_1=3, \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 2(n \in \mathbf{N}^*)$ ,求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.
12. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,若  $a_1+a_2+\dots+a_n=S_n$ .  
 (1) 证明:  $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$  也成等差数列;  
 (2) 已知  $S_{10}=20, S_{20}=50$ ,利用(1)的结论求  $S_{30}$ .
13. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1=1, a_{n+1}=a_n+1$ ,设函数  $f(n) = \frac{1}{n+a_1} + \frac{1}{n+a_2} + \dots + \frac{1}{n+a_n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*, n \neq 1$ ),求函数  $f(n)$  的最小值.



14. 一幢大楼共有  $n$  层, 现每层指定 1 人, 共  $n$  个人集中到第  $k$  层开会, 问: 如何确定  $k$ , 可使  $n$  位与会者上、下楼所走路程总和最短? (假设相邻两层楼梯长相等)

### 提高型

#### 一、选择题

- 一架飞机起飞时, 第一秒滑跑 2.3m, 以后每秒比前一秒多滑跑 4.6m, 离地的前一秒滑跑 66.7m, 则滑跑的时间一共是( ).  
(A) 15s                      (B) 16s                      (C) 17s                      (D) 18s
- 若  $a, b, c$  成等差数列, 则函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的图像与  $x$  轴的交点个数是( ).  
(A) 0 个                      (B) 1 个                      (C) 2 个                      (D) 不确定
- 若一个等差数列共有  $2n+1$  项, 其中奇数项之和为 319, 偶数项之和为 290, 则第  $n+1$  项为( ).  
(A) 31                      (B) 29                      (C) 30                      (D) 28
- 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n = 1 - 5 + 9 - 13 + 17 - 21 + \dots + (-1)^{n-1}(4n-3)$ , 则  $S_{15} + S_{22} - S_{31}$  的值是( ).  
(A) 13                      (B) -76                      (C) 46                      (D) 76

#### 二、填空题

- 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_2 + a_5 + a_8 = 12, a_2 \cdot a_5 \cdot a_8 = 28$ , 则  $a_n =$  \_\_\_\_\_.
- 等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_1 - a_4 - a_8 - a_{12} + a_{15} = 2$ , 则  $a_2 + a_{14} =$  \_\_\_\_\_.
- 设  $f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$ , 利用课本中推导等差数列前  $n$  项和公式的方法, 可得

$$f(-5) + f(-4) + \dots + f(0) + \dots + f(5) + f(6)$$

的值为\_\_\_\_\_.

- 在公差为正的等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_1, a_2$  是方程  $x^2 - a_3x + a_4 = 0$  的两个实根, 则通项公式  $a_n =$  \_\_\_\_\_, 前  $n$  项和  $S_n =$  \_\_\_\_\_.
- 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $S_m = S_n (m \neq n)$ , 则  $S_{m+n} =$  \_\_\_\_\_.

#### 三、解答题

- 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $a_1 = 2, a_2 = 3$ , 若在每相邻两项之间插入三个数, 使它和原数列构成一个新的等差数列, 求:
  - 原数列的第 12 项是新数列的第几项?
  - 新数列的第 29 项是原数列的第几项?
- (1) 已知  $\{a_n\}, \{b_n\}$  都是等差数列, 公差分别为  $d_1, d_2$ , 求证:  $\{3a_n + 2b_n\}$  是等差数列;  
(2) 请把上述命题推广到更一般的命题, 使上述命题是所推广命题的一个特例, 并证明推广命题.

